Övningsprov Ma4 – Kap 1-3

1. Bestäm samtliga lösningar till följande ekvationer. Svara i radianer

a) $sinx = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $2cos2x = 1$

c) $tanx = \sqrt{3}$ (4/1/0)

2. Derivera följande funktioner

a) $f(x) = cosx + 2$

b) $f(x) = sin2x$

c) $h(x) = 2lnx$

d) $f(x) = \frac{x}{x-1}$

e) $f(x) = \sqrt{2x+1}$

f) $g(x) = \cos^2 x$ (5/2/0)

3. Bestäm integralerna

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinx\, dx$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} 2cosx\, dx$

c) $\int_1^e \frac{1}{x}\, dx$ (5/1/0)

4. Bestäm ett exakt värde för följande uttryck

a) $sin(2\pi)$

b) $cos^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) + sin^2\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

c) $cos(930°)$

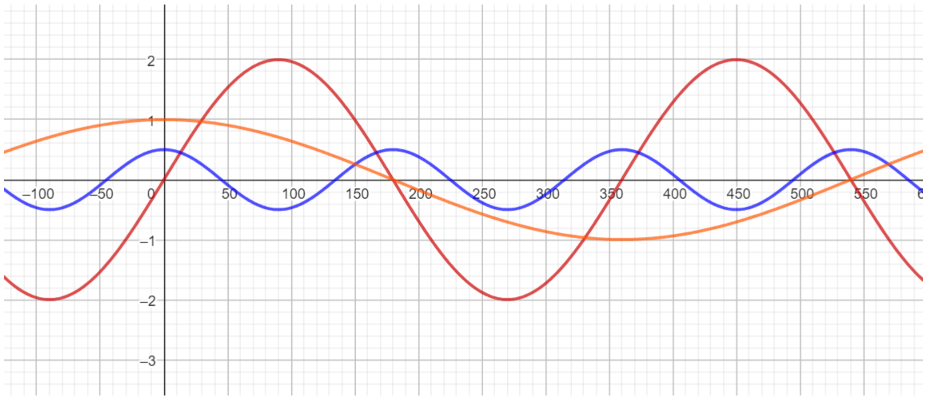
d) $cos^2(75°) - sin^2(255°)$ (2/1/2)

5. Para ihop funktionsuttrycket med rätt graf

$f(x) = 2sinx$

$g(x) = \frac{1}{2}cos2x$

$h(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$



(3/0/0)

6. Joakim menar att funktionen $f(x) = x \cdot e^{-2x}$ saknar extrempunkter. Undersök om han har rätt.

(2/1/0)

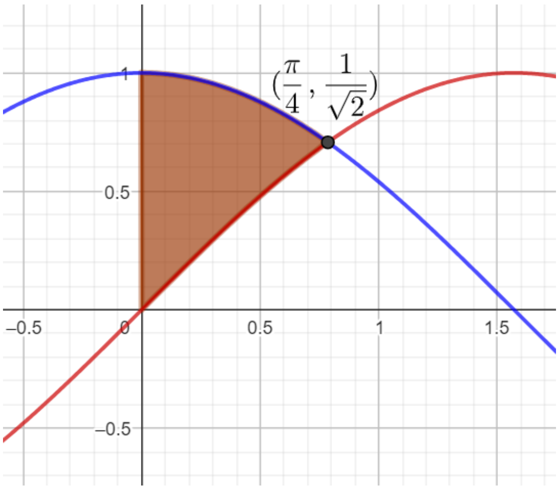
7. Vi definierar funktionerna $f(x) = asinx + bcosx$ och $g(x) = asinx - bcosx$. Du vet att $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ samt att $g(0) = 2$. Bestäm konstanterna a och b.

(1/1/0)

8. Bestäm den räta linjen som tangerar funktionen $f(x) = sin2x$ i punkten $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

(2/1/0)

9. Bestäm den markerade arean nedan. Den ena funktionen är $f(x) = sinx$ och den andra funktionen är $g(x) = cosx$. Svara exakt.



