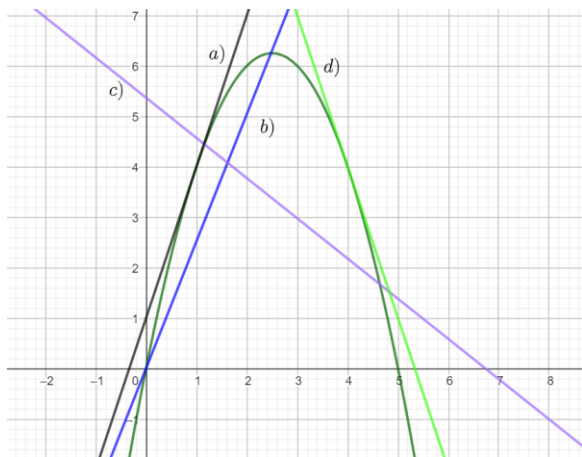


Övningsprov 1

1. Bestäm vilka räta linjer som är sekant respektive tangenter för följande bild



(3/0/0)

2. Lös ekvationerna

a) $x^3 - 10x^2 + 16x = 0$

b) $(x^2 - 4)(x + 1) = 0$

c) $|y| = 7$

d) $|y - 3| = -1$

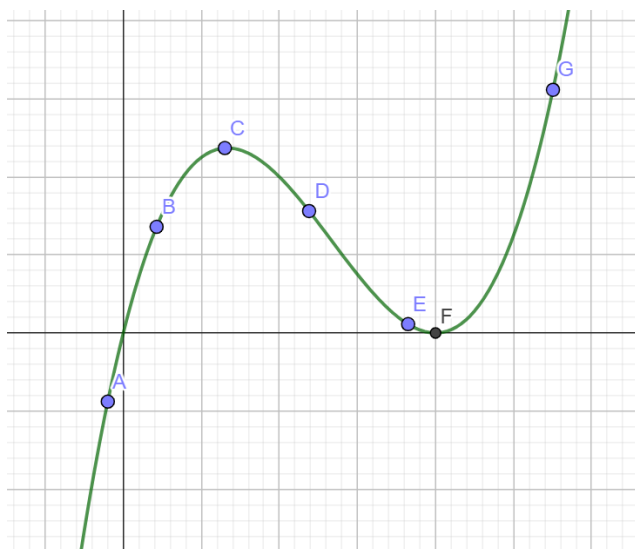
e) $|2x - 5| = x + 1$

f) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

g) $(\sqrt{x+1})^3 - 2(\sqrt{x+1})^2 + \sqrt{x+1} = 0$

(4/4/2)

3. Joakim har placerat ut ett antal punkter på grafen till funktionen $f(x)$. Bestäm för vilka punkter som $f'(x)$ är större, mindre eller lika med noll.



(2/0/0)

4. Skriv följande uttryck i faktorform

a) $4x^2 - 16$

b) $x^2 - 2x - 8$

c) $2x^2 + 8x + 8$

d) $x^3 - 18x^2 + 81x$

e) $(x - 2)^3 + 8(x - 2)^2 - 9(x - 2)$

(3/3/2)

5. Bestäm gränsvärdet

a) $\lim_{x \rightarrow -2} 3x + 6$

b) $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^2 - 20x + 100}{x^2 - 100}$

c) $\lim_{h \rightarrow \infty} 3 + \frac{h}{h^2} + h^{-3}$

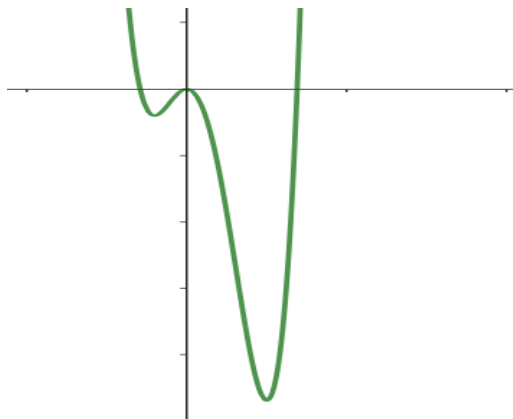
d) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{7t - 12}{3t + 120}$

(1/2/2)

6. Bestäm medellutningen i intervallet $0 < x < 3$ för funktionen $f(x) = x^2$

(2/0/0)

