Mahifi.se

Övningsprov 2 – Ma fort. 1c

Miniräknare

Geogebra

1. Derivera följande funktioner algebraiskt, förenkla om möjligt.

a) $f(x) = 2x^3 + 3x + 4$

b) $g(x) = e^x + e^{2x} + e$

c) $g(x) = 5^x + 10$

d) $f(x) = \frac{e^{3x}}{e^x}$

e) $g(x) = \frac{e^5 \cdot e^{2x}}{e^{10} \cdot e^x - 2e^x}$ (3/2/1)

2. Bestäm samtliga primitiva funktioner till följande funktioner

a) $f(x) = 3x^2 - x + 1$

b) $f(x) = e^{3x}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2} + 10$

d) $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$ (2/1/0)

3. Bestäm följande integraler

a) $\int_0^2 3x^2 + 1 \, dx$

b) $\int_{-1}^1 e^{2x} dx$

c) $\int_0^1 x^2 \cdot e^x \, dx$

d) $\int_0^3 \frac{3}{e^{2x}} dx$

e) $\int_0^1 \frac{e^x + xe^{x+1}}{1+ex} dx$ (4/2/1)

Mahifi.se

4. Bestäm talet a

a) $ln(a+4) - ln4 = ln2$

b) Om $f'(0) = 8$ för funktionen $f(x) = 2e^{ax}$

c) $e^{2a} + 10 = 15$

d) $\int_{-1}^{a} x^2 dx = 3$

e) $f(x) = \frac{a}{x}$ och $f''(1) = 8$

f) Om $f(x) = e^{\frac{x}{10}} + ax$ har en extrempunkt i punkten $(0,1)$ (4/4/0)

5. Bestäm $f'(0)$ för följande funktioner

a) $f(x) = e^x \cdot x^2$

b) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

c) $f(x) = 3^x \cdot x$ (3/0/0)

6.

a) Bestäm för vilka x-värden funktionen $f(x) = x^3 - 12x + 10$ extrempunkter

b) Bestäm extrempunkternas karaktär

(3/1/0)

7. Visa att funktionen $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$ har en terrasspunkt

(3/0/0)

8. Linjen $y = 3x + 5$ tangerar funktionen $f(x) = ax^3 + bx$ i $x = 1$. Bestäm konstanterna a och b

(1/2/0)

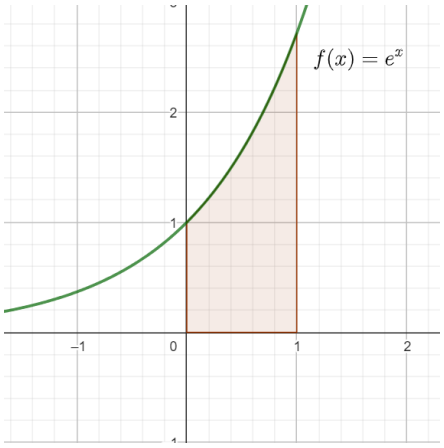
9. Bestäm ett exakt värde till följande uttryck

a) $sin(30°)$ b) $cos(150°)$ c) $sin(270°)$ d) $tan(240°)$

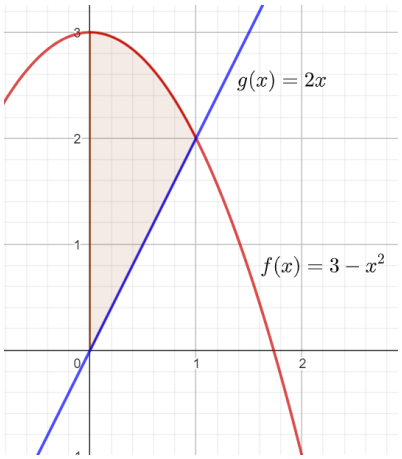
Mahifi.se

10. Bestäm arean på det markerade området, svara exakt

a)



b)



11. Lös ekvationerna i intervallet $0° < v < 360°$

a) $cosx = \frac{1}{2}$ b) $sinx = \frac{1}{\sqrt{2}}$ c) $sinx = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $sinv = 0{,}3$ (4/1/0)

12. Antalet invånare i Joakimköping ökar enligt funktionen

$f(x) = 1500 - 400 \cdot e^{-0{,}2x}$, där x är antalet år från 2020.

a) Vilket år är befolkningen i Joakimköping 1400 personer?

