

Övningsprov 2 – Ma3c

Uppgifter med en kvadrat kan lösas med digitalt hjälpmedel

De rödmarkerade uppgifterna behöver ni inte göra

1. Derivera följande funktioner algebraiskt, förenkla om möjligt.

a) $f(x) = 2x^3 + 3x + 4$

b) $g(x) = e^x + e^{2x} + e$

c) $g(x) = 5^x + 10$

d) $f(x) = \frac{e^{3x}}{e^x}$

e) $g(x) = \frac{e^5 \cdot e^{2x}}{e^{10} \cdot e^x - 2e^x}$

f) $f(x) = (a + b)e^{ax+bx}$ (3/2/2)

2. Bestäm samtliga primitiva funktioner till följande funktioner

a) $f(x) = 3x^2 - x + 1$

b) $f(x) = e^{3x}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2} + 10$

d) $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$ (2/1/0)

3. Bestäm följande integraler

a) $\int_0^2 3x^2 + 1 \, dx$

b) $\int_{-1}^1 e^{2x} \, dx$

c) $\int_0^3 \frac{3}{e^{2x}} \, dx$

d) $\int_0^1 \frac{e^x + xe^{x+1}}{1+ex} \, dx$ (4/2/1)

4. Bestäm talet a

a) $\ln(a + 4) - \ln 4 = \ln 2$

b) Om $f'(0) = 8$ för funktionen $f(x) = 2e^{ax}$

c) $e^{2a} + 10 = 15$

d) $\int_{-1}^a x^2 dx = 3$

e) $f(x) = \frac{a}{x}$ och $f''(1) = 8$

f) Om $f(x) = e^{\frac{x}{10}} + ax$ har en extrempunkt i punkten $(0,1)$ (4/4/0)

5. Bestäm $f'(0)$ för följande funktioner med hjälp av geogebra

a) $f(x) = e^x \cdot x^2$

b) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

c) $f(x) = 3^x \cdot x$ (3/0/0)

6.

a) Bestäm för vilka x -värden funktionen $f(x) = x^3 - 12x + 10$ extrempunkter

b) Bestäm extrempunkternas karaktär

(3/1/0)

7. Visa att funktionen $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$ har en terrasspunkt

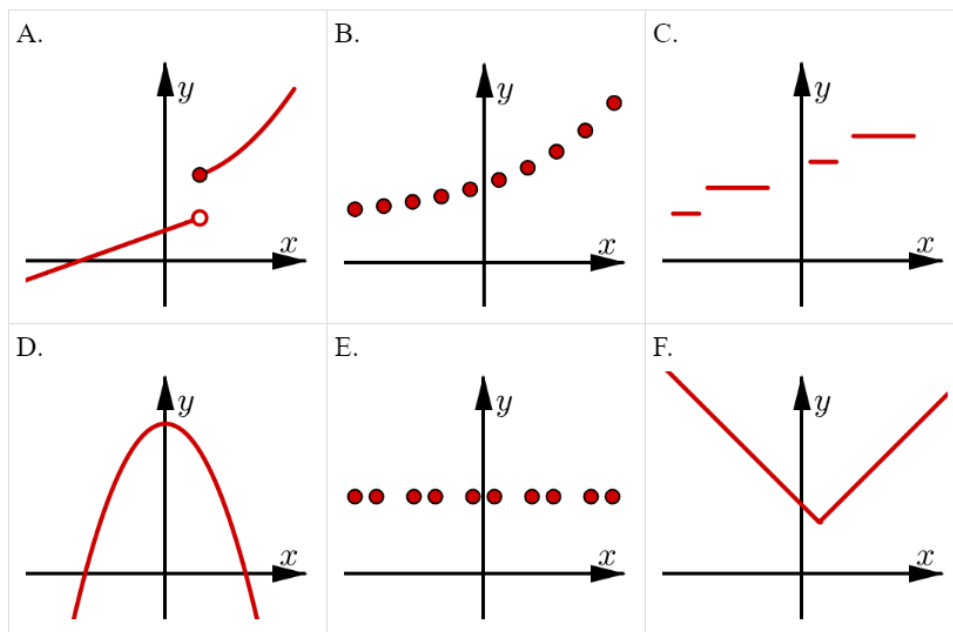
(3/0/0)