7. Nedan ser du funktionen $f(x)$ hur många lösningar har ekvationen $f'(x) = 0$ och $f(x) = 0$



(1/1/0)

8. För vilka värden är det rationella uttrycket odefinierat?

a) $\frac{2x+1}{x^2-16}$

b) $\frac{x+143}{(x+1)(x-10)}$

(2/0/0)

9. Förenkla de rationella uttrycken

a) $\frac{2x^2+4x}{x}$

b) $\frac{2x^2+4x+2}{5x+5}$

c) $\frac{x^3-9x}{x^2-3x}$

d) $\frac{x^2-y^2}{y-x}$

e) $\frac{x^2+2x-15}{x^2-25}$

(3/3/0)

10. Lös följande ekvationer

a) $\frac{6}{x-3} - \frac{18}{x^2-3x} = 2$

b) $\frac{x}{x-2} - \frac{2}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$

(2/3/0)

11. Joakim påstår att följande uttryck $\left(\frac{x-y}{y-x}\right)^4$ går att förenkla till 1. Undersök om han har rätt.

(0/1/0)

12. Bestäm $f'(1)$ för funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ med hjälp av derivatans definition

(0/2/1)

13. Observera grafen till funktionen $f(x)$ nedan

a) Bestäm funktionens nollställen

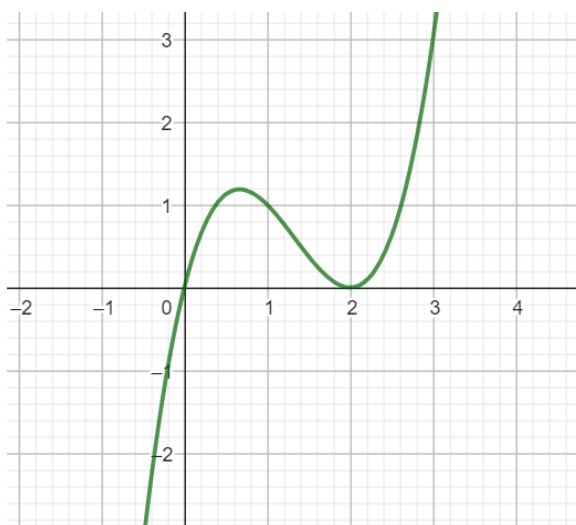
b) Bestäm $f'(2)$

c) Vilken av följande funktionsekvationer kan funktionen ha? *Ni får bara titta på ekvationerna inte räkna på något.*

A: $f(x) = x(x+2)^2$ B: $f(x) = x(x-2)(x+2)$ C: $f(x) = x(x-2)^2$

d) Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$



(2/2/0)

14. Ställ upp vilket gränsvärde du ska lösa för att bestämma derivatan för funktionen med hjälp av derivatans definition. *Notera du behöver inte lösa gränsvärdet bara ställa upp gränsvärdet*

a) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

b) $f(x) = \sqrt{2x+1}$

(0/2/0)

15. Funktionen $f(x) = x^2 + x$ har en medellutning på 7 i intervallet $a \leq x \leq a + 2$.
Bestäm värdet på a

(0/2/0)

16. Visa att medellutningen för funktionen $f(x) = x^2 + c$ i intervallet $0 < x < a$ alltid kommer vara a

(0/1/1)