(2/0/0)

10. För vilket värde på x har funktionen $f(x) = x \cdot e^x$ en extrempunkt?

(2/0/0)

11. Joakim menar om man ändrar amplituden med en viss faktor på funktionen $f(x) = sinx$ och räknar ut arean med gränserna från $x = 0$ till $x = \pi$ kommer arean under grafen öka med samma faktor förutsatt att faktorn är större än noll.

    a) Undersök om det stämmer om vi ökar amplituden med 2

    b) Undersök om det stämmer om vi ökar amplituden med a

(2/2/0)

12. Lös ekvationen $sinxcosx = \frac{1}{4}$ (1/1/0)

13. Bestäm samtliga primitiva funktioner till $f(x) = cos2x + e^{2x}$

(2/0/0)

14. Joakim vill att integralen $\int_a^b sinx + c\, dx$ alltid ska vara större eller lika med noll. För vilka värden på c kommer det fungera?

(1/1/0)

15. För vilka värden inom intervallet $0 < x < 2\pi$ är $f(x) = \sin^3 x$ avtagande?

(0/2/0)

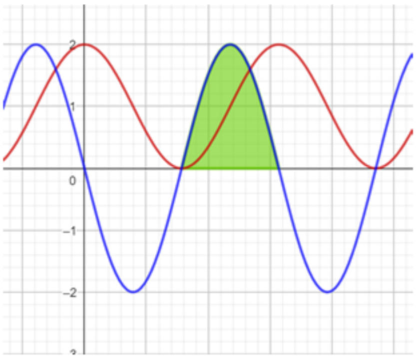
16. Bestäm samtliga primitiva funktioner till $f(x) = \sin^2 2x$

(0/2/0)

17. Bestäm samtliga möjliga värdet på talet k om $\int_0^{\frac{\pi}{2}} k \cdot coskx\, dx = 1$

(0/2/0)

18. Nedan ser du två funktioner där den ena är en derivatafunktion och den andra ursprungsfunktionen. Bestäm den gröna arean.



(0/0/1)

19. Bestäm samtliga asymptoter till följande funktioner

a) $f(x) = \frac{1}{x} + 3$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2-4} + x$

c) $f(x) = \frac{1}{(x-a)(x+b)} + c$ (2/2/1)

20. Pelle påstår att funktionen $f(x) = \sin(x^2)$ har primitiv funktion $F(x) = \frac{\sin(x^2)}{2x}$, Joakim håller inte med. Visa vem som har rätt.

(1/1/0)

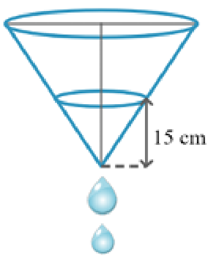
21. Skriv $\frac{2\pi}{9}$ radianer i grader. Svara exakt. (0/1/0)

22. Visa att $\cos^4 x - \sin^4 x = cos2x$

(0/2/0)

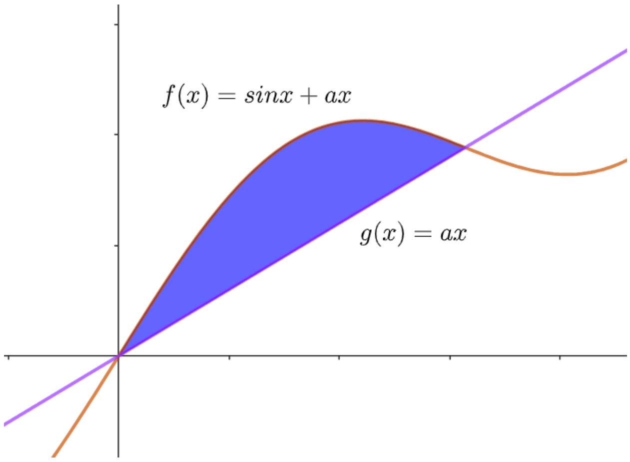
23. Lös ekvationen $sinx + cosx = 1$ (0/2/0)

24. En konisk behållare har spetsen nedåt och lika stor radie som höjd. Behållaren läcker med 300 $cm^3/minut$. Hur förändras vätskenivån i konen vid läget att höjden är 15 cm?