8. Nedan ser du grafen till sex olika funktioner. Bestäm följande

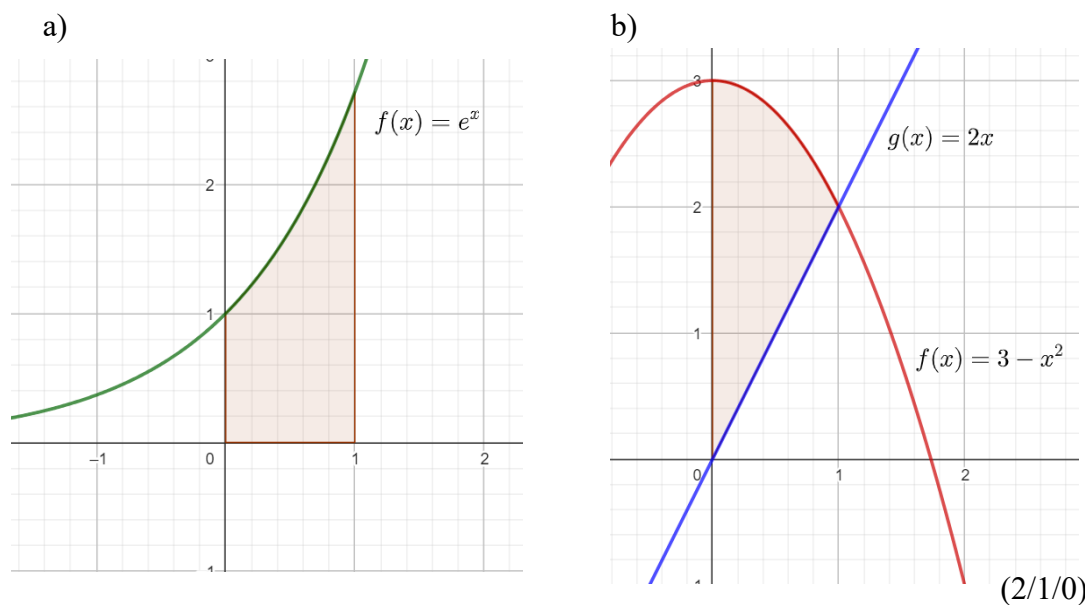
a) Bestäm de två funktioner som är kontinuerliga

b) Bestäm de två funktioner som är diskreta

c) Bestäm de två funktionerna som varken är diskreta eller kontinuerliga (3/0/0)



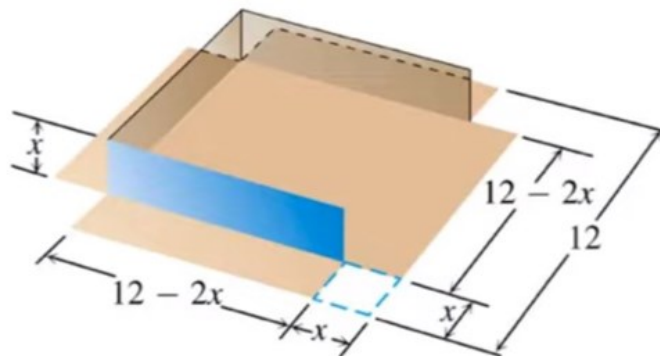
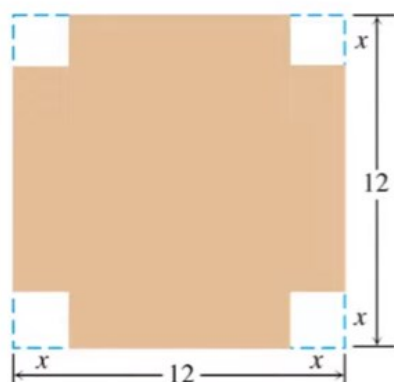
9. Bestäm arean på det markerade området svara exakt



10. Visa algebraiskt (utan miniräknare) att funktionen $f(x) = x^3 + 0,45^3x + 100000$ saknar extrempunkter

(0/2/0)

11. Joakim ska bygga en låda och vill maximera dess volym. Han har gjort följande skiss där han kommer vika upp sidorna enligt bilden nedan. Bestäm den maximala volymen lådan kan anta och bestäm dess dimensioner.



(0/3/0)

12. En tredjedagsfunktion $f(x)$ saknar extrempunkter. Skissa en tänkbar derivatafunktion till $f(x)$

(0/1/0)

13. Lös ekvationen $\ln(x + 1) = \sqrt{2}$. Svara exakt och med ett närmevärde

(0/1/0)

14. För en funktion vet du att $f''(x) = x$, du vet också att $f'(1) = 2$ samt att $f(1) = 3$

Bestäm $f(x)$

(0/3/0)

15. Visa att integralen $\int_a^b -x^2 dx$ ger ett värde V som alltid är $V \leq 0$ för alla a och b ,
 $a < b$

(0/3/0)

16. Visa att funktionen $f(x) = \frac{x^3}{3} - ex^2 + e^2x$ aldrig är avtagande

(0/2/1)

17. Ett föremål är i fritt fall. Sträckan i meter föremålet har nått efter t sekunder går att beskriva med funktionen $50t - 5e^{\frac{-t}{5}} + 5$. Undersök vad som kommer hända med hastigheten på föremålet över tid?

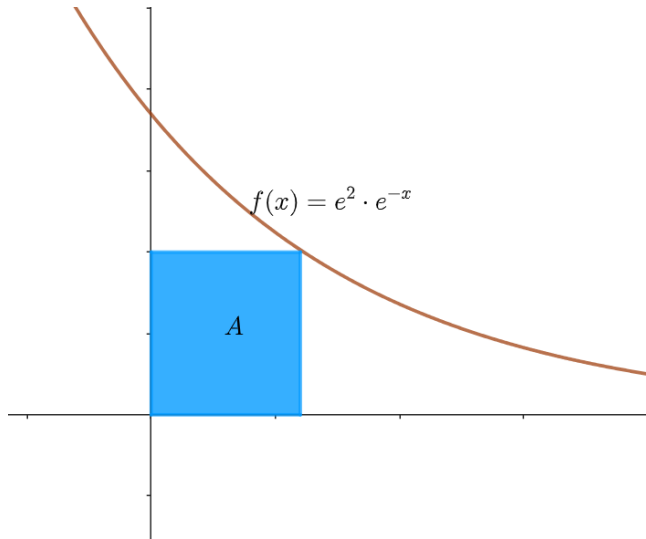
(0/3/0)

18. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(9+h)^{\frac{1}{2}} - 9^{\frac{1}{2}}}{h}$$

(0/0/1)

19. Visa att om du placerar en rektangel under kurvan på $f(x) = e^2 \cdot e^{-x}$ som avgränsas av positiva x - och y -axeln kommer den maximala arean för rektangeln vara e a.e.



(0/1/2)

20. En epidemi sprids i ett isolerat land. Det oerhört framgångsrika företaget Joakimton har gjort en modell för att beskriva antalet smittade.

$$S(t) = \frac{A}{9e^{-0,0564t} + 3} + 2e^{-0,0021t}$$

Där t är antal dagar från den 1 januari 2023.

Byn innehåller 6000 personer. Man antar att efter tid alla kommer bli smittade av sjukdomen. Bestäm konstanten A så att modellen blir realistisk.

(0/1/1)

21. Joakim vill undersöka hur lång tid det tar innan hans bil gör slut på bensin. Han vet utifrån bruksanvisningen att bensinen förbrukas med en hastighet liter/mil med funktionen $f(x) = e^{-0,054x} + 0,73$. Joakim fyller på med 50 liter. Hur lång tid kommer det ta innan Joakim har förbrukat hela tanken utifrån modellen?

(0/0/2)

22.

- a) Visa att följande samband gäller för funktioner som är kontinuerliga i intervallet $a \leq x \leq c$

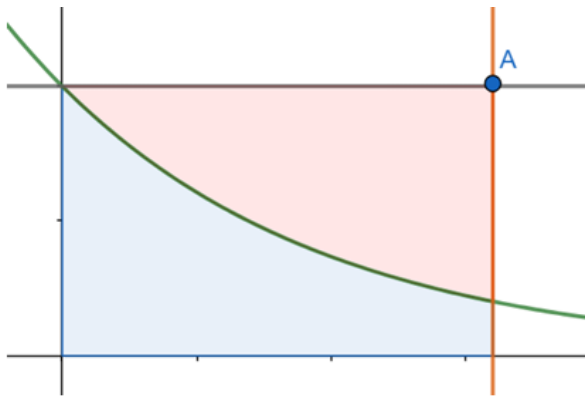
$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

- b) Visa att följande samband gäller för funktioner som är kontinuerliga i intervallet $a \leq x \leq b$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

(0/2/2)

23. Nedan visas $f(x) = e^{-x}$ och linjen $y = 1$ som tillsammans avgränsar två areaområden. För vilken koordinat på punkten A är den röda och den blå arean lika stora?



(0/0/2)

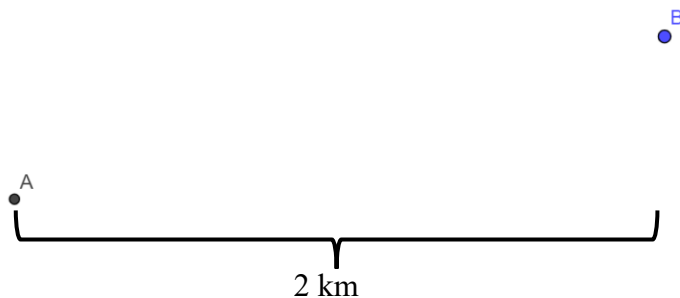
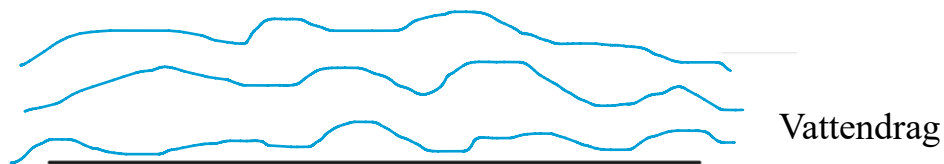
24. För vilket/vilka värden på x är uttrycket odefinierat?

a) $\frac{1}{e^{2x} - 10e^x}$

b) $\frac{1}{e^{2x} - 4e^x + 4}$

(0/2/2)

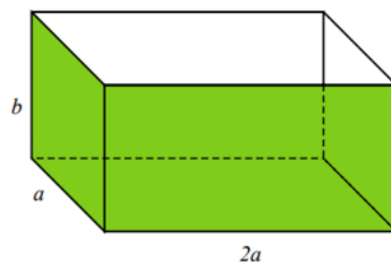
25. Joakim ska hämta vatten i ett vattendrag. Han börjar på punkten A som är 1 km (vinkelrätt) från vattendraget ska hämta vatten och sedan gå till punkt B som är 0,75 km (vinkelrätt) från vattendraget. När Joakim går utan vatten går han med en hastighet V . När han går med vattnet minskar hastigheten med 50%. Hur ska Joakim gå för att minimera tiden det tar för honom att hämta vatten?