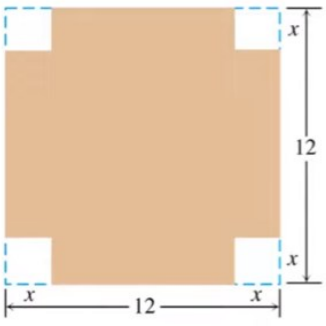
b) Vilket år ökar befolkningen med 20 individer/år?

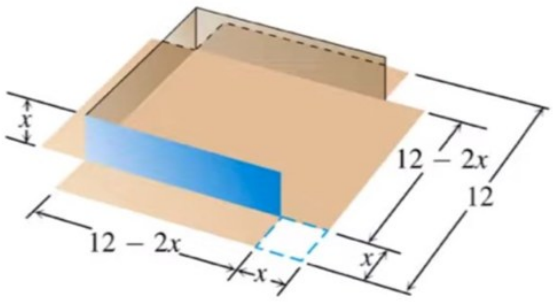
(2/1/0)

13. Visa algebraiskt (utan miniräknare) att funktionen $f(x) = x^3 + 0{,}45^3x + 100000$ saknar extrempunkter

(0/2/0)

14. Joakim ska bygga en låda och vill maximera dess volym. Han har gjort följande skiss där han kommer vika upp sidorna enligt bilden nedan. Bestäm den maximala volymen lådan kan anta.





(0/3/0)

15. En tredjedagsfunktion $f(x)$ saknar extrempunkter. Skissa en tänkbar derivatafunktion till $f(x)$

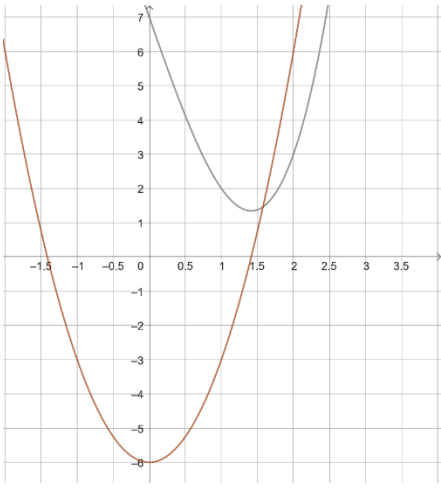
(0/1/0)

16. Lös ekvationen $ln(x+1) = \sqrt{2}$. Svara exakt och med ett närmevärde (0/1/0)

17. För en funktion vet du att $f''(x) = x$, du vet också att $f'(1) = 2$ samt att $f(1) = 3$

Bestäm $f(x)$

(1/1/0)



18. Observera graferna till höger. Den ena representerar $f(x)$ och den andra $f'(x)$. Bestäm ekvationen för den tangent som tangerar $f(x)$ i $x = 1$.

(1/1/0)

19. Om du vet att $cos31° = 0{,}86$ bestäm då värdet på $cos211°$ (0/1/0)

20. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{(9+h)^{\frac{1}{2}} - 9^{\frac{1}{2}}}{h}$$

(0/0/1)

21. En epidemi sprids i ett isolerat land. Det oerhört framgångsrika företaget Joakimton har gjort en modell för att beskriva antalet smittade.

$$S(t) = \frac{A}{9e^{-0{,}0564t}+3} + 2e^{-0{,}0021t}$$

Där t är antal dagar från den 1 januari 2023.