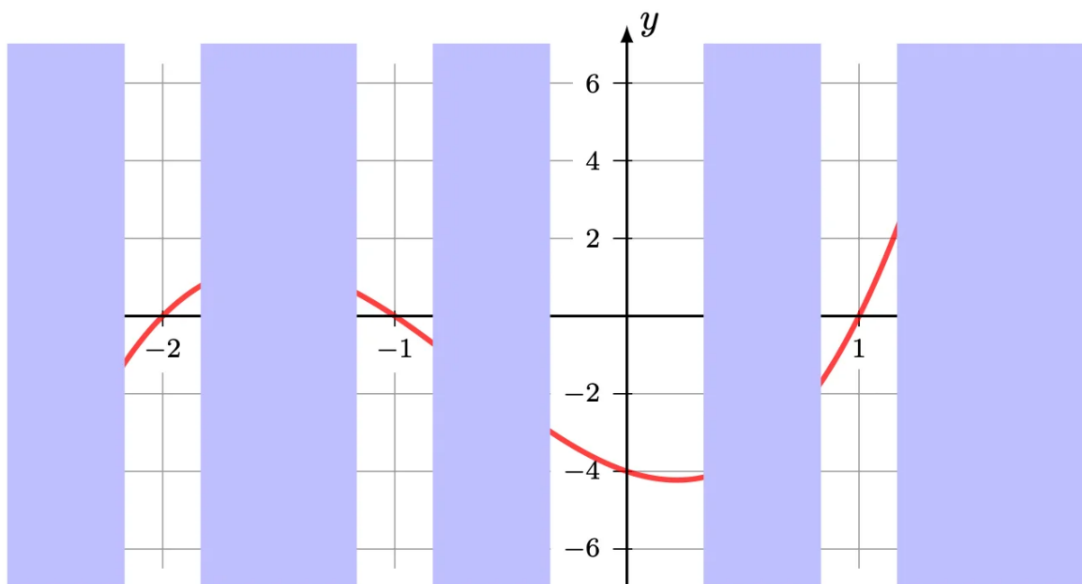
17. För en andragsradsfunktion $f(x)$ vet du följande

- $f'(6) = 0$
- $f'(2) = 3$
- $f(2) = 0$

Bestäm ekvationen på den tangent som tangerar $f(x)$ i $x = 10$

(0/1/2)

18. Joakim har hittat grafen till en tredjegradsfunktion $f(x)$ Tyvärr är hans dator trasig och han kan inte se hela grafen bara vissa delar. Joakim vill bestämma $f(2)$. Hjälp honom med det.



(0/0/2)

19. En sekant skär en andragsradsfunktion på formen $f(x) = ax^2 + bx + c$ i x_1 och x_2 .
Visa att k -värdet på den sekanten alltid kommer kunna skrivas som

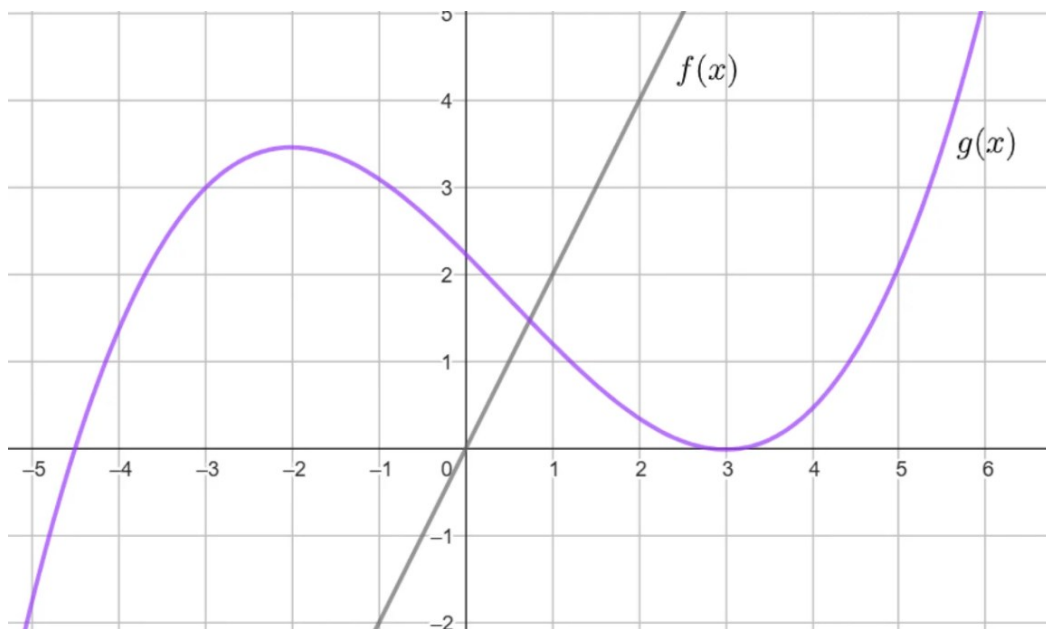
$$k = a(x_1 + x_2) + b$$

(0/0/2)

20. Bestäm $f'(x)$ för funktionen $f(x) = \frac{x^2}{a}$ där a är en konstant med hjälp av derivatans definition

(0/2/1)

