Övningsprov 3 – Komplexa tal

1. Beräkna följande

a) $1 + 3i + 5 - i$

b) $(1 + i)(2 - i)$

c) $(2 - 5i)(2 + 5i)$

d) $\frac{1+2i}{2-3i}$ (6/0/0)

2. Skriv följande komplexa tal på polär form

a) $z = 1 + i$

b) $z = 1 - \sqrt{3}i$ (2/2/0)

3. Skriv det komplexa talet $z = 2i$ i exponentiell form

(2/0/0)

4. Funktionen $y = x^2$ roteras runt x-axeln i intervallet $0 \leq x \leq 2$. Bestäm volymen för den rotationskropp som uppstår. (3/0/0)

5. Funktionen $f(x)$ är en täthetsfunktion som beskriver normalfördelningen för längder på Spykister där x är längden på eleverna i meter. Beskriv i ord vad följande integral-uttryck betyder.

a) $\int_{1,65}^{1,75} f(x)\ dx = 0{,}63$

b) $\int_{2}^{2,1} f(x)\ dx = 0{,}01$

6. Lös ekvationen $x^2 - 6x + 13 = 0$ och bestäm dess komplexa rötter

(1/0/0)

7. Vi definierar det komplexa talet $z = -3 + 4i$. Bestäm följande

a) Placera ut z i det komplexa talplanet
b) $Im(z)$
c) $Re(z)$
d) Bestäm $\bar{z}$
e) Bestäm $|z|$ (6/0/0)

8. Rita upp i det komplexa talplanet samtliga komplexa tal z som uppfyller följande krav

- $Im(z) > 0$
- $|z| = 4$
- $\frac{\pi}{2} < Arg(z) < \pi$ (1/1/0)

9. Utför polynomdivisionen och bestäm eventuell rest

a) $\frac{x^3-7x-6}{x-3}$ b) $\frac{x^3+3x^2-10x-25}{x+4}$ (4/2/0)

10. Funktionen $f(x)$ är en täthetsfunktion som beskriver fördelningen av åldrar i ett samhälle där x är åldern. Utnyttja din täthetsfunktion och skriv upp integraluttryck som motsvarar följande påståenden.

a) 50% av befolkningen är 45 år eller yngre.

b) Det är en lika stor andel som är mellan 10 och 20 år som 50 till 70 år. (1/1/0)

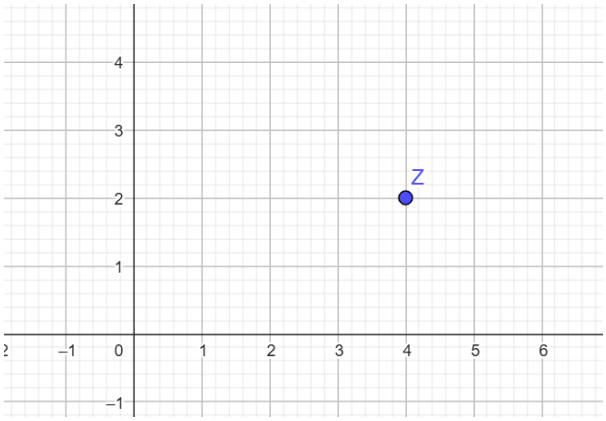
11. Lös ekvationen $z^3 = -1$ med fullständiga lösningar

(0/3/0)

12. Funktionen $y = lnx$ ska roteras runt y-axeln i intervallet $0 \leq y \leq 1$. Bestäm volymen för rotationskroppen som uppstår.

(0/2/0)

13. Joakim ritar upp följande komplexa tal z i det komplexa talplanet



a) Rita upp det komplexa talet $z \cdot i$ i det komplexa talplanet.

b) För ett annat komplext tal z vet du att $Re(z) = a$ $Im(z) = b$. Bestäm Re och Im för det komplexa talet $i \cdot z$

(1/2/0)

14. Visa att $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ för alla z

(0/2/0)

15. a) Visa att $\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^6 = 1$

b) För vilka positiva värden på k kommer följande uttryck $\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^k$ bli reellt?