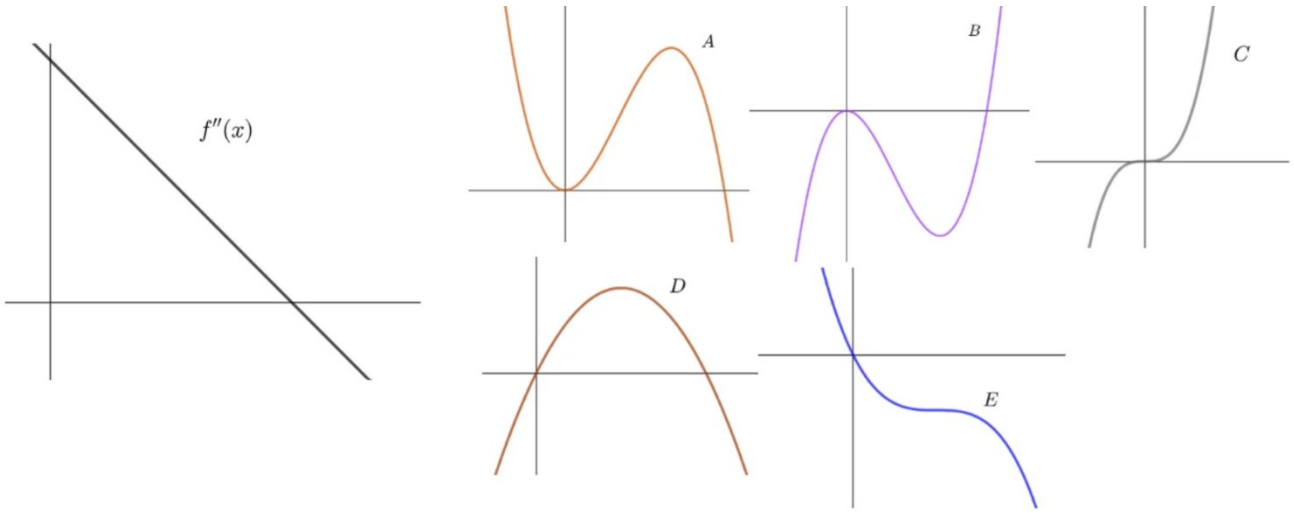
Byn innehåller 6000 personer. Man antar att efter tid alla kommer bli smittade av sjukan. Bestäm konstanten A så att modellen blir realistisk.

(0/1/1)

22. Visa att följande samband gäller för funktioner som är kontinuerliga i intervallet $a \le x \le b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$ (0/1/1)

23. En funktion $f(x)$ är definierad. Nedan visas grafen till $f''(x)$. Vilken/vilka av följande grafer kan representera $f(x)$?



24. Du har följande funktion $f(x) = ax^6$. Du vet att den räta linjen $y = 12x - 20$ tangerar grafen till funktionen i ett okänt x-värde

    Bestäm talet heltalet a

(0/0/2)

25. För en funktion $f(x)$ vet du följande

- $f''(x) = 3x^2$
- $f(x)$ har en extrempunkt i $x = 3$
- Linjen $y = -19x + 38$ tangerar funktionen.

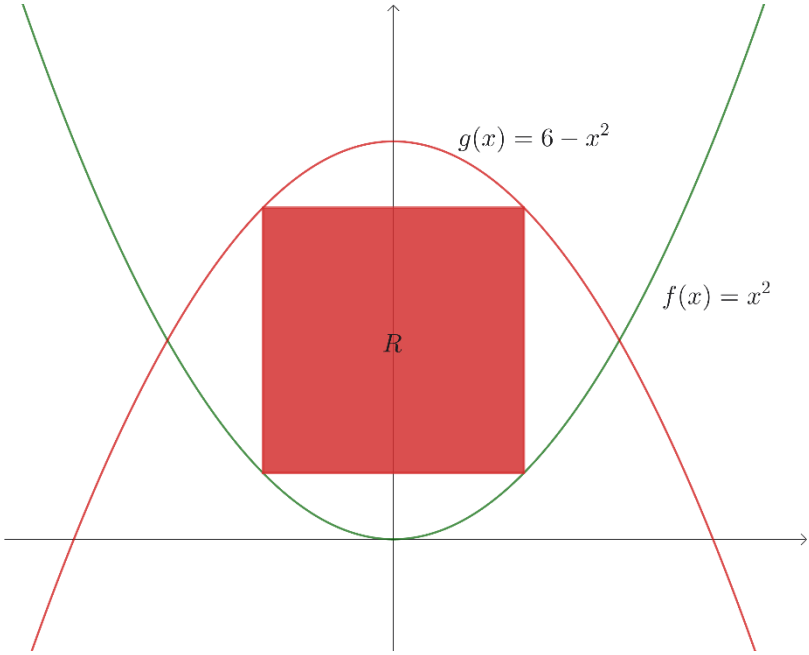
Bestäm funktionen $f(x)$ (0/1/2)