21. Nedan ser du graferna till funktionerna $f(x)$ och $g(x)$. Om vi definierar funktionen $h(x) = f(x) + g(x)$ bestäm då för vilka x följande olikhet gäller $h'(x) < 2$



(0/0/2)

22. Visa att följande ekvation har samma lösningar med avseende på x oavsett vilket heltal n är om $n > 1$

$$(x - 4)^{n+2} - (x - 4)^n = 0$$

(0/0/2)

23. Visa att följande uttryck är oberoende av konstanterna a och b .

$$\frac{ax + b}{a - b} + \frac{bx + a}{b - a}$$

(0/0/2)

24. Visa att $f'(x) = 2g'(x) \cdot g(x)$ för funktionen $f(x) = (g(x))^2$ med hjälp av derivatans definition

(0/0/3)

Övningsprov 1

1. Skriv: c, b) Tangent: a) d,

2. a) $x^3 - 10x^2 + 16x = 0$

b) $(x^2 - 4)(x + 1) = 0$

$x(x^2 - 10x + 16) = 0 \quad x_1 = 0$

$x^2 - 4 = 0 \quad x_1 = 2$
 $x_2 = -2$

$x^2 - 10x + 16 = 0$

$x + 1 = 0 \quad x_0 = -1$

$x = 5 \pm \sqrt{25 - 16}$

c) $|y| = 7 \quad y = \pm 7$

$= 5 \pm \sqrt{9}$

$= 5 \pm 3$

d) Absolutbelopp kan inte bli neg.
Solutor lösningar

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 8 \\ x_3 = 2 \end{cases}$

e) $|2x - 5| = x + 1$ två fall antingen plus eller minus

f) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

(I) $2x - 5 = x + 1 \quad x = 6$
(II) $2x - 5 = -(x + 1)$
 $2x - 5 = -x - 1$
 $3x = 4$
 $x = \frac{4}{3}$

$x^2 = t \quad t^2 - 10t + 9 = 0$

$t = 5 \pm \sqrt{25 - 9}$

$= 5 \pm \sqrt{16} \quad t_1 = 9$

$= 5 \pm 4 \quad t_2 = 1$

$x^2 = 9 \quad x_{1,2} = \pm 3$

$x^2 = 1 \quad x_{3,4} = \pm 1$

g) $(\sqrt{x+1})^3 - 2(\sqrt{x+1})^2 + \sqrt{x+1} = 0$

$t = \sqrt{x+1} \quad t^3 - 2t^2 + t = 0$

$t(t-1)^2 = 0 \quad t_1 = 0$
 $t_2 = 1$

$\sqrt{x+1} = 0 \quad x = -1$

$\sqrt{x+1} = 1 \quad x = 0$

$$3. f'(x) > 0 \quad A, B, C$$

$$f'(x) = 0 \quad C, F$$

$$f'(x) < 0 \quad D, F$$

$$C, 2x^2 + 8x + 8$$

$$2(x+2)^2$$

$$e, (x-2)^3 + 8(x-2)^2 - 9(x-2)$$

$$(x-2)((x-2)^2 + 8(x-2) - 9)$$

$$\text{Sätt } (x-2) = t$$

$$t(t^2 + 8t - 9) \text{ ta fram } \\ \text{nollställen}$$

$$t^2 + 8t - 9 = 0$$

$$t = 4 \pm \sqrt{16 + 9}$$

$$= -4 \pm \sqrt{25}$$

$$= -4 \pm 5$$

tankeform

$$t_1 = 1 \quad t(t-1)(t+9)$$

$$t+2-9 = (x-2)(x-3)(x+7)$$

↑
Svar

$$4. a) 4x^2 - 16 = (2x+4)(2x-4)$$

$$b) x^2 - 2x - 8 \text{ ta fram nollställen}$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x = 1 \pm \sqrt{9}$$

$$= 1 \pm 3 \quad x_1 = 4$$

$$x_2 = -2$$

$$\text{Svar: } (x-4)(x+2)$$

$$d) x^3 - 16x^2 + 81x = x(x^2 - 16x + 81)$$

$$= x(x-9)^2$$

$$5. a) \lim_{x \rightarrow -2} 3x + 6 = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 20x + 100}{x^2 - 100} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-10)^2}{(x+10)(x-10)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-10}{x+10} = 0$$

$$c) \lim_{h \rightarrow \infty} 3 + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^3} = \lim_{h \rightarrow \infty} 3 + \frac{1}{h} + \frac{1}{h^3}$$

