

Övningsprov 3 – Komplexa tal

1. Beräkna följande

a) $1 + 3i + 5 - i$

b) $(1 + i)(2 - i)$

c) $(2 - 5i)(2 + 5i)$

d) $\frac{1+2i}{2-3i}$ (6/0/0)

2. Skriv följande komplexa tal på polär form

a) $z = 1 + i$

b) $z = 1 - \sqrt{3}i$ (4/0/0)

3. Skriv det komplexa talet $z = 2i$ i exponentiell form (2/0/0)

4. Lös ekvationen $x^2 - 6x + 13 = 0$ och bestäm dess komplexa rötter (1/0/0)

5. Vi definierar det komplexa talet $z = -3 + 4i$. Bestäm följande

a) Placera ut z i det komplexa talplanet

b) $Im(z)$

c) $Re(z)$

d) Bestäm $\bar{z}$

e) Bestäm $|z|$ (6/0/0)

6. Rita upp i det komplexa talplanet samtliga komplexa tal z som uppfyller följande krav

- $Im(z) > 0$
 - $|z| = 4$
 - $\frac{\pi}{2} < Arg(z) < \pi$
- (1/1/0)

7. Utför polynomdivisionen och bestäm eventuell rest

a) $\frac{x^3-7x-6}{x-3}$

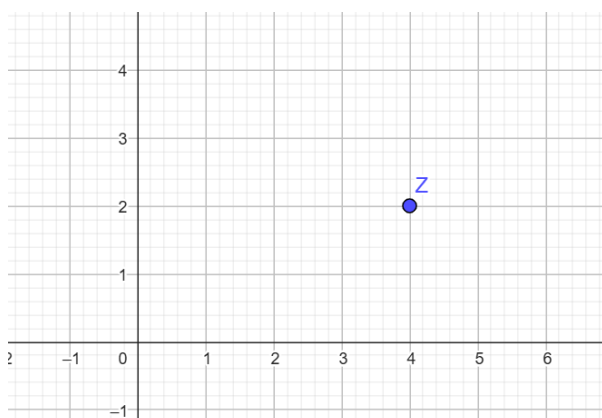
b) $\frac{x^3+3x^2-10x-25}{x+4}$

(4/2/0)

8. Lös ekvationen $z^3 = -1$ med fullständiga lösningar

(0/3/0)

9. Joakim ritar upp följande komplexa tal z i det komplexa talplanet



a) Rita upp det komplexa talet $z \cdot i$ i det komplexa talplanet.

b) För ett annat komplext tal z vet du att $Re(z) = a$ $Im(z) = b$. Bestäm Re och Im för det komplexa talet $i \cdot z$

(1/2/0)

10. Det finns en regel som säger att om en andragradsekvation har enbart reella koefficienter om dess rötter är konjugerande. Utgå från att en av rötterna är $x = a + bi$ för en andradsfunktion visa att om ekvationen har konjugerande rötter kommer vi enbart få reella koefficienter på ekvationen.

(0/2/0)

11. Visa att $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ för alla z

(0/2/0)

12. a) Visa att $\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^6 = 1$

b) För vilka positiva värden på k kommer följande uttryck $\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^k$ bli reellt?

(2/1/1)

13. Bestäm vilket/vilka a kan vara så att $|z| = 3$ för det komplexa talet

$$z = a^2 e^{\frac{\pi}{2}i} + 2a e^{\frac{\pi}{2}i} \quad (0/0/2)$$

14. Rita upp i det komplexa talplanet samtliga komplexa tal z som har följande likhet

$$|z + \bar{z}| = |z - \bar{z}| \quad (0/0/2)$$

15. Joakim påstår att om a är ett positivt reellt heltal större än noll kommer a^i alltid resultera i ett komplext tal. Undersök om han har rätt.

(0/0/3)

Övningsprov - Komplexa tal

1. a) $1+3i+5-i = 6+2i$ b) $(1+i)(2-i) = 2-i+2i-i^2 = 2+i-(-1) =$

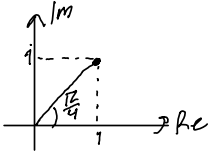
c) $(2-5i)(2+5i) = 2^2 - (5i)^2 = 3+1$

$= 4+25 = 29$

d) $\frac{1+2i}{2-3i} = [\text{förång med nämnarens konjugat}]$

$= \frac{(1+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i+4i+6i^2}{2^2 - (3i)^2} = \frac{-4+7i}{13} =$
 $= \frac{-5}{13} + \frac{7i}{13}$

2. a)

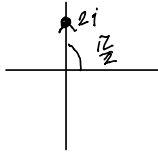


$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\arg(z) = \frac{\pi}{4}$

Svar: $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right)$

3. $z = 2i$



$z = 2 \cdot e^{\frac{\pi}{2}i}$

4. $x^2 - 6x + 9 = 0$

$x = 3 \pm \sqrt{3^2 - 9}$

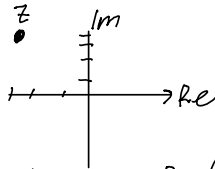
$= 3 \pm \sqrt{-4}$

$= 3 \pm 2i$

$x_1 = 3+2i$

$x_2 = 3-2i$

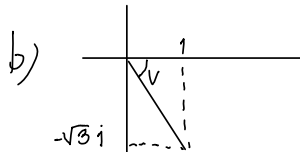
5. a)



b) $\operatorname{Im}(z) = 4$ c) $\operatorname{Re}(z) = -3$

d) $\bar{z} = -3 - 4i$ e) $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25}$