(2/1/1)

16. Vilket/vilka komplexa tal tillfredsställer följande likhet

$$z + |z| = 1 + 2i$$

(0/1/1)

17. Rita upp i det komplexa talplanet samtliga komplexa tal z som har följande likhet

$$|z + \bar{z}| = |z - \bar{z}|$$

(0/0/2)

18. Cosinus går att definiera på flera olika sätt. Visa att man kan definiera $cosv$ med hjälp av komplexa tal med hjälp av följande likhet

$$cosv = \frac{e^{vi} + e^{-vi}}{2}$$

(0/0/2)

19. Ett område begränsas av grafen till funktionen $\frac{1}{\sqrt{x}}$ och intevallet $1 \leq x \leq 9$. Detta område roteras runt x-axeln och skapar en rotationskropp R. För vilket värde på a konstrueras en rotationskropp för intervallet $1 \leq x \leq a$ som får volymen $\frac{R}{2}$? Svara som ett heltal.

(0/0/3)

Övningsprov 3

1. a) $1+3i+5-i = 6+2i$

b) $(1+i)(2-i) = 2-i+2i-i^2 = 2+i-(-1) =$
$= 3+i$

c) $(2-5i)(2+5i) = 2^2-(5i)^2$

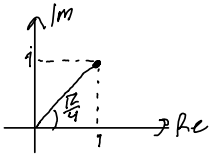
$= 4+25 = 29$

d) $\frac{1+2i}{2-3i} =$ [förlänga med nämnarens konjugat]

$= \frac{(1+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i+4i+6i^2}{2^2-(3i)^2} = \frac{-4+7i}{13} =$

$= \frac{-5}{13} + \frac{7i}{13}$

2. a)

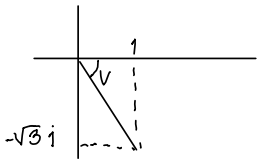


$|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\arg(z) = \frac{\pi}{4}$

Svar: $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

b)



$|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = 2$

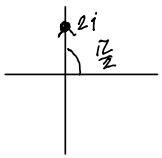
$\arg v$: $\tan v = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1}$

$v = \frac{\pi}{3}$ vilket ger

$\arg v = \frac{5\pi}{3}$ eller $-\frac{\pi}{3}$

$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

3. $z = 2i$



$z = 2\cdot e^{\frac{\pi}{2}\cdot i}$

4. $\pi\int_0^2 (x^2)^2\,dx =$

$= \pi\int_0^2 x^4\,dx = \pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2$

$= \pi\left(\frac{2^5}{5} - 0\right) = \frac{32\pi}{5}$

5. a) 63% av eleverna är mellan 1,65-1,75m

b) 1% av eleverna är mellan 2-2,1 meter

6. $x^2-6x+13=0$

$x = 3 \pm \sqrt{3^2-13}$

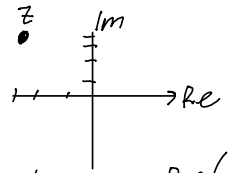
$= 3 \pm \sqrt{-4}$

$= 3 \pm 2i$

$x_1 = 3+2i$

$x_2 = 3-2i$

7. a)

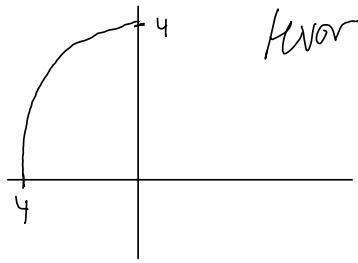


b) $\mathrm{Im}(z) = 4$ c) $\mathrm{Re}(z) = -3$

d) $\bar{z} = -3-4i$ e) $|z| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{25}$

$= 5$

8.



Kvartscirkel med radien 4

9. Använd den liggande stolen

a)
$$\begin{array}{r|l} x^3-7x-6 & x-3 \\ \hline -(x^3-3x^2) & x^2+3x+2 \\ \hline 3x^2-7x-6 & \\ -(3x^2-9x) & \\ \hline 2x-6 & \\ -(2x-6) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$x^2(x-3)=x^3-3x^2$

$3x(x-3)=3x^2-9x$

$2(x-3)=2x-6$

Ingen rest!

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2-10x-25 & x+4 \\ \hline -(x^3+4x^2) & x^2-x-6 \\ \hline -x^2-10x-25 & \\ -(-x^2-4x) & \\ \hline -6x-25 & \\ -(-6x-24) & \\ \hline -1 & \end{array}$$