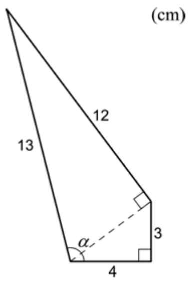
(0/3/0)

25. Nedan ser du funktionerna $f(x) = sinx + ax$ och $g(x) = ax$ där $a > 0$. Visa att den blåmarkerade arean är konstant oavsett värde på a



(0/1/1)

26. Nedan visas en fyrhörning och en definierad vinkel. Bestäm $sina$



(0/0/2)

27. Bestäm värdet av integralen

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 x$$

(0/0/2)

28. Vi definierar funktionen $h(x) = \left(f(x)\right)^2 + \left(g(x)\right)^2$

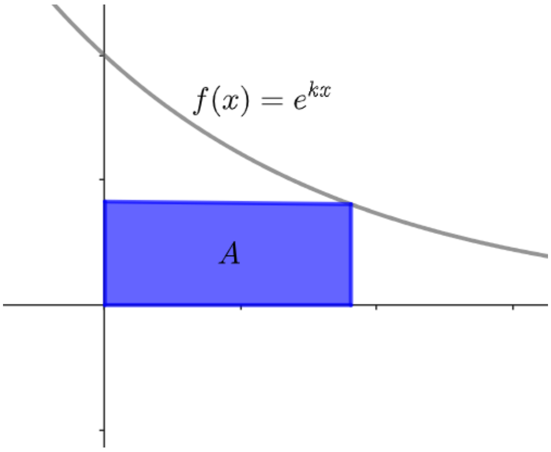
Du vet att

- $f'(x) = g(x)$
- $g'(x) = -f(x)$
- $h\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{2}$

Bestäm $h\left(\frac{1}{2}\right)$ (0/0/2)

29. Bestäm ett exakt värde för $tan 15°$ (0/0/2)

30. Under kurvan till $f(x) = e^{kx}$ placeras en rektangel som avgränsas av de positiva axlarna. För vilket värde på k är den största möjliga arean på rektangeln en kvadrat?



(0/0/3)

Lösningsförslag övningsprov 1.

1. a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ I $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot n$ II $x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot n$
$= \frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot n$

b) $2\cos 2x = 1$
$\cos 2x = \frac{1}{2}$ $2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot n$
$x = \pm \frac{\pi}{6} \pm \pi \cdot n$

c) $\tan x = \sqrt{3}$ $x = \frac{\pi}{3} + \pi \cdot n$

2. a) $f(x) = \cos x + 2$
$f'(x) = -\sin x$

b) $f(x) = \sin 2x$
$f'(x) = 2\cos 2x$

c) $f(x) = 2 \cdot \ln x$
$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$

d) $f(x) = \frac{x}{x-1}$
$f'(x) = \frac{x-1-x}{(x-1)^2}$
$= \frac{-1}{(x-1)^2}$

e) $f(x) = \sqrt{2x+1} = (2x+1)^{\frac{1}{2}}$
$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2x+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

f) $g(x) = \cos^2 x$
$g'(x) = 2 \cdot -\sin x \cdot \cos x = -2\sin x \cos x = \underbrace{-\sin 2x}_{\text{om man vill!}}$

3. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi/2} = -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 1$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} 2\cos x \, dx = \left[2\sin x\right]_{-\pi}^{\pi} = 2\sin\pi - 2\sin(-\pi) = 0$

c) $\int_1^e \frac{1}{x} \, dx = \left[\ln x\right]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$

4. a) $\sin(2\pi)=0$ b) $\underbrace{\cos^2\left(\frac{4\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{4\pi}{5}\right)}_{\text{trig. etta}}=1$

c) $\cos(930^\circ)=\cos(\underset{\text{två varv}}{720^\circ}+210^\circ)=$

$=\cos(210^\circ)=\frac{-\sqrt{3}}{2}$

d) $\cos^2(75^\circ)-\sin^2(255^\circ)$

$=\cos^2(75^\circ)-\sin^2(180+75^\circ)=\cos^2(75^\circ)-(-\sin(75^\circ))^2$

$=\cos^2(75^\circ)-\sin^2(75^\circ)=\cos(2\cdot 75^\circ)=\cos(150^\circ)$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. $f(x)$ - Röd

$g(x)$ - Blå

$h(x)$ - orange

6. $f(x)=x\cdot e^{-2x}$

$f'(x)=e^{-2x}-2xe^{-2x}$

$f'(x)=0$

$e^{-2x}-2xe^{-2x}=0$

$e^{-2x}(1-2x)=0$

$x=\frac{1}{2}$ funktionen har en extrempunkt!