26. Trädpopulationen i ett skogsområde minskar exponentiellt på grund av en skadegörare som dök upp år 2000. År 2020 uppskattas antalet träd till 12 000, och just det året minskar antalet träd med 360 träd/år. Bestäm hur många träd som fanns i skogsområdet år 2000 innan skadegöraren kom.

(0/0/3)

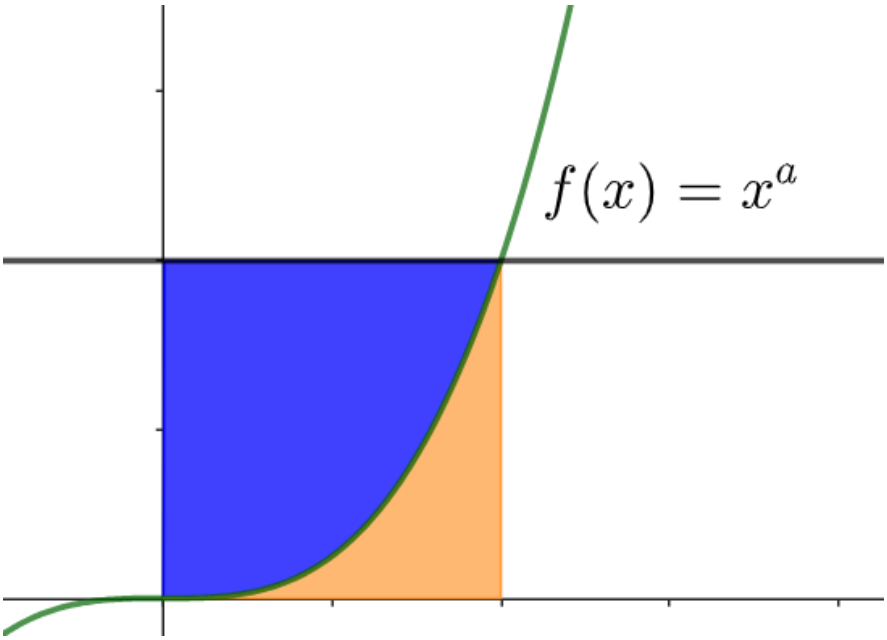
Mahifi.se

27. Nedan ser du graferna till funktionerna $f(x) = x^2$ och $g(x) = 6 - x^2$. Mellan funktionernas grafer begränsas en rektangel R. Rektangeln avgränsas av graferna till funktionerna. Bestäm den maximala arean rektangeln R kan anta.



(0/0/3)

28. Nedan ser du två markerade areor. Den orange-markerade arean är arean under grafen till funktionen $f(x) = x^a$ där a är ett positivt heltal. Visa att den blåa arean alltid är a gånger större än den orangea arean.



(0/0/3)

Övningsprov 2 ht26

1. a) $f(x) = 2x^3 + 3x + 4$ $\quad f'(x) = 6x^2 + 3$

b) $f(x) = e^x + e^{2x} + e$ $\quad f'(x) = e^x + 2e^{2x}$

c) $g(x) = 5^x + 10$ $\quad g'(x) = \ln 5 \cdot 5^x$

d) $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{e^x} =$ $\quad f(x) = 2e^{2x}$

$= e^{3x-x} = e^{2x}$

$g(x) = \dfrac{e^5 \cdot e^{2x}}{e^{10} \cdot e^x - 2e^x} =$ $\quad g'(x) = \dfrac{e^x \cdot e^5}{e^{10} - 2}$