26. Du har följande funktion $f(x) = ax^6$. Du vet att den räta linjen $y = 12x - 20$ tangerar grafen till funktionen i ett okänt x -värde

Bestäm talet heltalet a

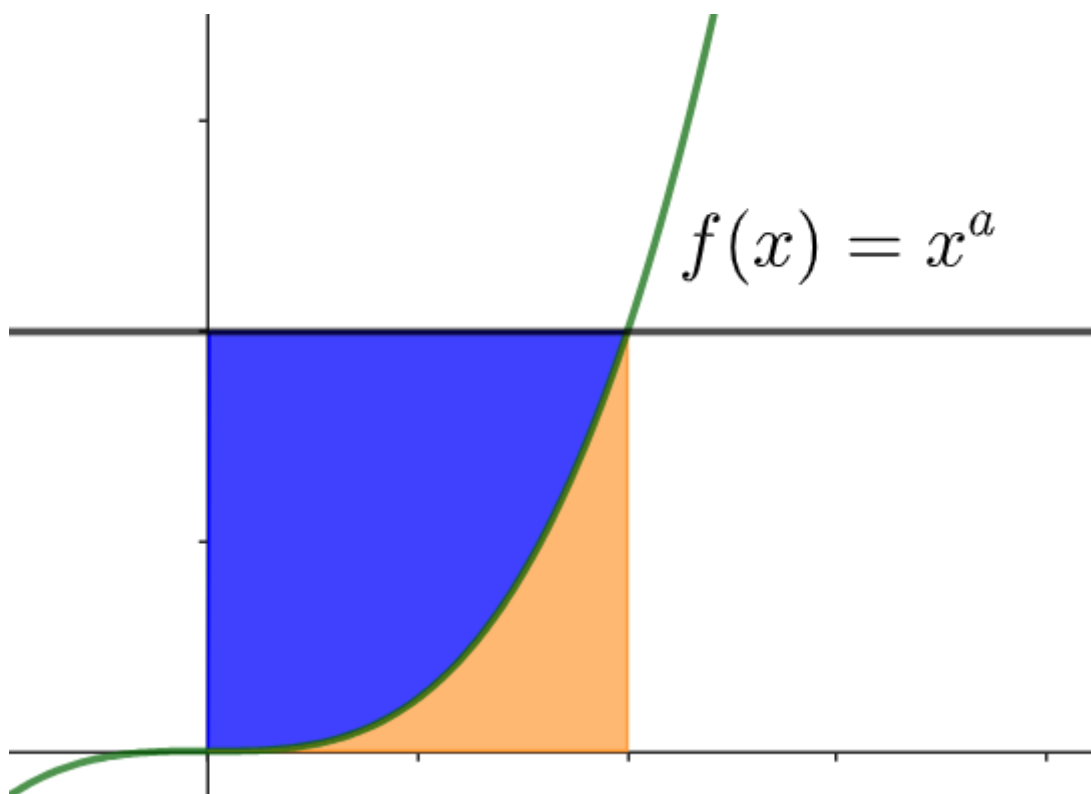
27. Ett rätblock utan lock har volymen $36m^3$. För vilka sidlängder på $2a$, a och b har rätblockets sammanlagda sidor den minsta arean men fortfarande den bestämda volymen på $36m^3$. Bestäm också den arean.



28. Visa att om man placerar en rektangel i en godtycklig rätvinklig triangel kommer den största möjliga rektangeln i triangeln alltid täcka $\frac{1}{2}$ av triangeln area. **Tips:** Använd koordinatsystem

(0/0/3)

29. Nedan ser du två markerade areor. Den orange-markerade arean är arean under grafen till funktionen $f(x) = x^a$ där a är ett positivt heltal. Visa att den blåa arean alltid är a gånger större än den orangea arean.



(0/0/3)

Lösungsförslag övningsprov 2

$$1. a) f(x) = 2x^3 + 3x + 4 \quad f'(x) = 6x^2 + 3$$

$$b) f(x) = e^x + e^{2x} + e \quad f'(x) = e^x + 2e^{2x}$$

$$c) g(x) = 5^x + 10 \quad g'(x) = \ln 5 \cdot 5^x$$

$$d) f(x) = \frac{e^{3x}}{e^x} = f(x) = 2e^{2x}$$

$$= e^{3x-x} = e^{2x}$$

$$g(x) = \frac{e^5 \cdot e^{2x}}{e^x \cdot e^x - 2e^x} =$$

$$g'(x) = \frac{e^x \cdot e^5}{e^{10} - 2}$$

$$= \frac{e^5 \cdot e^{2x}}{e^x(e^x - 2)} = \frac{e^{2x-x} \cdot e^5}{e^x - 2}$$

$$= \frac{e^x \cdot e^5}{e^x - 2}$$

$$f) f(x) = (a+b)e^{ax+bx}$$

$$f'(x) = (a+b)^2 e^{ax+bx}$$

$$= (a+b)e^{x(a+b)}$$

$$2. a) f(x) = 3x^2 - x + 1 \quad F(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} + x + C$$

