

Övningsprov 2 – Ma4

Utan miniräknare

1. Derivera följande funktioner

a) $f(x) = \sin 3x$

b) $f(x) = x \cdot e^{2x}$

c) $f(x) = (4x + 2)^5$

d) $f(x) = \ln(\cos x)$

e) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

f) $f(x) = \cos^2(2x) - \sin^2(2x)$

g) $f(x) = e^{\sqrt{2x+1}}$ (4/3/1)

2. Lös ekvationerna, (svara i grader på a), c) och e) och radianer på b) och d))

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

c) $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

d) $(\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{2}$

e) $\sin x \cos(35^\circ) = 1 - \cos x \sin(35^\circ)$ (6/2/1)

3. Beräkna följande integraler

a) $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$

b) $\int_0^{2\pi} \cos 2x \, dx$

c) $\int_1^{e^2} \frac{7}{x} \, dx$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \, dx$ (4/2/2)

4. Bestäm exakta värdet för följande uttryck

a) $\cos^2 x + \sin^2 x + \sin(315^\circ)$

b) $1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$

c) $\cos(73^\circ)\cos(13^\circ) + \sin(13^\circ)\sin(73^\circ)$

d) $\cos(345^\circ)\sin(165^\circ)$ (1/2/1)

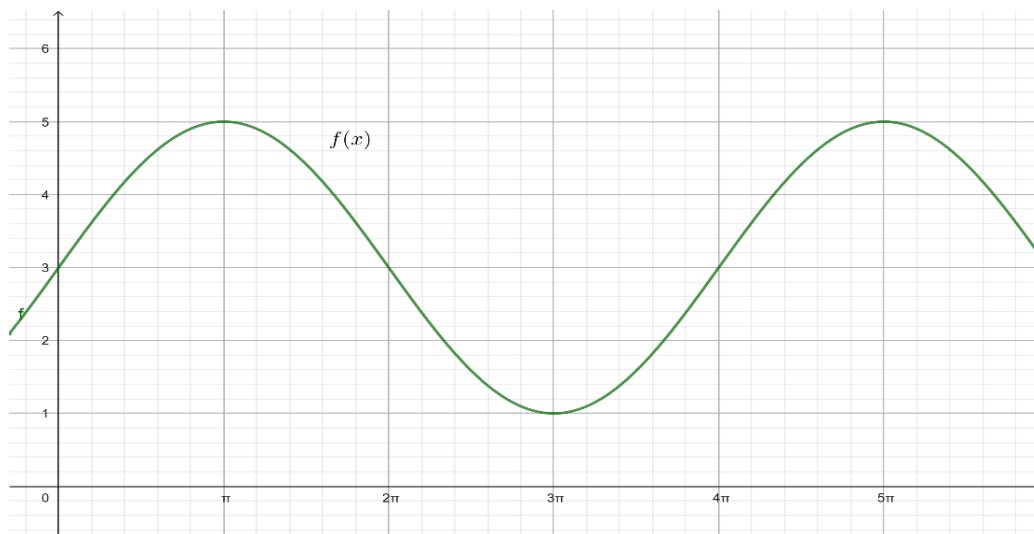
5. Bestäm samtliga asymptoter till följande funktioner

a) $f(x) = \frac{1}{x+6} + 3$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2-4} + x$

c) $f(x) = \frac{1}{(x-a)(x+b)} + c$ (2/2/1)

6. Bestäm funktionsekvationen för följande funktion om du vet att den går att skriva på formen $f(x) = A \sin kx + B$, endast svar krävs.

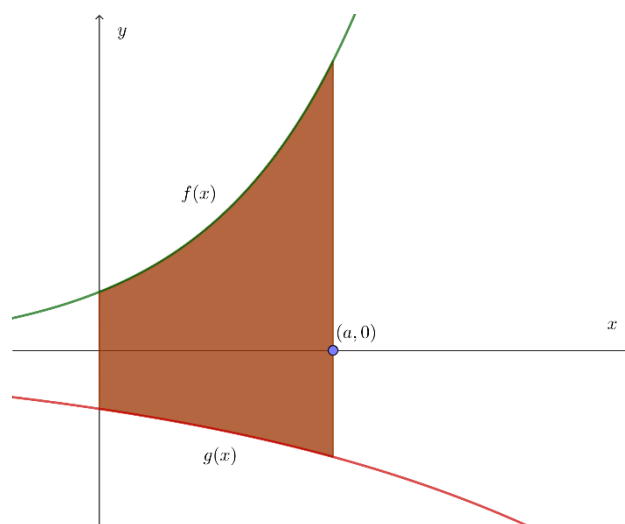


(1/1/0)

7. Bestäm ekvationen för den tangent som tangerar $f(x) = \frac{e^x}{x}$ i $x = 2$

(1/1/0)

8. Nedan ser du två funktioner $f(x)$ och $g(x)$ och en avgränsad area som är 25 areaenheter. Du vet att $\int_0^a f(x) dx = 18$. Bestäm värdet på integralen $\int_0^a g(x) dx$.
Motivera ditt svar.