$= \dfrac{e^5 \cdot e^{2x}}{e^x(e^{10} - 2)} = \dfrac{e^{2x-x} \cdot e^5}{e^{10} - 2}$

$= \dfrac{e^x \cdot e^5}{e^{10} - 2}$

2. a) $f(x) = 3x^2 - x + 1$ $\quad F(x) = x^3 - \dfrac{x^2}{2} + x + C$

b) $f(x) = e^{3x}$ $\quad F(x) = \dfrac{e^{3x}}{3} + C$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + 10 = x^{-2} + 10$ $\quad F(x) = \dfrac{-1}{x} + 10x + C$

d) $f(x) = x \cdot \sqrt{x} = x \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$ $\quad F(x) = \dfrac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + C$

3. a) $\int_0^2 3x^2+1\,dx = \left[x^3+x\right]_0^2 = (2^3+2)-(0^3+0) = 10$

b) $\int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{e^2}{2} - \frac{e^{-2}}{2} = \frac{e^2-e^{-2}}{2}$

c) $\int_0^3 \frac{3}{e^{2x}}\,dx = \int_0^3 3e^{-2x}\,dx = \left[\frac{-3e^{-2x}}{2}\right]_0^3 = \frac{-3e^{-6}}{2} - \left(\frac{-3e^0}{2}\right) = \frac{-3e^{-6}+3}{2}$

d) Amplitude geogebra $\int_0^1 x^2e^x\,dx = 0,72$

e) $\int_0^1 \frac{e^x+xe^{x+1}}{1+xe}\,dx = \int_0^1 \frac{e^x+xee^x}{1+ex}\,dx = \int_0^1 \frac{e^x(1+xe)}{1+xe}\,dx = \int_0^1 e^x\,dx$

$= \left[e^x\right]_0^1 = e-1$

4. a) $\ln(a+4) - \ln 4 = \ln 2$

$\ln\left(\frac{a+4}{4}\right) = \ln 2$

$\frac{a+4}{4} = 2$

$a+4 = 8$

$a = 4$

b) $f(x) = 2e^{ax}$ $f'(x) = 2ae^{ax}$

$f'(0) = 8$ $2ae^0 = 8$

$2a = 8$

$a = 4$

c) $e^{2a} + 10 = 15$

$e^{2a} = 5$

$\ln e^{2a} = \ln 5$

$2a = \ln 5$

$a = \frac{\ln 5}{2}$

d) $\int_{-1}^{a} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{a} = \frac{a^3}{3} - \left(\frac{-1}{3}\right) = 3$

$\frac{a^3}{3} + \frac{1}{3} = 3$

$\frac{a^3+1}{3} = 3$

$a^3+1 = 9$

$a^3 = 8$

$a = 2$

4. e) $f(x) = \frac{a}{x} = ax^{-1}$ $f'(x) = -ax^{-2}$ $f''(x) = 2ax^{-3}$

$f''(x) = \frac{2a}{x^3}$ $f''(1) = 8$

$\frac{2a}{1^3} = 8$

$a = 4$

f) $f(x) = e^{\frac{x}{10}} + ax$

Undersök derivatan!

$f'(x) = \frac{e^{\frac{x}{10}}}{10} + a$

$f'(0) = 0$ eftersom det skall vara en extremvärde där!

$f'(0) = 0$

$\frac{e^0}{10} + a = 0$ $a = \frac{-1}{10}$

5. Använd geogebras deriveringskommando!

a) $f'(0) = 0$

b) $f'(0) = 1$

c) $f'(0) = 1$

6. a) $f(x) = x^3 - 12x + 10$

$f'(x) = 3x^2 - 12$

$f'(x) = 0$ $3x^2 - 12 = 0$

$3x^2 = 12$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

Svar: Då $x = \pm 2$

b) Undersök andraderivatan eller teckentabell!

$f''(x) = 6x$ $f''(2) = 12$ minimipunkt eftersom $f''(x) > 0$

$f''(-2) = -12$ maximipunkt! eftersom $f''(x) < 0$

7. a) $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$ $\quad f'(x) = x^2 + 2x + 1$

$f'(x) = 0$ Undersök derivata innan och efter!