7. $f(x)=a\sin x+b\cos x$

$g(x)=a\sin x-b\cos x$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=a\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}+b\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0}=1$

$a=1$

$g(0)=\underbrace{\sin(0)}_{=0}-b\underbrace{\cos(0)}_{=1}=2$

$-b=2$

$b=-2$

Svar: $\begin{cases}a=1\\ b=-2\end{cases}$

8. $f(x)=\sin 2x$

$f'(x)=2\cos 2x$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=2\cos(\pi)$

$=-2$ $y=-2x+m$ sök m

Gemensam punkt $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$

$0=-2\cdot\frac{\pi}{2}+m$

$m=\pi$

$y=-2x+\pi$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,dx=$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x-\sin x\,dx=\left[\sin x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}-(\sin 0+\cos 0)=$

$=\frac{2}{\sqrt{2}}-1=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ a.e

10. $f(x) = x \cdot e^x \quad f'(x) = e^x + xe^x$

$f'(x) = 0$

$e^x + xe^x = 0$

$e^x(1+x) = 0 \qquad x = -1$

11. a) $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$

$\int_0^{\pi} 2\sin x \, dx \left[-2\cos x\right]_0^{\pi} = -2\cos\pi - (-2\cos 0) = 2 + 2 = 4$ stämmer!

b) $\int_0^{\pi} a\sin x \, dx = \left[-a\cos x\right]_0^{\pi} = -a\cos\pi - (-a\cos 0) = 2a$ Arean ökar med a

12. $\sin x \cos x = \frac{1}{4} \qquad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$ [sinus för dubbla vinkeln]

$\frac{\sin 2x}{2} = \frac{1}{4}$

$\sin 2x = \frac{1}{2}$

I $2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot n$

$x = \frac{\pi}{12} + \pi \cdot n$

II $2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot n$

$2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot n$

$x = \frac{5\pi}{12} + \pi \cdot n$

13. $f(x) = \cos 2x + e^{2x}$

$F(x) = \frac{\sin 2x}{2} + \frac{e^{2x}}{2} + C$

14. Vi vill att $\sin x + C \geq 0$ för alla x det gör att $C \geq 1$

15 $f(x) = \sin^3 x$

$f'(x) = 3\cos x \cdot \sin^2 x$

$\sin^2 x > 0$ för alla x

$3\cos x < 0$ mellan $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

Svar: mellan $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

16. Skriv om!

$$\boxed{\begin{aligned} &\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \\ &2\sin^2 x = 1 - \cos 2x \\ &\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} \end{aligned}}$$

Regler!

$f(x) = \sin^2 2x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 4x}{2}$

$F(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} + C$

17. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} k\cos kx \, dx = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} k\cos kx \, dx = \left[\frac{k\sin kx}{k}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\sin kx\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} \cdot k = 1$$

$\sin \frac{\pi}{2} k = 1$ $\quad$ $\frac{\pi}{2} k = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n$

$k = 1 + 4 \cdot n$

18. Röd graf är $f(x)$

Blå är $f'(x)$

$$\int_a^b f'(x)\,dx = \left[f(x)\right]_a^b = f(b) - f(a) = 2 - 0 =$$

$= 2$

19. a) $x = 0$ och $y = 3$

b) $x = \pm 2$ och $y = x$

c) $x_1 = a$ $x_2 = b$ och $y = c$

20 Derivera $F(x)$, det blir inte $f(x)$. Joakim har rätt!

21. $\frac{2\pi}{9}$; radianer.