(0/2/0)

9. Visa att funktionen $f(x) = x \cdot e^{-\frac{x}{a}}$ alltid har en extrempunkt/tersaspunkt i $x = a$ då $a \neq 0$

(0/2/0)

10. Visa att funktionen $f(x) = \frac{1 - \cos 4x}{8}$ är en primitiv funktion till funktionen $g(x) = \sin 2x \cos 2x$

(0/2/0)

11. Bestäm koordinaterna och karaktär (max/min) på den första extrempunkten för funktionen $f(x) = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x$ då $0 < x$

(0/3/0)

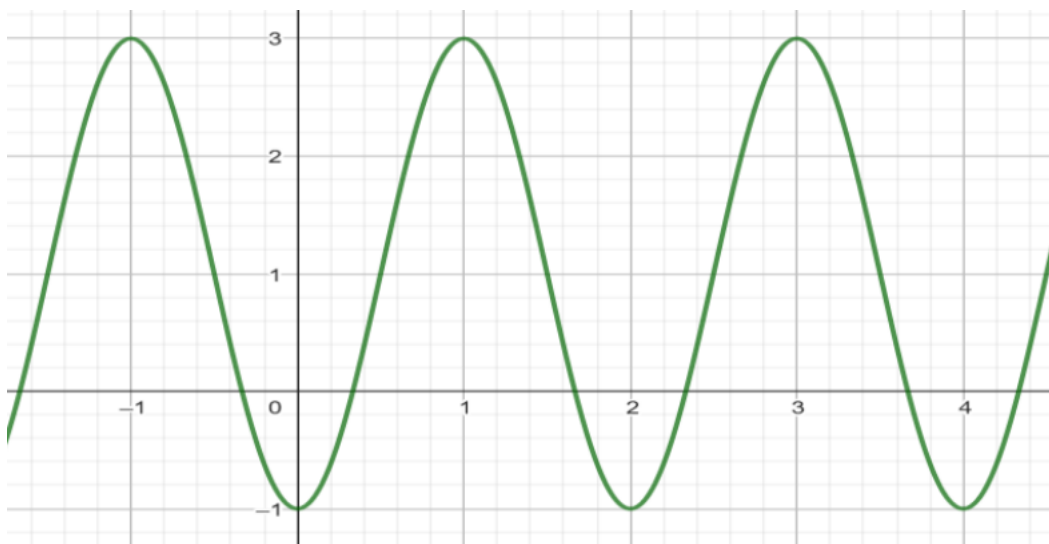
12. Under kursens gång har ni värt er formlerna för dubbla vinkeln för sinus och cosinus. Det finns även en formel för dubbla vinkeln för tangens.

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Visa att sambandet stämmer genom att använda de andra trigonometriska identiteterna

(0/1/1)

13. Nedan ser du en funktion på formen $f(x) = 2 \sin(kx + V) + 1$. Bestäm konstanterna k och V .



(0/1/1)

14. Lös ekvationen

$$\sin 2x = \sin x$$

(0/1/1)

15. Beräkna integralen

$$\int_0^1 e^x \cdot \sin^2 x \, dx + \int_0^1 e^x \cdot \cos^2 x \, dx$$

(0/1/1)

16. Vi definierar funktionen $f(x) = e^{h(x)}$. Du vet att funktionen $h(x)$ har en tangent $y = 3x - 2$ i $x = 1$. Bestäm ekvationen för den tangent som tangerar $f(x)$ i $x = 1$

(0/0/2)

17. Integralen $\int_1^a \frac{1}{x} \, dx$ representerar en area A . För vilket värde på b uttryckt i a får integralen $\int_b^a \frac{1}{x} \, dx$ värdet $\frac{A}{2}$

(0/0/2)

18.a) Derivera följande funktion $f(x) = x^x$ genom att först skriva om funktionen till $f(x) = (e^{\ln x})^x$

(0/1/1)

b) Observera följande mönster, högerleden är närmevärden till uttrycken.