$x^2 + 2x + 1 = 0$ $\quad f'(-2) = 4 - 4 + 1 = 1$ Positiv

$x = -1 \pm \sqrt{1-1}$ $\quad f(0) = 0 + 0 + 1 = 1$ Positiv

$= -1 \pm 0$ Terrassplunta då $x = -1$

$x = -1$

8. $f(x) = ax^3 + bx$ Tangenten $y = 3x + 5$ tangerar i $x = 1$

$f'(x) = 3ax^2 + b$

$y'(1) = 3$ } måste vara
$y(1) = 8$ } samma som $f(x)$

$f(1) = a + b = 8$

$f'(1) = 3a + b = 3$

$\begin{cases} a + b = 8 & \text{(I)} \\ 3a + b = 3 & \text{(II)} \end{cases}$

(II) − (I) $= 2a = -5$

$a = \frac{-5}{2}$

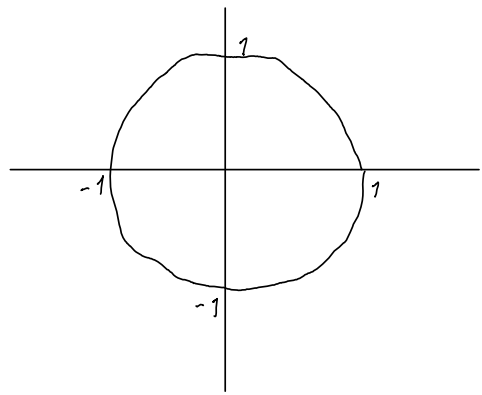
$b = 8 - a$

$b = 8 - \frac{5}{2}$

$b = \frac{21}{2}$

9) Titta i tabell och gör en enhetscirkel

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) -1 d) $\sqrt{3}$



10. $\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1$ Svar: $e-1$ a.e

b) Arean mellan grafer: $\int f(x)dx - \int g(x)dx$

$\int_0^1 3 - x^2 dx - \int_0^1 2x dx = [3x - \frac{x^3}{3}]_0^1 - [x^2]_0^1 = 3 - \frac{1}{3} - (0-0) - (1-0)$

$= 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ Svar: $\frac{5}{3}$ a.e

11. Rita upp en enhetscirkel och markera alla lösningar!

a) $x_1 = 60°$ $x_2 = 300°$ b) $x_1 = 45°$ $x_2 = 135°$ c) $x_1 = 240°$ $x_2 = 300°$

d) Bestäm $\sin^{-1}(0{,}3) = V \approx 17{,}5°$ $V_1 = 17{,}5°$ $V_2 = 180° - 17{,}5° = 162{,}5°$

12. a) $f(x) = 1400$ $1500 - 400 \cdot e^{-0,2x} = 1400$

$e^{-0,2x} = \frac{1}{4}$

$-0,2x = \ln(\frac{1}{4})$

$x = \frac{\ln(\frac{1}{4})}{-0,2}$

$x \approx 7$

Svar: 2027

b) Sök $f'(x) = 20$

$f'(x) = -0,2 \cdot 400 \cdot e^{-0,2x}$

$f'(x) = 20$ $-0,2 \cdot 400 \cdot e^{-0,2x} = 20$

$e^{-0,2x} = \frac{20}{0,2 \cdot 400}$

$-0,2x = \ln(\frac{20}{0,2 \cdot 400})$

$x = \frac{\ln(\frac{20}{3,2 \cdot 400})}{-0,2} \approx 7$

Svar: 2027

13. $f(x) = x^3 + 0{,}45x + 100000$

$f'(x) = 3x^2 + 0{,}45^3 \quad f'(x) = 0$

$3x^2 + 0{,}45^3 = 0$

$3x^2 = -0{,}45^3$

$x^2 = \frac{-0{,}45^3}{3}$

$x = \pm\sqrt{\frac{-0{,}45^3}{3}}$ saknar reella lösningar! Ingen extrempunkter □

14. Volymen beskrivs av: $V(x) = (12-2x)^2 \cdot x$

$= (144 - 48x + 4x^2)x = 144x - 48x^2 + 4x^3$

Undersök extrempunkter!