$$b) f(x) = e^{3x} \quad F(x) = \frac{e^{3x}}{3} + C$$

$$c) f(x) = \frac{1}{x^2} + 10 = x^{-2} + 10 \quad F(x) = \frac{-1}{x} + 10x + C$$

$$d) f(x) = x \cdot \sqrt{x} = x \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}} \quad F(x) = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + C$$

$$3. a) \int_0^2 3x^2 + 1 dx = [x^3 + x]_0^2 = (2^3 + 2) - (0^3 + 0) = 10$$

$$b) \int_{-1}^1 e^{2x} dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^{-2}}{2} = \frac{e^2 - e^{-2}}{2}$$

$$c) \int_0^3 \frac{3}{e^{2x}} dx = \int_0^3 3e^{-2x} dx = \left[\frac{-3e^{-2x}}{2} \right]_0^3 = \frac{-3e^{-6}}{2} - \left(\frac{-3e^0}{2} \right) = \frac{-3e^{-6} + 3}{2}$$

$$d) \int_0^1 \frac{e^x + xe^{x+1}}{1+xe} dx = \int_0^1 \frac{e^x + xee^x}{1+ex} dx = \int_0^1 \frac{e^x(1+xe)}{1+xe} dx = \int_0^1 e^x dx$$

$$= [e^x]_0^1 = e - 1$$

$$4. a) \ln(a+4) - \ln 4 = \ln 2 \quad b) f(x) = 2e^{ax} \quad f'(x) = 2ae^{ax}$$

$$\ln\left(\frac{a+4}{4}\right) = \ln 2 \quad f'(0) = 8 \quad 2ae^0 = 8$$

$$2a = 8$$

$$a = 4$$

$$\frac{a+4}{4} = 2$$

$$a+4 = 8$$

$$a = 4$$

$$d) \int_{-1}^a x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^a = \frac{a^3}{3} - \left(\frac{-1^3}{3} \right) = 3$$

$$\frac{a^3}{3} + \frac{1}{3} = 3$$

$$a = 2$$

$$\frac{a^3 + 1}{3} = 3$$

$$a^3 + 1 = 9$$

$$a^3 = 8$$

$$c) e^{2a} + 10 = 15 \quad \rightarrow \quad 2a = \ln 5$$

$$e^{2a} = 5$$

$$a = \frac{\ln 5}{2}$$

$$\ln e^{2a} = \ln 5$$

$$4. e) f(x) = \frac{a}{x} = a\bar{x}^{-1} \quad f'(x) = -a\bar{x}^{-2} \quad f''(x) = 2a\bar{x}^{-3}$$

$$f''(x) = \frac{2a}{x^3} \quad f''(1) = 8 \quad f, f(x) = e^{\frac{x}{10}} + ax$$

$$\frac{2a}{1^3} = 8$$

$$a = 4$$

Undersök derivatan!

$$f'(x) = \frac{e^{\frac{x}{10}}}{10} + a$$

$f'(0) = 0$ eftersom det ska vara en extrempunkt där!

$$f'(0) = 0$$

$$\frac{e^0}{10} + a = 0 \quad a = -\frac{1}{10}$$

5. Använd guldregeln
deriveringsskridet!

$$a) f'(0) = 0$$

$$b) f'(0) = 1$$

$$c) f'(0) = 1$$

6. a) $f(x) = x^3/2x + 10$ b) Undersök andraderivatan eller
teckentabell!

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

$$f'(x) = 0 \quad 3x^2 - 12 = 0$$

$$3x^2 = 12$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

$$f''(x) = 6x \quad f''(2) = 12 \text{ minimipunkt} \\ \text{eftersom} \\ f''(x) > 0$$

$$f''(-2) = -12 \text{ maximipunkt!}$$

Skr: Då $x = \pm 2$

$$7. a) f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + x \quad f'(x) = x^2 + 2x + 1$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{Undersök derivatan innan och efter!}$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \quad f'(-1) = 4 - 4 + 1 = 1 \quad \text{Positiv}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{1-1} \quad f(0) = 0 + 0 + 1 = 1 \quad \text{Positiv}$$

$$= -1 \pm 0$$

Terminspunkter då $x = -1$

$$x = -1$$

$$8. a) D \text{ och } F \quad b) B \text{ och } E \quad c) A \text{ och } C$$

$$9. a) \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1 \quad \text{svar: } e - 1 \text{ a.e}$$

$$b) \text{Arean mellan parabolerna: } \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

$$\int_0^1 (3 - x^2) dx - \int_0^1 2x dx = \left[3x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 - \left[x^2 \right]_0^1 = 3 - \frac{1}{3} - (0 - 0) - (1 - 0)$$

$$= 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \quad \text{Svar: } \frac{5}{3} \text{ a.e}$$

$$10. f(x) = x^3 + 0,45^3 x + 100000$$

$$f'(x) = 3x^2 + 0,45^3 \quad f'(x) = 0$$

$$3x^2 + 0,45^3 = 0$$

$$3x^2 = -0,45^3$$

$$x^2 = \frac{-0,45^3}{3}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{-0,45^3}{3}} \quad \text{Inga reella lösningar! Inga extrempunkter!} \quad \square$$