$$\sqrt[2]{2} = 1,414$$

$$\sqrt[3]{3} = 1,44$$

$$\sqrt[4]{4} = 1,414$$

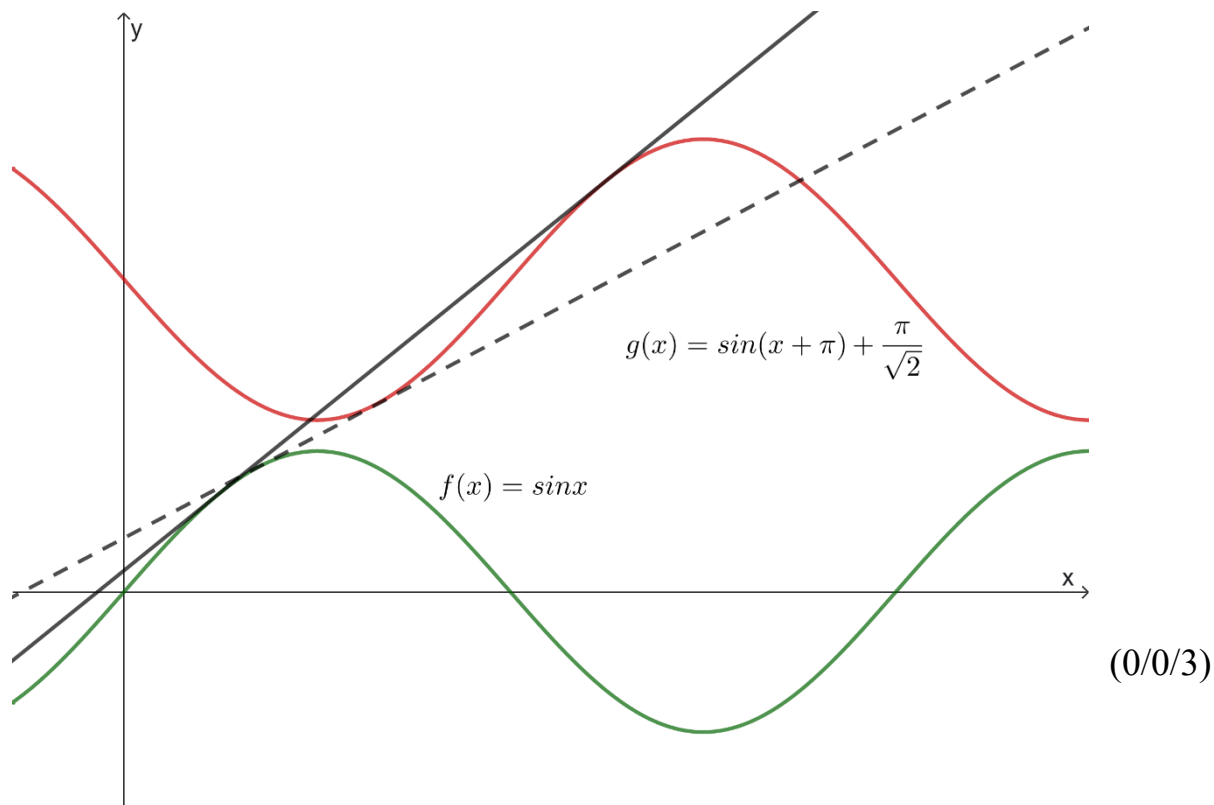
$$\sqrt[5]{5} = 1,379$$

$$\sqrt[a]{a}$$

För vilket värde på a maximeras uttryckets värde, svara exakt.

(0/0/2)

19. Funktionerna $f(x) = \sin x$ och $g(x) = \sin(x + \pi) + \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ har två gemensamma tangenter dvs. en tangent som tangerar båda funktionerna med positiv lutning (se bild nedan) i intervallet $0 < x < 2\pi$. Bestäm ekvationen för den tangenten som är en heldragen linje, svara exakt.



(0/0/3)

Med miniräknare och geogebra

20. Bestäm $f'(3)$ för följande funktion med ditt digitala hjälpmedel, svara med två decimaler

$$f(x) = 4^{\sin x}$$

(1/0/0)

21. Beräkna följande integral med ditt digitala hjälpmedel, svara med en decimal

$$\int_0^2 e^x \cdot \sin x$$

(1/0/0)

22. Funktionen $f(x) = \cos(3x) + e^{1.3x}$ har en tangent i $x = 2$. Bestäm k -värdet för den tangenten. Svara med två decimaler

(1/0/0)

23. Lös ekvationen $4,5\sin 2x = 3,7$. Svara i radianer

(2/1/0)

24. Månens synlighet i procent $P(t)$ från nymåne (tillståndet där månen inte syns överhuvudtaget) går att modellera med funktionen

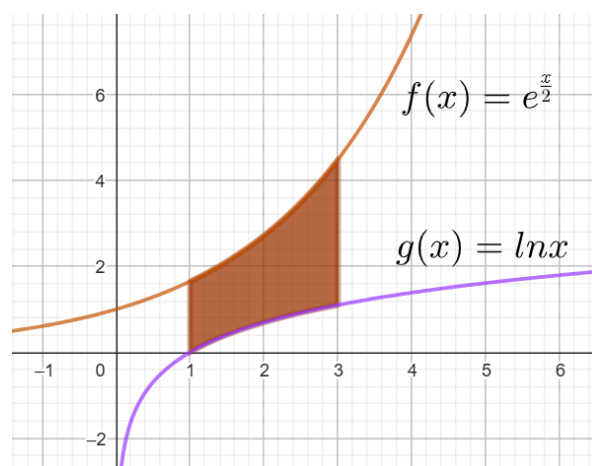
$$P(t) = 50 - 50 \cos\left(\frac{2\pi}{29,53}t\right) \text{ där } t \text{ är tiden i dagar från nymåne.}$$



- a) **Efter** hur många dagar från nymåne syns hela månen? Svara med en decimal. *Endast svar krävs.*
- b) **Under** hur många dagar syns månen mer än 80%? Svara med en decimal.

(2/1/0)

25. Nedan ser du graferna till funktionerna $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$ samt $g(x) = \ln x$. Bestäm arean av det markerade området nedan, svara med två decimaler.



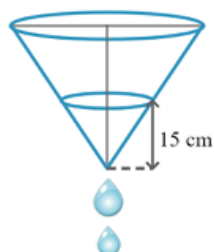
(2/0/0)

26. Den trigonometriska funktionen $T(t) = 4 \cos\left(\frac{\pi}{12}t + 4\right) + 24$ beskriver temperaturen en fin sommardag i Lund från kl 07.00 där t är tid i timmar.

- Bestäm vilken tid på dygnet det är som varmast respektive kallast på dagen.
- Bestäm vilken tid på dygnet temperaturen växer som mest.

(1/2/0)

27. En konisk behållare har spetsen nedåt och lika stor radie som höjd. Behållaren läcker med $300 \text{ cm}^3/\text{minut}$. Hur förändras vätskenivån i konen vid läget att höjden är 15 cm?