$V'(x) = 144 - 96x + 12x^2 \quad V'(x) = 0$

$144 - 96x + 12x^2 = 0$

$12 - 8x + x^2 = 0$

$x = 4 \pm \sqrt{16-12}$

$= 4 \pm \sqrt{4}$

$= 4 \pm 2$

$x_1 = 6$

$x_2 = 2$

Verifiera! Andraderivata!

$V''(x) = -96 + 24x$

$V''(2) = -96 + 48 = -48$ maximipunkt

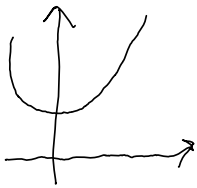
$V''(6) = -96 + 24 \cdot 6 > 0$ minimipunkt!

Basen ska vara: $12 - 2 \cdot 2 = 8$ l.e

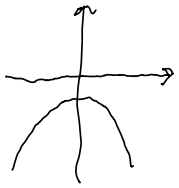
Höjden ska vara 2 l.e

Total volym: $V(2) = 128$

15. Typ



eller



16. $\ln(x+2)=\sqrt{2}$

$x+2=e^{\sqrt{2}}$

$x=e^{\sqrt{2}}-2\approx 2,113$

17 $f''(x)=x$

$f'(x)=\frac{x^2}{2}+C$

$f(x)=\frac{x^3}{6}+Cx+D$

$f'(1)=2$

$\frac{1}{2}+C=2$

$C=\frac{3}{2}$

$f(x)=\frac{x^3}{6}+\frac{3x}{2}+D$

$f(1)=3$

$\frac{1}{6}+\frac{3}{2}+D=3$

$\frac{10}{6}+D=3$

$D=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

Svar $f(x)=\frac{x^3}{6}+\frac{3x}{2}+\frac{4}{3}$

18. $y=kx+m$ k ges av den röda grafen

$r(1)=-3$ Använd sedan den grå grafen för att ta fram punkten $g(1)=2$

$y(1)=2$

$2=-3\cdot 1+m$

$m=5$

$\boxed{y=-3x+5}$

19. Rita upp en enhetscirkel! $\cos(211°)=-0,86$

20. $\lim_{h\to 0}\frac{(9+h)^{\frac{1}{2}}-9^{\frac{1}{2}}}{h}$ Derivatans definition för funktionen $f(x)=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ i $x=9$

$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ $f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(9)=\frac{1}{2\sqrt{9}}=\frac{1}{6}$ $\lim_{h\to 0}\frac{(9+h)^{\frac{1}{2}}-9^{\frac{1}{2}}}{h}=\frac{1}{6}$

21. $S(t) = \frac{A}{9e^{-0,0564t} + 3} + 2e^{-0,0021t}$

över tid ska alla smittas

$\lim_{t \to \infty} S(t) = 6000$

$\lim_{t \to \infty} \frac{A}{9e^{-0,0564t} + 3} + 2e^{-0,0021t} = 6000$

$9e^{-0,0564t}$ och $2e^{-0,0021t}$ försummas då $t \to \infty$

$\frac{A}{3} = 6000$

$A = 18000$ Svar: $A = 18000$

22. $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

$-\int_b^a f(x)\,dx = -[F(x)]_b^a = -(F(a) - F(b)) = -F(a) + F(b) = F(b) - F(a)$ □

23. A och E

24 $f(x) = ax^b$ den räta linjen $y = 12x - 20$

tangerar $f(x)$ i något x-värde

$f'(x) = 6ax^5$

$f'(k) = 12$ ← x-värdet den tangerar i

$12 = 6ak^5$

$a = \frac{2}{k^5}$

funktionerna ska vara samma i $x = k$

$12k - 20 = ak^b$

$12k - 20 = \frac{2}{k^5} \cdot k^b = 2k$

$12k - 20 = 2k$

$10k = 20$

$k = 2$

$a = \frac{2}{2^5} = \frac{1}{16}$ Svar: $a = \frac{1}{16}$

25. $f''(x) = 3x^2$

$f'(x) = x^3 + C$

$f'(3) = 0 \quad 3^3 + C = 0$

$C = -27$

$f'(x) = x^3 - 27$

$f(x) = \frac{x^4}{4} - 27x + D$

För vilket x tangerar

$y = -19x + 38$ t.