$\frac{1}{h}$ och $\frac{1}{h^3}$ försummas då $h \rightarrow \infty$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} 3 + \frac{1}{h} + \frac{1}{h^3} = 3$$

$$d) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{7t-12}{3t+120} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t(7 - \frac{12}{t})}{t(3 + \frac{120}{t})} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{7 - \frac{12}{t}}{3 + \frac{120}{t}} \quad \frac{12}{t} \text{ och } \frac{120}{t} \text{ försummas} \\ \text{då } t \rightarrow \infty$$

$$= \frac{7}{3}$$

6. Ställ upp förändringskvot
 medelrutning = $\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{9^2 - 0^2}{3} = 3$ svar: medelrutningen är 3

7. $f'(x) = 0$ har tre lösningar
 $f(x) = 0$ har tre lösningar

8. a) 0 definierat de nämnaren är lika med 0

$x^2 - 16 = 0$ b) $(x+1)(x-10) = 0$
 $x = \pm 4$ $x_1 = -1$ $x_2 = 10$

a) $\frac{2x^2 + 4x}{x} = \frac{x(2x+4)}{x} = 2x+4$

b) $\frac{2x^2 + 4x + 2}{5x+5} = \frac{2(x^2 + 2x + 1)}{5(x+1)} = \frac{2(x+1)^2}{5(x+1)} = \frac{2x+2}{5}$

c) $\frac{x^3 - 9x}{x^2 - 3x} = \frac{x(x^2 - 9)}{x(x-3)} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)} = x+3$

d) $\frac{x^2 - y^2}{y-x} = \frac{(x+y)(x-y)}{y-x} = \left[\frac{\text{faktoriserar } -1}{\text{ur } (x-y)} \right] = \frac{-(y-x)(x+y)}{y-x} =$

$= -(x+y) = -x-y$

e) $\frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 25} = \frac{\text{faktoriserar taljämnaren}}{(x+5)(x-5)} = \frac{x-3}{x-5}$
 $x^2 + 2x - 15 = 0$
 $x = -1 \pm \sqrt{16}$
 $= -1 \pm 4$ $x_1 = -5$
 $x_2 = 3$
 $(x+5)(x-3)$

$$10. a) \frac{6}{x-3} - \frac{18}{x^2-3x} = 2$$

$$b) \frac{x}{x-2} - \frac{2}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$$

$$\frac{6x}{x^2-3x} - \frac{18}{x^2-3x} = 2$$

$$\frac{x(x+2)}{x^2-4} - \frac{2(x-2)}{x^2-4} = \frac{8}{x^2-4}$$

$$\frac{6x-18}{x^2-3x} = 2$$

$$\frac{x^2+2x-2x+4}{x^2-4} = \frac{8}{x^2-4}$$

$$2x^2-6x = 6x-18$$

$$x^2-6x+9=0$$

$$x^2+4=8$$

$$x^2=4$$

$$x=\pm 2$$

$$(x-3)^2=0$$

$$x=3$$

Notera! Uttrycket
är odefinierat
då $x=3$ emvaktens
soluter lösningar

Notera! Uttrycket är odefinierat
då $x=\pm 2$ emvaktens
lösningar

$$11. \left(\frac{x-y}{y-x}\right)^4 = \left(\frac{-1(y-x)}{y-x}\right)^4 = (-1)^4 = 1 \text{ kan här rätt?}$$

$$12. f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+h} - \frac{1}{1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - (1+h)}{1+h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{1+h} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{1+h} = -1 \quad f'(1) = -1$$

13. a) $x_1=0$ $x_2=2$ b) $f'(2)=0$ c) C: d) Det är derivatans
definition

$$f'(2)=0$$

14. a) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}{h}$

b) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2(x+h)+1} - \sqrt{2x+1}}{h}$

15. Ställ upp ändringskvot för medellutningen för 7
 medellutning = $\frac{f(a+2) - f(a)}{a+2 - a} = \frac{(a+2)^2 + a+2 - (a^2 + a)}{2} = 7$