(0/3/0)

28. I ett naturområde går antalet lejon i tusental att beskriva med funktionen $L(t) = 9 + 6 \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)$ och antalet gnuer i tusental går att beskriva med funktionen $G(t) = 27 + 19 \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$ där t är antalet år från 2010.

Bestäm vilket år förhållandet mellan lejon och gnuer är som störst om vi ser 10 år framöver.

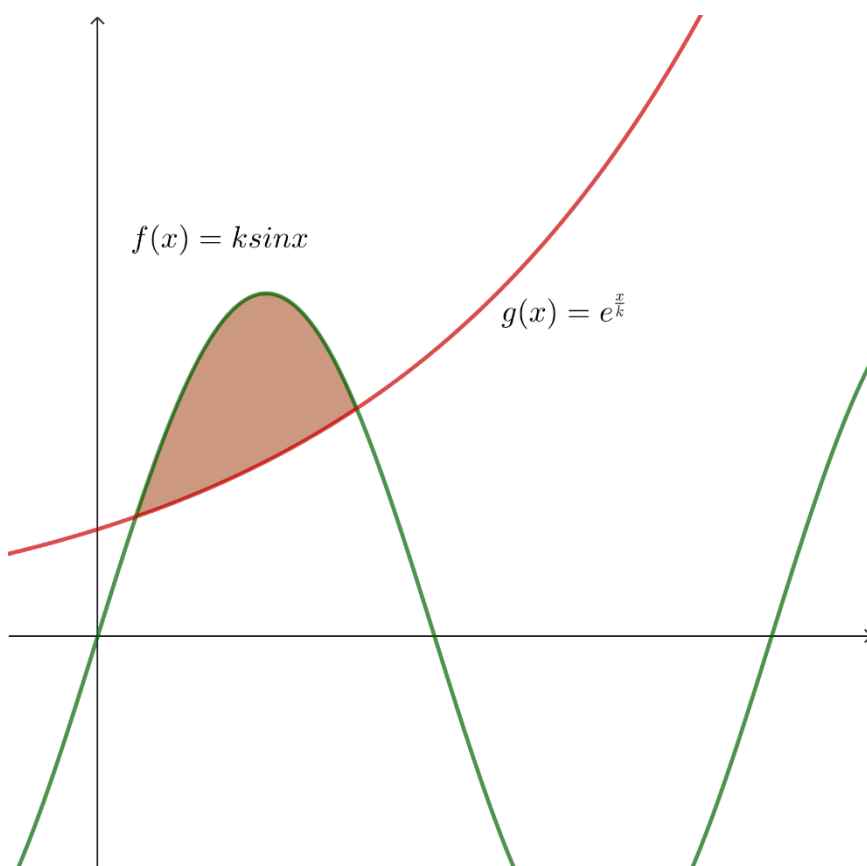
(0/2/0)

29. Vi definierar funktionen $f(x) = 1,76 \cos\left(\frac{x}{4,3} + 5\right) + 1$. Lös ekvationen $f(a+1) = f(2a)$ där a är det minsta positiva lösningen.

(0/2/0)

30. De två graferna skär varandra i $x = 0,36$ och $x = 2,41$. Den markerade arean är 2,16 areaenheter. Bestäm konstanten k . Svara med en decimal.

(0/3/0)



31. I en Jidesjön finns det två olika typer av fiskar. Finfisk och Godfisk.
Under de senaste 20 åren har respektive fisksort gått upp och ner enligt funktionerna nedan.

Finfisk: $F(t) = 500 + 200\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)$

Godfisk: $G(t) = 800 + 100\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ där $t = 0$ är starten på undersökningen

- a) Vilket/vilka år ökade den totala populationen av fisk med i sjön med 50 individer/år
- b) Mellan vilka år minskade den totala populationen av fiskar i sjön?

32. På grund av tidvatten kan vattendjupet variera kraftigt under dygnet.
Tidvattnet upprepar sig med en period på 12 timmar. På en viss plats ges vattendjupet av

$$D(t) = 4,8\sin(k(t + 3)) + 5,1$$

där t anges i timmar räknat från midnatt och $D(t)$ anges i meter.

- a) Vilket är det maximala vattendjupet?
- b) Ange konstanten k .
- c) Vid vilken tidpunkt ökar vattendjupet som snabbast?
- d) Ett fartyg har ett djupgående på 4 m (detta är avståndet från vattenlinjen till fartygets djupaste punkt). När kan fartyget passera utan att gå på grund?

(3/2/0)

33. Temperaturen i en pool varierar under dygnets timmar. Den högsta temperaturen för poolen är $32\text{ }^{\circ}\text{C}$ och den lägsta temperaturen är $24\text{ }^{\circ}\text{C}$, vilket den är klockan 04.00 på morgonen. Temperaturen under ett dygn kan beskrivas som en sinusfunktion på formen

$$T(x) = A \cdot \sin(B(x + C)) + D. \text{ Där } x \text{ är antalet timmar från } 00.00.$$

Bestäm konstanterna A, B, C och D (1/1/1)

34. En matematiker har tagit fram statistik för kommunen Joakimköping. Hon har dels tagit fram en funktion som visar på hur mycket skatt (i miljoner) kommunen kan ta in beroende på hur stor befolkningen b är i tusental $s(b) = 9,7\sqrt{0,5b}$. Samtidigt har hon tagit fram statistisk för den förväntade befolkningsförändringen de närmsta 15 åren som går att beskriva $b(t) = 35 + 3,5 \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 1,6t$ där t är antalet år från 2024.