11. Volumen beschreibt an: $V(x) = (12 - 2x)^2 \cdot x$

$$= (144 - 48x + 4x^2) \cdot x = 144x - 48x^2 + 4x^3$$

Untersuchen Extrempunkte!

$$V'(x) = 144 - 96x + 12x^2 \quad V'(x) = 0$$

$$144 - 96x + 12x^2 = 0$$

$$12 - 8x + x^2 = 0$$

$$x = 4 \pm \sqrt{16 - 12}$$

$$= 4 \pm \sqrt{4}$$

$$= 4 \pm 2$$

$$x_1 = 6$$

$$x_2 = 2$$

Verifizieren! Andrerivate!

$$V''(x) = -96 + 24x$$

$$V''(2) = -96 + 48 = -48 \text{ Maximumpunkt!}$$

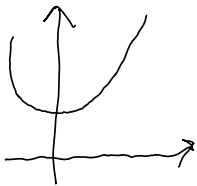
$$V''(6) = -96 + 24 \cdot 6 > 0 \text{ Minimpunkt!}$$

Basen stark voran: $12 - 2 \cdot 2 = 8 \text{ l.e.}$

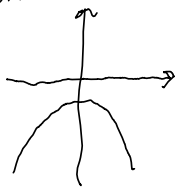
Höhen stark voran 2 l.e.

$$\text{Total Volumen: } V(2) = 144 - 96 + 16 = 64 \text{ V.l.}$$

12. Typ



eller



$$13. |M(x+z) = \sqrt{z}$$

$$x+z = \sqrt{z}$$

$$x = \sqrt{z} - z \approx 2,113$$

$$14. f''(x) = x$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{2} + C$$

$$f(x) = \frac{x^3}{6} + Cx + D$$

$$f'(1) = 2$$

$$\frac{1}{2} + C = 2$$

$$C = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{2} + D$$

$$f(1) = 3 \quad \frac{1}{6} + \frac{3}{2} + D = 3$$

$$\frac{10}{6} + D = 3$$

$$D = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Svar: } f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{2} + \frac{4}{3}$$

$$15 \int_a^b -x^2 dx = \left[-\frac{x^3}{3} \right]_a^b = -\frac{b^3}{3} - \left(-\frac{a^3}{3} \right) = -\frac{b^3}{3} + \frac{a^3}{3}$$

$a < b$ Eftersom $a < b$ blir $\frac{b^3}{3}$ alltid större än $\frac{a^3}{3}$
 det resulterar i att $-\frac{b^3}{3} + \frac{a^3}{3}$ blir < 0 $\square$

$$16. f(x) = \frac{x^3}{3} - ex^2 + e^2 x$$

$$f'(x) = x^2 - 2ex + e^2 \text{ kom ihåg att } e \text{ är ett tal!}$$

$$\text{undersök extrempunkter: } f'(x) = 0$$

$$x^2 - 2ex + e^2 = 0$$

$$x = e \pm \sqrt{e^2 - e^2}$$

$$= e \pm 0$$

$$x = e \text{ extrempunkt i}$$

$$x = e$$

undersök derivatan innan och efter
 extrempunkten

$$f'(0) = 0 - 0 + e^2 \text{ positiv}$$

$$f'(2e) = 4e^2 - 4e^2 + e^2 \text{ positiv}$$

funktionen har en terrasspunkt
 vid $x = e$ och är växande innan
 och efter $f(x)$ är aldrig avtagande

$\square$

$$17. S(t) = 50t - e^{-\frac{t}{5}} + 5$$

vi är intresserade av
 en hastighet sök

$$\text{derivatan}$$

$$S'(t) = 50 + \frac{e^{-\frac{t}{5}}}{5}$$

vad händer med

$S'(t)$ över tid dra

$$t \rightarrow \infty$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 50 + \frac{e^{-\frac{t}{5}}}{5} = \lim_{t \rightarrow \infty} 50 + \frac{1}{5e^{\frac{t}{5}}}$$

termen $\frac{1}{5e^{\frac{t}{5}}}$ kommer försummas då

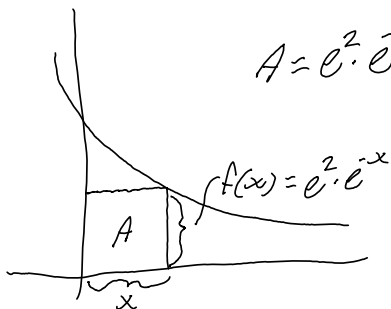
$t \rightarrow \infty$ svar: Hastigheten närmar sig
 50 m/s

18. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(9+h)^{\frac{1}{2}} - 9^{\frac{1}{2}}}{h}$ Derivators definition för funktionen $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ i $x=9$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(9+h)^{\frac{1}{2}} - 9^{\frac{1}{2}}}{h} = \frac{1}{6}$$