$f'(x) = -19 \qquad y(2) = 0$

$x^3 - 27 = -19 \qquad f(2) = 0$

$x^3 = 8$

$x = 2 \qquad \frac{2^4}{4} - 27 \cdot 2 + D = 0$

$D = 54 - 4 = 50$

Svar: $f(x) = \frac{x^4}{4} - 27x + 50$

26. $f(x) = Ca^x$ x är från 2000

$f(20) = Ca^{20} = 12000 \qquad f'(x) = \ln a \cdot C \cdot a^x$

$f'(20) = \ln a \cdot \underbrace{C \cdot a^{20}}_{=12000} = -360$

$\ln a = \frac{-360}{12000}$

$a = e^{\frac{-360}{12000}} \approx 0{,}97$

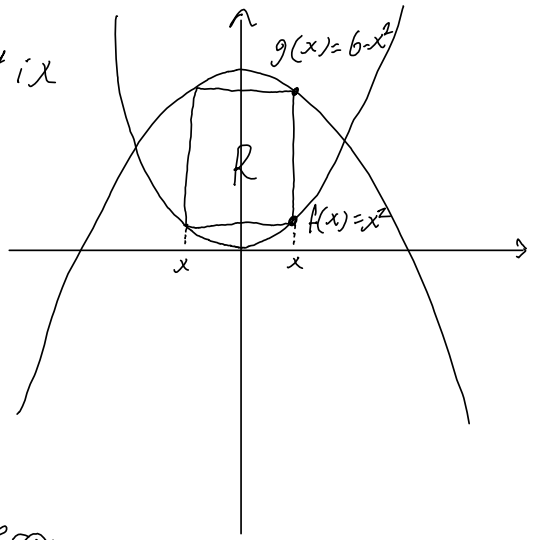
Bestäm C

$f(20) = C \cdot 0{,}97^{20} = 12000$

$C = \frac{12000}{0{,}97^{20}} \approx 21865$

Svar: 2000 fanns det ungefär 21865 träd

27. Arean för R uttrycket i x



$A(x)=(g(x)-f(x))\cdot 2x$

$=(6-x^2-x^2)\cdot 2x=$

$=(6-2x^2)\cdot 2x=12x-4x^3$

maximera $A(x)$

$A'(x)=12-12x^2$

$A'(x)=0$

$12-12x^2=0$

$x^2=1$

$x=\pm 1$

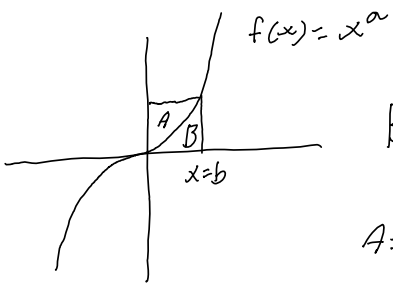
Verifiera max

$A''(x)=-24x$

$A''(1)=-24\cdot 1=-24$ $A''(x)<0 \Rightarrow$ max!

$A(1)=12\cdot 1-4\cdot 1^3=8$ svar: 8 areaenheter!

28.



$B=\int_0^b x^a\,dx=\left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_0^b=\frac{b^{a+1}}{a+1}$

$A=b\cdot b^a-\int_0^b x^a\,dx=b^{a+1}-\frac{b^{a+1}}{a+1}$

$=\frac{(a+1)(b^{a+1})}{a+1}-\frac{b^{a+1}}{a+1}=\frac{ab^{a+1}+b^{a+1}-b^{a+1}}{a+1}$

$=\frac{ab^{a+1}}{a+1}=a\cdot\frac{b^{a+1}}{a+1}$

A är alltså a större än b

$\square$