- a) Bestäm vilket år skatteintäkterna överstiger 45 miljoner i Joakimköping.
b) Vilket/vilka år ökar skatteintäkterna med 0,91 miljoner per år i under de första 11 åren?

(0/0/2)

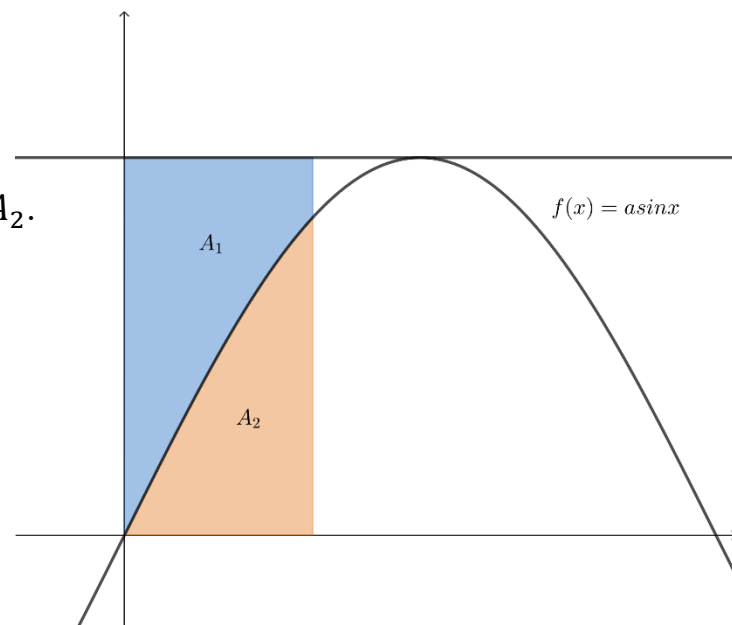
35. En isskulptur i form av ett klot smälter på ett sådant sätt att den hela tiden är ett klot. Volymen på klotet minskar med en konstant hastighet på 2π kubikmeter per timme. Med vilken hastighet förändras arean på klotet i det ögonblick då skulpturens radie är 5 meter?

(0/0/3)

36. Nedan ser du grafen till funktionen $f(x) = a \sin x$ och en linje som tangerar funktionens maximipunkt. Två areor är definierade som A_1 och A_2 . För vilket värde på x får vi likheten

$$\frac{A_1}{A_2} = 2$$

(0/0/3)



Övningsprov 2

1. a) $f(x) = \sin 3x$ b) $f(x) = x \cdot e^{2x}$ c) $f(x) = (4x+2)^5$
 $f'(x) = 3\cos 3x$ $f'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x}$ $f'(x) = 20(4x+2)^4$

d) $f(x) = \ln(\cos x)$ e) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ f) $f(x) = \cos^2(2x) - \sin^2(2x)$
 $f'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$ $= \frac{\sin 2x}{2}$ $= \cos 4x$
 $f'(x) = \cos 2x$ $f'(x) = -4\sin 4x$

g) $f(x) = e^{\sqrt{2x+1}}$
 $f'(x) = e^{\sqrt{2x+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$
 $= \frac{e^{\sqrt{2x+1}}}{\sqrt{2x+1}}$

2. a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(I) $x = 60^\circ + 360^\circ \cdot n$ (II) $x = 180^\circ - 60^\circ + 360^\circ \cdot n$
 $= 120^\circ + 360^\circ \cdot n$

b) $\cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $2x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot n$
 $x = \pm \frac{\pi}{8} + \pi \cdot n$

c) $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $x = 30^\circ + 180^\circ \cdot n$

d) $(\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{2}$

$\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{2}$

$1 + \sin 2x = \frac{1}{2}$ (I) $2x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi \cdot n$ (II) $2x = \pi - \frac{7\pi}{6} + 2\pi \cdot n$
 $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ $x = \frac{7\pi}{12} + \pi \cdot n$ $2x = \frac{-\pi}{6} + 2\pi \cdot n$
 $x = \frac{-\pi}{12} + \pi \cdot n$



e) $\sin x \cos(35^\circ) = 1 - \cos x \sin(35^\circ)$

Additions-formel $\sin x \cos(35^\circ) + \cos x \sin(35^\circ) = 1$

$\sin(x + 35^\circ) = 1$ $x + 35^\circ = 90^\circ + 360^\circ \cdot n$
 $x = 55^\circ + 360^\circ \cdot n$

$$3. a) \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = -(\cos(\pi/2)) - (-\cos(0)) = 1 + 1 = 2$$

$$b) \int_0^{2\pi} \cos 2x \, dx = \left[\frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{\sin(4\pi)}{2} - \frac{\sin(0)}{2} = 0$$

$$c) \int_1^{e^2} \frac{7}{x} \, dx = [7 \cdot \ln x]_1^{e^2} = 7 \cdot \ln e^2 - 7 \cdot \ln 1 = 14 - 0 = 14$$

$$d) \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \text{Skriv om } \sin^2 x \Rightarrow \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \\ \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} \\ = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} \right) dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi/2}{2} - \frac{\sin(\pi)}{4} - \left(\frac{0}{2} - \frac{\sin(0)}{4} \right) = \\ = \frac{\pi}{4}$$