19. $A = e^2 \cdot e^{-x} \cdot x$ När är A som störst?
Jobb för geogebra



Jag skriver in $f(x) = e^2 \cdot e^{-x} \cdot x$ i geogebra och undersöker dess maximum. Den uppkommer då $x=1$

$$A(1) = e^2 \cdot e^{-1} \cdot 1 = e^1 = e$$

Vilket visar att den maximala arean är e a.e

□

20. $S(t) = \frac{A}{9e^{-0,0564t} + 3} + 2e^{-0,0021t}$

Över tid ska alla smittans

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 6000$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A}{9e^{-0,0564t} + 3} + 2e^{-0,0021t} = 6000$$

$$9e^{-0,0564t} \text{ och } 2e^{-0,0021t} \text{ försummas då } t \rightarrow \infty$$

$$\frac{A}{3} = 6000$$

$$A = 18000 \quad \text{Svar: } A = 18000$$

21. $f(x) = e^{-0,054x} + 0,73$ $f(x)$ är en hastighet

Vi vill veta en mängd

$$F(x) = \frac{e^{-0,054x}}{-0,054} + 0,73x + C \quad x \text{ är nu mil och } F(x) \text{ är liter}$$

$$F(0) = 0$$

Eftersom man inte
förbrukat något efter
0 mil

$$\frac{1}{-0,054} + 0 + C = 0$$

$$C = 18,518 \quad F(x) = \frac{e^{-0,054x}}{-0,054} + 0,73x + 18,518$$

$$F(x) = 50$$

$$50 = \frac{e^{-0,054x}}{-0,054} + 0,73x + 18,518$$

den emotionen 1830 vi med
geograf!

$$x = 45,32$$

Svar: Han har färdas

45,32 mil innan
tanken är slut.

22. a) $\int_a^c f(x) dx = [F(x)]_a^c = F(c) - F(a)$

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = [F(x)]_a^b + [F(x)]_b^c = F(b) - F(a) + F(c) - F(b)$$

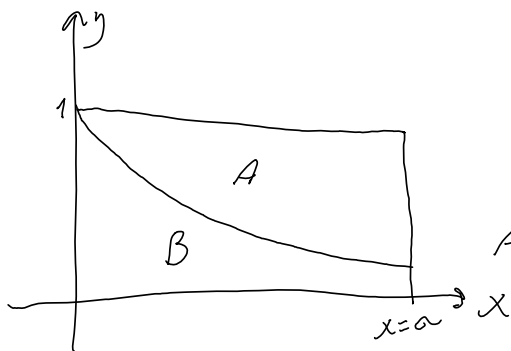
$$= -F(a) + F(c) = F(c) - F(a) \quad \square$$

$$b) \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$-\int_b^a f(x) dx = -[F(x)]_b^a = -(F(a) - F(b)) = -F(a) + F(b) = F(b) - F(a)$$



23.



$$B = \int_0^a e^{-x} dx \quad \text{Area of hela rektangeln}$$

$$A = a - \int_0^a e^{-x} dx$$

$$B = A$$

$$\int_0^a e^{-x} dx = a - \int_0^a e^{-x} dx$$

$$\int_0^a e^{-x} dx \left[-e^{-x} \right]_0^a = -e^{-a} + 1$$

$$-e^{-a} + 1 = a - e^{-a} - 1$$

$$2e^{-a} + a - 2 = 0 \quad \leftarrow \text{Lös med guesswork}$$

$$(a=0) \text{ eller } a=1,59 \quad \text{Koordinaten: } (1,59; 1)$$

$$24. a) \frac{1}{e^{2x} - 10e^x} \quad \text{odet. då nämnaren} = 0$$

$$e^{2x} - 10e^x = 0$$

$$e^x(e^x - 10) = 0$$

aldrig
noll

$$e^x = 10$$

$$x = \ln 10$$

$$b) \frac{1}{e^{2x} - 4e^x + 4} \quad \text{odet. då nämnaren} = 0$$

$$e^{2x} - 4e^x + 4 = 0$$

färdigt linja en kvadrering!

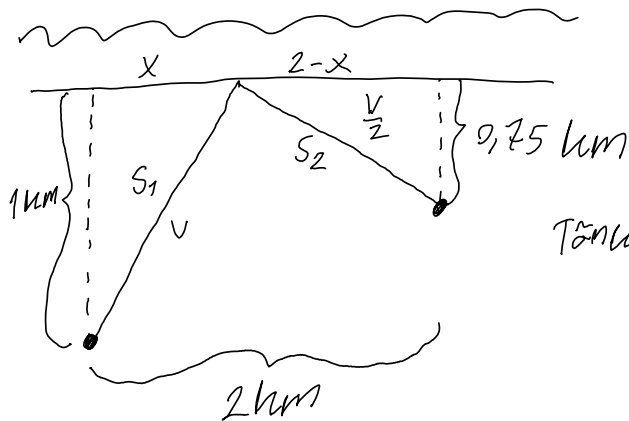
$$e^{2x} - 4e^x + 4 = 0$$

$$(e^x - 2)^2 = 0$$

$$e^x - 2 = 0$$

$$x = \ln 2$$

25.