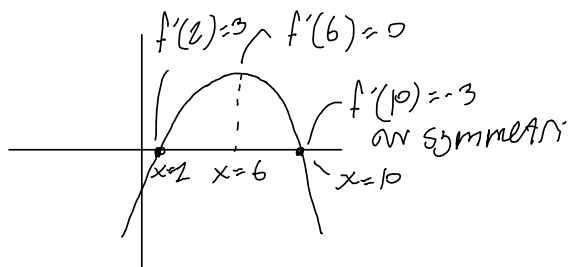
$$\frac{a^2 + 4a + 4 + a + 2 - a^2 - a}{2} = 7 \quad | \cdot 2$$

$$\begin{aligned} 4a + 6 &= 14 \\ 4a &= 8 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

16. $f(x) = x^2 + c$ medellutning i intervallet $0 < x < a$

$$\frac{f(a) - f(0)}{a} = \frac{a^2 + c - (0^2 + c)}{a} = \frac{a^2 + c - c}{a} = a \quad \text{V.S.V alltid medellutning } a$$

17.



tangenter

$$y = kx + m \quad k = f'(10) = -3$$

$$y = -3x + m \quad \text{sätt in}$$

gemensamt punkt.

$$(10, 0) \quad 0 = -3 \cdot 10 + m$$

$$m = 30$$

$$y = -3x + 30$$

$$\text{Svar: } y = -3x + 30$$

18. skriv på faktorform $f(x) = k(x-a)(x-b)(x-c)$
 noderne: $x = -2, x = -1, x = 1$ och $f(0) = -4$

$$f(x) = k(x+2)(x+1)(x-1)$$

$$f(0) = -4$$

$$k \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-1) = -4$$

$$k = 2$$

$$f(x) = 2(x+2)(x+1)(x-1)$$

$$f'(2) = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 24$$

$$\text{Svar: } f'(2) = 24$$

$$19. \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{ax_1^2 + bx_1 + c - (ax_2^2 + bx_2 + c)}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{ax_1^2 + bx_1 + c - ax_2^2 - bx_2 - c}{x_1 - x_2} = \frac{a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} =$$

$$= \frac{a(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + b(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{a(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} + \frac{b(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$= a(x_1 + x_2) + b \quad \text{V.S. } \checkmark$$

$$20. f(x) = \frac{x^2}{a} \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(x+h)^2}{a} - \frac{x^2}{a}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2 + 2xh + h^2}{a} - \frac{x^2}{a}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{a}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{ah}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{ah} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x + h}{a} = \frac{2x}{a} \quad f'(x) = \frac{2x}{a}$$

21. $f(x)$ har en konstant lutning på 2

$f'(x)=2$ om vi ser $h'(x)<2$ måste

$g'(x)<0$ vilket $g(x)$ är mellan $-2<x<3$

Svar: $-2<x<3$

$$22. (x-4)^{n+2} - (x-4)^n = 0$$

$$(x-4)^2(x-4)^n - (x-4)^n = 0$$

$$\underbrace{(x-4)^n}_{x=4} (\underbrace{(x-4)^2 - 1}_{=0}) = 0$$

$$(x-4)^2 - 1 = 0$$

$$(x-4)^2 = 1$$

$$x-4 = \pm 1$$

$$x_1 = 5$$

$$x_3 = 3$$

Svar: Ekvationer

har alltid lösningarna

$$x_1 = 4, x_2 = 5, x_3 = 3$$

$$23. \frac{ax+b}{a-b} + \frac{bx+a}{b-a}$$

$$= \frac{ax+b}{a-b} + \frac{bx+a}{-(a-b)}$$

$$= \frac{ax+b}{a-b} - \frac{bx+a}{a-b} = \frac{ax+b-(bx+a)}{a-b}$$

$$= \frac{ax+b-bx-a}{a-b} = \frac{ax-bx-a+b}{a-b}$$

$$= \frac{ax-bx}{a-b} - \frac{(a-b)}{a-b} = x-1$$

$$24. f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(g(x+h))^2 - (g(x))^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(g(x+h) - g(x))(g(x+h) + g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{g'(x) \text{ då } h \rightarrow 0} \cdot \underbrace{(g(x+h) + g(x))}_{2g(x) \text{ då } h \rightarrow 0}$$

$$= g'(x) \cdot 2g(x) = 2g'(x) \cdot g(x) \quad \text{v.s.v}$$