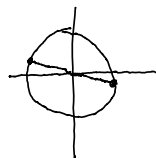
$$e) \int_0^{\pi/4} \tan^2 x \, dx \text{ Svårt att ta primitiv funktion. Notera att } f(x) = \tan x \\ f'(x) = \tan^2 x + 1 \\ = \int_0^{\pi/4} (\tan^2 x + 1 - 1) \, dx = [\tan x - x]_0^{\pi/4} = \tan(\pi/4) - \frac{\pi}{4} - (\tan(0) - 0) \text{ Vi kan skriva } \tan^2 x \text{ som } \\ = 1 - \frac{\pi}{4} \text{ Vi kan då få } \\ \text{från en primitiv funktion.}$$

$$4. a) \cos^2 x + \sin^2 x + \sin(315^\circ) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \quad b) \underbrace{1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{(\cos 2x) = \cos(2 \cdot \frac{\pi}{12})} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$c) \cos(73^\circ)\cos(13^\circ) + \sin(73^\circ)\sin(13^\circ) \\ \text{Substitutionsformeln för cos}$$

$$= \cos(73^\circ - 13^\circ) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$d) \cos(345^\circ) \cdot \sin(165^\circ) = \\ \left(\begin{array}{l} \cos(345^\circ) = \cos(15^\circ) \\ \sin(165^\circ) = \sin(15^\circ) \end{array} \right) \\ = \cos(15^\circ) \cdot \sin(15^\circ) = \frac{\sin(30^\circ)}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$



5. a) $x = -6$ $y = 3$ b) $x = \pm 2$ $y = x$ c) $x = a$ $x = -b$ $y = c$

6. $A = 2$ $B = 3$ $h = \frac{1}{2}$

7. $f(x) = \frac{e^x}{x}$ søk tangent; $x = 2$ $f'(x) = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2}$ $f'(2) = \frac{e^2}{4}$

$y = \frac{e^2}{4} x + m$ søk m $f(2) = y(2) = \frac{e^2}{2}$ $\frac{e^2}{2} = \frac{e^2}{4} \cdot 2 + m$

$y = \frac{e^2}{4} x$ svar: $y = \frac{e^2}{4} x$ $m = 0$

8. $\int_0^a f(x) dx - \int_0^a g(x) dx = 25$
 $\underbrace{\hspace{1cm}}_{=18}$

$-\int_0^a g(x) dx = 7$

$\int_0^a g(x) dx = -7$

svar: $\int_0^a g(x) dx = -7$

9. $f(x) = x \cdot e^{-\frac{x}{a}}$

$f'(x) = e^{-\frac{x}{a}} - \frac{x e^{-\frac{x}{a}}}{a}$

$f'(x) = 0$

$e^{-\frac{x}{a}} - \frac{x e^{-\frac{x}{a}}}{a} = 0$

$e^{-\frac{x}{a}} \left(1 - \frac{x}{a}\right) = 0$

Aldrig
null

$1 - \frac{x}{a} = 0$

$x = a$ V.S.V

10. Deriver $f(x) = \frac{1 - \cos 4x}{8}$

$f'(x) = \frac{\sin 4x}{2} = \frac{2 \sin 2x \cos 2x}{2}$

$= \sin 2x \cos 2x = g(x)$

V.S.V

11. $f(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x)$

$f'(x) = e^x (\sin x + \cos x) + e^x (\cos x - \sin x)$

$= e^x \sin x + e^x \cos x + e^x \cos x - e^x \sin x$

$= 2e^x \cos x$ $f'(x) = 0$ $2e^x \cos x = 0$ $2e^x$ aldrig null

$\cos x = 0$ første nullstørrelse
 d.ø $x = \frac{\pi}{2}$

y-koordinat $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = e^{\frac{\pi}{2}}$

undersøk karakter $f''(x) = 2e^x \cos x - 2e^x \sin x$

$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2e^{\frac{\pi}{2}}$ $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ maksimumpunkt!

$$12. \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \quad 1 + \frac{2}{1 - \tan^2 x} = \frac{2 \sin x}{\cos x} = \frac{2 \sin x}{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} =$$

$$= \frac{\frac{2 \sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2 \sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} =$$

$$= \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \tan 2x \quad \text{V.S.V}$$

13. $2 \sin(hx + v) + 1$ skriv om uttrycket till

$2 \sin(h(x + \frac{v}{h})) + 1$ h beror av perioden och $\frac{v}{h}$ kommer vara förskjutningen

$$\text{Perioden} = 2 \quad 2 = \frac{2\pi}{h} \quad h = \pi$$

Intervall är förskjuten åt höger med $-0,5$

$$\frac{v}{\pi} = -0,5 \quad \text{där: } h = \pi \quad v = -\frac{\pi}{2}$$

$$14. \sin 2x = \sin x$$

$$2 \sin x \cos x = \sin x$$

$$2 \sin x \cos x - \sin x = 0$$

$$\sin x (2 \cos x - 1) = 0$$

Nullproduktmetod

$$\sin x = 0$$

$$\text{I} \quad x = 2\pi \cdot n$$

$$\text{II} \quad x = \pi + 2\pi \cdot n$$

$$2 \cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} \pm 2\pi \cdot n$$

$$15. \int_0^1 e^x \sin^2 x \, dx + \int_0^1 e^x \cos^2 x \, dx = \int_0^1 e^x (\sin^2 x + \cos^2 x) \, dx =$$

