Prov komplexa tal - Matematik 4

Namn: ____

Klass:____

Provet innehåller 8 uppgifter.

Maxpoäng fördelat: (10/9/3)

Hjälpmedel: Formelblad

Lycka till!

1. Vi definierar det komplexa talet $z = 3 + 4i$. Bestäm följande, *endast svar krävs.*

a) $Re(z)$

b) $\bar{z}$

c) $|z|$ (3/0/0)

2. Vi definierar de komplexa talen

$$z_1 = 5\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z_2 = \left(cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Bestäm följande

a) $\arg(z_1)$

b) $\frac{z_2}{z_1}$, svara på polär form

c) Rita upp z_1 i det komplexa talplanet.

d) Joakim menar att $(z_2)^{25} = z_2$, undersök om han har rätt

(3/2/0)

3. Utför polynomdivisionen och bestäm eventuell rest

$$\frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x - 2}$$

(3/0/0)

4. Lös ekvationen $z(1 + i) + i = 1 + 4i$. Svara på formen $z = a + bi$

(1/1/0)

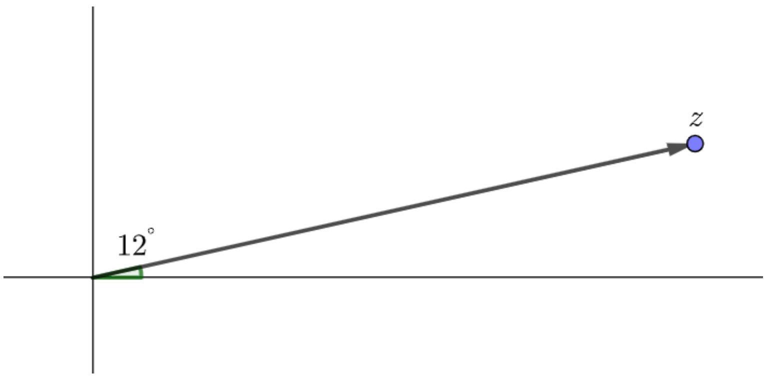
5. Skriv det komplexa talet $z = 1 - \sqrt{3}i$ på exponentialform

(0/2/0)

6. Lös ekvationen $z \cdot (cos30° + isin30°) = i$

(0/2/0)

7. Nedan ser du en av lösningarna till ekvationen $z^{36} = a$ i det komplexa talplanet, där a är något komplext tal. Bestäm hur många lösningar till ekvationen som ligger i intervallet $100° < \arg(z) < 130°$. Motivera.



(0/1/1)

8. $cosv$ går att definiera på flera olika sätt. Ett sätt är att definiera $cosv$ med hjälp av komplexa tal. Visa att $cosv$ går att definiera med följande likhet

$$cosv = \frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2}$$

(0/0/2)

Lösningar komplexa tal-prov

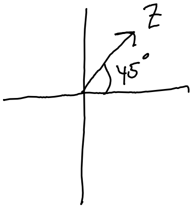
1. a) $z=3+4i$ $\quad Re(z)=3$ $\quad$ b) $\bar{z}=3-4i$ $\quad$ c) $|z|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

2. a) $\arg(z_1)=\frac{\pi}{4}$ $\quad$ b) $z_1\cdot z_2=5\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$$=5\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=5\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$$

c)



d) $(z_2)^{25}=z_2$

$$z_2^{25}=\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 25\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 25\right)=\cos\left(\frac{25\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{25\pi}{2}\right)$$

$$\frac{25\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot n$$

$$24\pi=2\pi\cdot n$$

$n=12$ svaren är samma!

3.

$$\begin{array}{l|l} \multicolumn{1}{r}{x^2+3x+2} & \\ \hline x^3+x^2-4x-4 & x-2 \\ -(x^3-2x^2) & \\ \hline 3x^2-4x-4 & \\ -(3x^2-6x) & \\ \hline 2x-4 & \\ -(2x-4) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Ingen rest.

4. $z(1+i)+i=1+4i$

$z(1+i)=1+3i$

$$z=\frac{1+3i}{1+i}=\frac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=$$

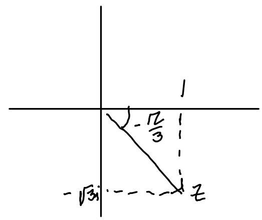
$$=\frac{1-i+3i+3}{1^2+1^2}=\frac{4+2i}{2}=2+i$$

5. $z = 1 - \sqrt{3}i$ $\quad |z| = r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

arg(z) sökes

$\arg(z) = -\frac{\pi}{3}$

eller $\frac{5\pi}{3}$



z i exponentiell form: $z = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$ eller $z = 2e^{\frac{5\pi}{3}i}$

$i = \cos(90°) + i\sin(90°)$

6. $z(\cos(30°) + i\sin(30°)) = i$

$z \cdot (\cos(30°) + i\sin(30°)) = \cos(90°) + i\sin(90°)$

$|z| = 1 \quad \arg(z) = v = 30 + v = 90°$

$v = 60°$

$z = \cos(60°) + i\sin(60°)$

7. Det kommer ligga lösningar med ett intervall på 10° eftersom z är upphöjd med 36. Vi kommer då få lösningar med $\arg(z) = 102°, 112°, 122°$ inom det intervallet!

$\cos v = \frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2}$ Skriv om HL i polär form

$\frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2} = \frac{\cos v + i\sin v + \cos(-v) + i\sin(-v)}{2}$

$\cos v = \cos(-v)$

$-\sin v = \sin(-v)$ Vi får då likheten

$\frac{\cos v + i\sin v + \cos v - i\sin v}{2} = \frac{2\cos v}{2} = \cos v$

Vi har då visat att VL = HL