$x^2(x+4)=x^3+4x^2$

$-x(x+4)=-x^2-4x$

$-6(x+4)=-6x-24$

Svar: Resten är -1

10. a) $\int_0^{45} f(x)\,dx = 0{,}5$

b) $\int_{10}^{20} f(x)\,dx = \int_{50}^{70} f(x)\,dx$

11. $z^3=-1$ skriv i polär form

$z^3=\cos\pi+i\sin\pi$ $\quad z=\cos(v)+i\sin(v)$ $\quad z^3=\cos(3v)+i\sin(3v)$

$3v=\pi+2\pi\cdot n$

$v=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi\cdot n}{3}$ där $n=0,1,2$

z_1 då $n=0$ $\quad z_1=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

z_2 då $n=1$ $\quad z_2=\cos(\pi)+i\sin(\pi)$

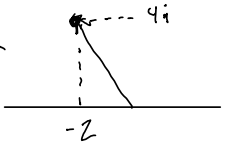
z_3 då $n=2$ $\quad z_3=\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

12. $y=\ln x$ $\quad x=e^y$

$$\pi\int_0^1 x^2\,dy=\pi\int_0^1 (e^y)^2\,dy=\pi\int_0^1 e^{2y}\,dy=\pi\left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_0^1=$$

$$=\pi\left(\frac{e^2-1}{2}\right)$$ Svar: $\pi\left(\frac{e^2-1}{2}\right)$

13. a) $z=4+2i$ $\quad i\cdot z=i(4+2i)=4i-2$



b) $\mathrm{Re}(iz)=-b$ $\quad \mathrm{Im}(iz)=a$

14. $z=a+bi$ $\quad \bar{z}=a-bi$ $\quad z\cdot\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

$|z|^2=a^2+b^2$ $\quad |z|^2=z\cdot\bar{z}$ Snyggt!

15. a) $\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^6=\cos\left(\frac{6\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{6\pi}{3}\right)=\cos(2\pi)+i\sin(2\pi)$

$=1$ $\quad VL=HL$

b) Två fall! Antingen är uttrycket lika med 1 eller lika med -1

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^n=1 \qquad n\cdot\frac{\pi}{3}=2\pi\cdot n$$

$n=6\cdot n$ $\quad n=0,1,2,3\ldots$

eller $\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^n=-1$ $\quad n\cdot\frac{\pi}{3}=\pi+2\pi\cdot n$

$n=3+6\pi\cdot n$ $\quad n=0,1,2,3\ldots$

16. $z = a+bi \quad |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$z + |z| = a+bi+\sqrt{a^2+b^2} = 1+2i$

$a+bi+\sqrt{a^2+b^2} = 1+2i \quad b=2$

$a+\sqrt{a^2+4} = 1$

$\sqrt{a^2+4} = 1-a$

$a^2+4 = 1-2a+a^2$

$4 = 1-2a$

$2a = -3$

$a = -\frac{3}{2}$

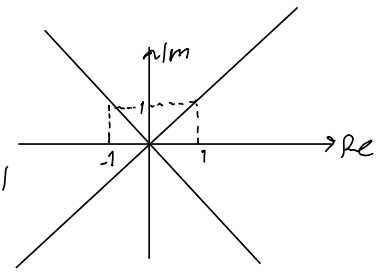
17. $z = a+bi \quad \bar{z} = a-bi \quad |z+\bar{z}| = |z-\bar{z}|$

$|a+bi+a-bi| = |a+bi-(a-bi)|$

$|2a| = |2bi|$

$|a| = |bi|$

Alla komplexa tal på dessa linjer



18. Visa att $\cos v = \frac{e^{vi}+e^{-vi}}{2}$

$HL = \frac{e^{vi}+e^{-vi}}{2} = \frac{\cos(v)+\sin(v)+\cos(v)-i\sin(v)}{2}$

$= \frac{2\cos(v)}{2} = \cos(v) \quad VL = HL$!! Klart!

$e^{vi} = \cos(v)+i\sin(v) =$

$e^{-vi} = \cos(-v)+i\sin(-v) =$

$= \cos(v)-i\sin(v)$

19. $\pi\int_1^9 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = R = \pi\int_1^9 \frac{1}{x}dx = \pi\left[\ln x\right]_1^9 = \pi(\ln 9 - \ln 1) =$

$= \pi \cdot \ln 9$

$\pi\int_1^a \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \frac{R}{2} = \pi\left[\ln x\right]_1^a = \pi(\ln a - \ln 1) = \pi \cdot \ln a$

$2 \cdot \frac{R}{2} = 2 \cdot \pi \cdot \ln a = \pi \cdot \ln 9$

$\pi \cdot \ln a = \frac{\pi \cdot \ln 9}{2}$

$\ln a = \frac{\ln 3^2}{2}$

$\ln a = \frac{2 \cdot \ln 3}{2}$

$\ln a = \ln 3$

$a = 3$