$$= \int_0^1 e^x \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{=1} \, dx = \int_0^1 e^x \, dx = [e^x]_0^1 = e - 1$$

$$16. f(x) = e^{h(x)} \quad f'(x) = h'(x) \cdot e^{h(x)} \quad f'(1) = h'(1) \cdot e^{h(1)} = 3e^1 = 3e$$

tangent
 $T(x) = 3ex + m$

$$f(1) = e^{h(1)} = e$$

$$T(1) = e$$

$$3e + m = e$$

$$m = -2e$$

$$T(x) = 3ex - 2e$$

$$17. \int_1^a \frac{1}{x} \, dx = [\ln x]_1^a = \ln a$$

$$\int_b^a \frac{1}{x} \, dx = \frac{\ln a}{2} = [\ln x]_b^a = \ln a - \ln b$$

$$\ln a - \ln b = \frac{\ln a}{2}$$

$$\ln b = \frac{\ln a}{2}$$

$$\ln b = \ln a^{\frac{1}{2}} \quad \text{logarithmregel}$$

$$b = \sqrt{a} \quad \text{oder: } b = \sqrt{a}$$

$$18. a) f(x) = x^x = (e^{\ln x})^x = e^{\ln x \cdot x} \quad f'(x) = e^{\ln x \cdot x} \left(\frac{1}{x} \cdot x + \ln x \right) =$$

$$= e^{\ln x \cdot x} (1 + \ln x)$$

$$b) \sqrt[a]{a} = a^{\frac{1}{a}}$$

$$f(a) = a^{\frac{1}{a}} = (e^{\ln a})^{\frac{1}{a}} = e^{\frac{\ln a}{a}}$$

$$f'(a) = e^{\frac{\ln a}{a}} \cdot \left(\frac{\frac{1}{a} \cdot a - \ln a}{a^2} \right) = e^{\frac{\ln a}{a}} \left(\frac{1 - \ln a}{a^2} \right)$$

$$f'(a) = 0 \quad \text{Also: } \frac{\ln a}{a} \quad e^{\frac{\ln a}{a}} \left(\frac{1 - \ln a}{a^2} \right) = 0$$

$$\frac{1 - \ln a}{a^2} = 0$$

$$1 - \ln a = 0$$

$$a = e$$

$$\text{oder: } \text{Da } a = e$$

19. Vi antar att tangenten skär $f(x)$ i $x=a$

och $g(x)$ i $x=b$ Vi får $f'(a) = g'(b)$

$$f(x) = \sin x$$

$$f(x) = \cos x$$

$$g(x) = \sin(x+\pi) + \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$g(x) = \cos(x+\pi) = -\cos x$$

$$f'(a) = g'(b)$$

$$\cos a = -\cos(b) \text{ det } \pi \text{ sambandet}$$

$b = \pi + a$ se enhetscirkeln $b = \pi - a$ har
uteslutats enligt
bild

Vi kan nu bestämma
k-värdet med formeln

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(a) - g(a+\pi)}{a - (a+\pi)} = \frac{\sin(a) - (\sin(a+\pi) + \frac{\pi}{\sqrt{2}})}{-\pi}$$

$$= \frac{-\frac{\pi}{\sqrt{2}}}{-\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$k = f'(a) = \cos(a) \text{ enligt bild}$$

$$\text{Så då } \cos(a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad a = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Tangent: } y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + m \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} + m \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{4-\pi}{4\sqrt{2}}$$

$$m = \frac{4-\pi}{4\sqrt{2}}$$

Med miniräknare och GeoGebra

20. Använd GeoGebra

$$f(x) = 4 \sin x \quad f'(3) \approx -1,67$$

21. Använd GeoGebra

$$\int_0^2 e^x \cdot \sin x \, dx = 5,4$$

22. Vi söker $f'(2)$ eftersom det är tangentens lutning i $x=2$

$$f(x) = \cos 3x + e^{1,3x}$$

Bestämmer $f'(2)$ med GeoGebra

$$f'(2) = 18,34$$

$$23 \quad 4,5 \sin 2x = 3,7$$

$$\sin 2x = \frac{3,7}{4,5} \quad \sin^{-1}\left(\frac{3,7}{4,5}\right) \approx 0,97$$

$$\textcircled{I} \quad 2x = 0,97 + 2\pi \cdot n$$

$$x = 0,485 + \pi \cdot n$$

$$\textcircled{II} \quad 2x = \pi - 0,97 + 2\pi \cdot n$$

$$x = 1,08 + \pi \cdot n$$

24. a) Titta grafiskt

på probleml. Analysera grafen

a) 14,8 dagar

b) Undersök intervallet i vilket

$80 < P(t)$ Vi får då totalt

8,7 dagar.