$$S_1 = \sqrt{1 + x^2} \quad \text{Pythagoras} \quad t_1 = \frac{S_1}{v}$$

$$S_2 = \sqrt{0,75^2 + (2-x)^2}$$

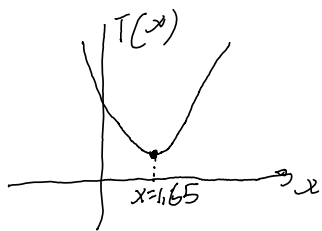
$$t_2 = \frac{S_2}{\frac{v}{2}} = \frac{2S_2}{v}$$

$$\text{Total tid: } \frac{S_1}{v} + \frac{2S_2}{v}$$

$$T(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{v} + \frac{2\sqrt{0,75^2+(2-x)^2}}{v}$$

Vi vill minimera detta
och eftersom v är en
konstant är lösningen
det som är intressant

Jag skriver in funktionen
i GeoGebra och funktionen
visar en minimipunkt då $x=1,65$



Svar: Utifrån klassen ska hon
gå 1,65 km längs med vattnet
för att minimera tiden

26. $f(x) = ax^6$ den röta linjen $y = 12x - 20$
tangerar $f(x)$ i något x -värde

$$f'(x) = 6ax^5$$

x -värdet den tangerar i

$$f'(h) = 12$$

$$12 = 6ah^5$$

$$a = \frac{2}{h^5}$$

funktionerna ska vara
samma i $x = h$

$$12h - 20 = ah^6$$

$$12h - 20 = \frac{2}{h^5} \cdot h^6 = 2h$$

$$12h - 20 = 2h$$

$$10h = 20$$

$$h = 2$$

$$a = \frac{2}{2^5} = \frac{1}{16} \quad \text{Svar: } a = \frac{1}{16}$$

27. Volymen är $2a \cdot a \cdot b = 36$

$$2a^2 \cdot b = 36$$

$$b = \frac{36}{2a^2} = \frac{18}{a^2}$$

Arean: $2a^2 + ab + ab + 2ab + 2ab = 2a^2 + 2ab + 4ab = 2a^2 + 6ab$

$$= 2a^2 + \frac{6 \cdot a \cdot 18}{a^2} = 2a^2 + \frac{108}{a} = 2a^2 + 108a^{-1}$$

$$A(a) = 2a^2 + 108a^{-1}$$

$$A'(a) = 4a - 108a^{-2}$$

$$A'(a) = 0$$

$$4a - \frac{108}{a^2} = 0 \quad a = 3$$

$$4a = \frac{108}{a^2}$$

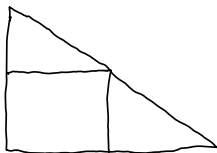
$$4a^3 = 108$$

$$a^3 = 27$$

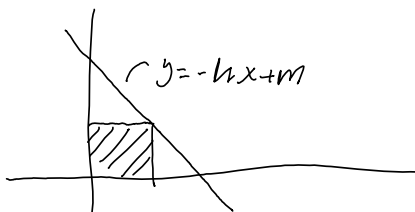
$$b = \frac{18}{3^2} = 2$$

Svar: $a = 3$ och $b = 2$

28. Vi vill undersöka
att den största arean för en
rektangel i en rätvinklig triangel
alltid utgör $\frac{1}{2}$ av den totala
arean



Använd koordinatsystem



$$A(x) = -kx^2 + xm$$

sök extrempunkt

Arean för rektangeln: $x \cdot (-kx + m)$

$$A(x) = -2kx + m$$

$$\text{Area då } x = \frac{m}{2k}$$

$$A'(x) = 0 \quad -2kx + m = 0$$

$$-2kx = -m$$

$$x = \frac{m}{2k}$$

$$-k \cdot \frac{m^2}{4k^2} + \frac{m^2}{2k} = \frac{-m^2}{4k} + \frac{m^2}{2k} = \frac{m^2}{4k}$$

Arean för den rätvinkliga triangeln

$$\frac{b \cdot h}{2} \quad h = m \quad b \text{ ges av lösningen till}$$

$$0 = -kx + m$$

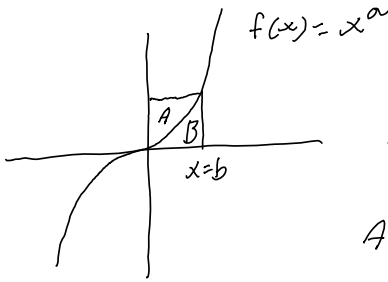
$$x = \frac{m}{k} \quad \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\frac{m}{k} \cdot m}{2} = \frac{m^2}{2k}$$

$$\frac{m^2}{2k} \text{ är dubbelt så stort som } \frac{m^2}{4k} \text{ eftersom } \frac{m^2}{4k} =$$

$$= \frac{m^2}{2k} \cdot \frac{1}{2}$$



29.



$$B = \int_0^b x^a dx = \left[\frac{x^{a+1}}{a+1} \right]_0^b = \frac{b^{a+1}}{a+1}$$

$$A = b \cdot b^a - \int_0^b x^a dx = b^{a+1} - \frac{b^{a+1}}{a+1}$$

$$= \frac{(a+1)(b^{a+1})}{a+1} - \frac{b^{a+1}}{a+1} = \frac{ab^{a+1} + b^{a+1} - b^{a+1}}{a+1}$$

$$= \frac{ab^{a+1}}{a+1} = a \cdot \frac{b^{a+1}}{a+1}$$

A är alltså a större än B