$\pi = 180°$

$\frac{\pi}{9} = 20°$

$\frac{2\pi}{9} = 40°$

Svar: $40°$

22. $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$

$VL = (\cos^2 x - \sin^2 x)\underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_{=1} = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

23. $\sin x + \cos x = 1$ Skriv om till en sinusuttryck

$c\sin(x+v)$ $\quad c = \sqrt{a^2+b^2}$ där $a\sin x + b\cos x$ $\quad c = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\tan v = \frac{b}{a}$ $\quad \tan v = \frac{1}{1} = 1$ $\quad v = \frac{\pi}{4}$ $\quad \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}) = 1$

$\sin(x+\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

I) $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot n$ $\quad x = 2\pi \cdot n$

II) $x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot n = \frac{3\pi}{4} + 2\pi \cdot n$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n$

24. $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$ $\quad \frac{dV}{dt} = 300$ $\quad$ Volym kon $= \frac{\pi r^2 h}{3}$

Vi vet att $r = h$

$\frac{dh}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\frac{dV}{dh}} = \frac{300}{\pi \cdot 15^2} = 0{,}42\,cm/min$ $\quad V = \frac{\pi \cdot h^3}{3}$

$V' = \pi \cdot h^2$ då $h = 15$ ger

$V' = \pi \cdot 15^2$

25. Areauttryck

$\int_0^{\pi} \sin x + ax \, dx - \int_0^{\pi} ax \, dx$

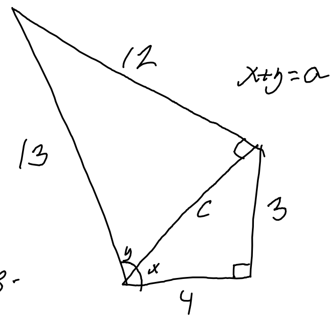
$= \int_0^{\pi} \sin x + ax - ax \, dx = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1+1 = 2$

Arean är konstant vid 2 a.e

2.6 Använd Pythagoras sats

$4^2+3^2=c^2$

$c=\pm 5$



$\sin x=\frac{3}{5}$ $\cos x=\frac{4}{5}$

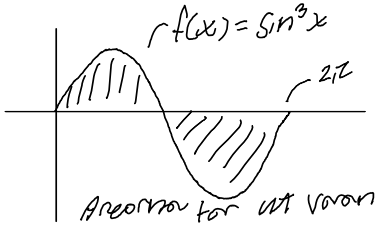
$\sin y=\frac{12}{13}$ $\cos y=\frac{5}{13}$

Additions-formeln

$\sin(a)=\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$

$=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}+\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}=\frac{3}{13}+\frac{48}{65}=\frac{15}{65}+\frac{48}{65}=\frac{63}{65}$

27 primitiv funktion blir svårt på denna tänk till istället



$\int_0^{2\pi}\sin^3 x\,dx=0$

28. $h(x)=(f(x))^2+(g(x))^2$ $h'(x)=2\cdot f'(x)\cdot f(x)+2\cdot g'(x)\cdot g(x)$

Gör substitutionerna $h'(x)=2\cdot g(x)\cdot f(x)-2\cdot f(x)\cdot g(x)=0$

$h'(x)$ är noll för alla x det gör att $h(x)$ är konstant!

$h(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{2}$

29.

$$\tan 15^\circ = \frac{\sin(15^\circ)}{\cos(15^\circ)} = \frac{\sin(45^\circ - 30^\circ)}{\cos(45^\circ - 30^\circ)} = \frac{\sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ}{\cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ}$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}\cdot 2}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}\cdot 2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

30. Om arean A skav vara maximal när den är en kvadrat krävs att $f(a) = a$ dvs. $e^{ka} = a$ samt att $A'(a) = 0$ där $A(x)$ är areafunktionen

$$A(x) = x \cdot f(x) = x \cdot e^{kx}$$

$$A'(x) = e^{kx} + x k e^{kx} \qquad A'(a) = 0$$

$$e^{ka} + a \cdot k \cdot e^{ka} = 0$$

Aldrig noll

$$e^{ka} \underbrace{(1 + a \cdot k)}_{=0} = 0$$

$$1 + ak = 0$$

$$a = \frac{-1}{k}$$

Använd kravet

$$e^{ka} = a$$

$$e^{k \cdot \frac{-1}{k}} = \frac{-1}{k}$$

$$e^{-1} = \frac{-1}{k}$$

$$\frac{1}{e} = \frac{-1}{k}$$

$k = -e$ otroligt snyggt

Svar: $k = -e$