25. Rita upp graferna i GeoGebra

och använd kommandot

Integrations

$$\int_1^9 f(x) - g(x) \, dx = 4,37$$

26. Skriv in funktionen

i GeoGebra och gör analysen

a) Lokalt minimipunkt

kl. 3.00

Varmest maximipunkt

kl. 15.00

b) Vi söker extrempunkterna för $T(t)$. Den ges ungefär

då kl. 9.00

27.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = 300$$

$$\text{Volym kon} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Vi vet att $r = h$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{dv}{dh}} = \frac{300}{\pi \cdot 15^2} \approx 0,42 \text{ cm/min}$$

$$V = \frac{\pi \cdot h^3}{3}$$

$$V' = \pi \cdot h^2 \quad \text{då } h = 15 \text{ ger}$$

$$V' = \pi \cdot 15^2$$

28 Förhållandet mellan lejon och gräns ges av

$$F(t) = \frac{L(t)}{G(t)} = \frac{7 + 6 \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)}{27 + (9 \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right))}$$

Undersök $F(t)$ i geogebra!

Vi söker en maxipunkt!

Svar: Efter 3,68 år är förhållandet som störst!

29. Skriv in funktionen $f(x) = 1,76 \cos\left(\frac{x}{4,3} + 5\right) + 1$ i geogebraDefiniera sedan två nya funktioner $f(x+1)$ och $f(2x)$.Undersök sedan för vilket x $f(x+1) = f(2x)$ grafiskt.Svar: Det sker då $x = 1$, det är den första lösningen för $0 < x$ 30. Rita upp funktionerna i geogebra med konstanten k

Vi söker $\int_{0,36}^{2,41} k \sin x - e^{\frac{x}{2}} dx = 2,16$. Använd geogebra's funktion integral mellan. Justera sedan konstanten k som en glidare tills vi har den önskade arean. Alternativt lös ekvationen som uppstår.

Svar:

$$k = 3,2$$

31 a) konstruera en funktion för den totala populationen

$T(t) = F(t) + G(t)$ Vi söker $T'(t) = 50$. lös ekvationen grafiskt eller med lös-funktionen svar: $x_1 = 1,9$ $x_2 = 9$ $x_3 = 13,3$

b) undersök då $T'(t) < 0$. samma igen

undersök grafiskt vi får då $2,1 < x < 8,1$ och $14,1 < x < 20$

32. a) Då uttrycket är som störst $4,8 + 51 = 55,8$

b) Perioden är 12 timmar $k = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ svar: $\frac{\pi}{6}$

c) Använd grafiska och undersök extrempunkterna för $D'(t)$. Det sker då t är 9.00 och 21.00

d) Undersök då $4 < D(t)$. Vi får då olika intervall

00.00 - 3.30, 8.30 - 15.30, 20.30 - 24.00

33. Amplituden = $\frac{\text{största-minsta}}{2} = \frac{32-24}{2} = 4$

$A = 4$ $D = 28$ (förskjutning i x) B är perioden

förskjutningen i x

minimipunkt då $x = 4$

C är antalet timmar

Vi vill förskjuta $C = -10$

eller $C = 14$

$$P = \frac{2\pi}{B}$$

$$P = 24$$

$$24 = \frac{2\pi}{B}$$

$$B = \frac{\pi}{12}$$

$$\text{Svar: } 4 \sin\left(\frac{\pi}{12}(x-10)\right) + 28$$

34. Vi söker $S(b(t)) = 9,7 \sqrt{25(35 + 3,5 \sin(\frac{\pi t}{6}) + 1,6t)}$

Släng in funktionen i geogebrä och undersök för vilket värde $S(b(t)) = 45$. Slutsatsen är att då $t = 2,85$ vilket är år 2027. Svar: 2027.

b) Undersök $S'(b(t))$ och bestäm vilket eller vilka t då $S'(b(t)) = 0,91$ det är då $t_1 = 2,85$ och $t_2 = 9,21$ Svar: 2027 och 2032

35. Vi kommer behöva två förändrings

-ekvationer

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} \quad V(r) = \frac{4\pi \cdot r^3}{3}$$

$$A(r) = 4\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$V'(r) = \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

$$A'(r) = \frac{dA}{dr} = 8\pi r$$

$$\text{Vi vill veta } \frac{dr}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\frac{dV}{dr}} \quad \frac{dV}{dt} = 2\pi$$

$$\frac{dV}{dr} \text{ då } r = 5 \text{ är } 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{-2\pi}{100\pi} = -\frac{1}{50}$$

$$\text{Vi vill nu ha } \frac{dA}{dr} = A'(5) = 8 \cdot \pi \cdot 5 = 40\pi \quad \frac{dA}{dt} = 40 \cdot \pi \cdot -\frac{1}{50}$$

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{4\pi}{5}$$

3b. Vi vill konstruera två uttryck för areorna

$$A_2 = \int_0^t a \sin x \, dx = [-a \cos x]_0^t = -a \cos t - (-a \cos(0)) = -a \cos t + a$$

$$A_1 = \int_0^t a - a \sin x \, dx = [ax + a \cos x]_0^t = at + a \cos t - (0 + a \cos(0))$$
$$= at + a \cos t - a.$$

$$\frac{A_1}{A_2} = 2 = \frac{at + a \cos t - a}{-a \cos t + a} = \frac{a(t + \cos t - 1)}{a(-\cos t + 1)} = \frac{t + \cos t - 1}{-\cos t + 1}$$

lös emvationen $\frac{t + \cos t - 1}{-\cos t + 1} = 2$ grafiskt eller med
lös-funktioner

$$x = 0,69$$

$$\text{Svar: } x = 0,69$$