$= 5$



$|z| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$

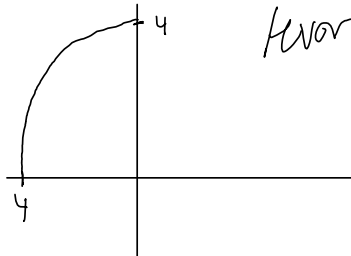
$\arg v: \tan v = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1}$

$v = \frac{\pi}{3}$ vilket ger

$\arg v = \frac{5\pi}{3}$ eller $-\frac{\pi}{3}$

$z = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$

6.



kvartscirkel med radien 4

7. Använd den liggande stolen

$$a) \frac{x^2+3x+2}{x^3-7x-6} \bigg| x-3$$

$$-(x^3-3x^2)$$

$$3x^2-7x-6$$

$$-(3x^2-9x)$$

$$2x-6$$

$$-(2x-6)$$

0

$$x^2(x-3)=x^3-3x^2$$

$$3x(x-3)=3x^2-9x$$

$$2(x-3)=2x-6$$

Ingen rest!

$$\frac{x^2-x-6}{x^3+3x^2-10x-25} \bigg| x+4$$

$$-(x^3+4x^2)$$

$$-x^2-10x-25$$

$$-(-x^2-4x)$$

$$-6x-25$$

$$-(-6x-24)$$

-1

Svar: Resten är -1

$$x^2(x+4)=x^3+4x^2$$

$$-x(x+4)=-x^2-4x$$

$$-6(x+4)=-6x-24$$

8. $z^3 = -1$ skriv i polär form

$$z^3 = \cos 12 + i \sin 12$$

$$z = \cos(v) + i \sin(v)$$

$$z^3 = \cos(3v) + i \sin(3v)$$

$$3v = 12 + 2k\pi$$

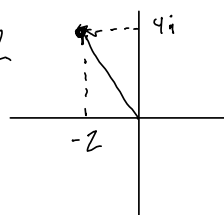
$$v = \frac{12}{3} + \frac{2k\pi}{3} \text{ där } k = 0, 1, 2$$

$$z_1 \text{ där } k=0 \quad z_1 = \cos\left(\frac{12}{3}\right) + i \sin\left(\frac{12}{3}\right)$$

$$z_2 \text{ där } k=1 \quad z_2 = \cos(12) + i \sin(12)$$

$$z_3 \text{ där } k=2 \quad z_3 = \cos\left(\frac{52}{3}\right) + i \sin\left(\frac{52}{3}\right)$$

9. a) $z = 4 + 2i$ $i \cdot z = i(4 + 2i) = 4i - 2$



b) $\operatorname{Re}(iz) = -b$ $\operatorname{Im}(iz) = a$

$$\begin{aligned} 10. (x - (a + bi))(x - (a - bi)) &= x^2 - x(a - bi) - x(a + bi) + (a + bi)(a - bi) \\ &= x^2 - ax + bix - ax - bix + a^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 \quad \text{Bara reella koefficienter!} \end{aligned}$$

11. $z = a + bi$ $\bar{z} = a - bi$ $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$
 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
 $|z|^2 = a^2 + b^2$ $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ Snögg!

12. a) $\left(\cos\left(\frac{12}{3}\right) + i\sin\left(\frac{12}{3}\right)\right)^6 = \cos\left(\frac{6 \cdot 12}{3}\right) + i\sin\left(\frac{6 \cdot 12}{3}\right) = \cos(24) + i\sin(24)$
 $= 1$ $VL = HL$

b) Två fall! Antingen är uttrycket lika med 1 eller lika med -1

$$\begin{aligned} \left(\cos\left(\frac{12}{3}\right) + i\sin\left(\frac{12}{3}\right)\right)^n &= 1 & k \cdot \frac{12}{3} &= 2\pi \cdot n \\ k &= 6 \cdot n & n &= 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{eller } \left(\cos\left(\frac{12}{3}\right) + i\sin\left(\frac{12}{3}\right)\right)^n &= -1 & k \cdot \frac{12}{3} &= 12 + 2\pi \cdot n \\ k &= 3 + 6\pi \cdot n & n &= 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

13. Vi vet att $|z| = 3$ $z = a^{\frac{12}{2}i} + 2a^{\frac{12}{2}i} = e^{\frac{12}{2}i} (a^2 + 2a)$
 $= 3$ eftersom $|z| = 3$

$a^2 + 2a = 3$ för

$a^2 + 2a - 3 = 0$

$a = -1 \pm \sqrt{1 + 3}$

$= -1 \pm 2$

$a_1 = 1$ $a_2 = -3$

Svar: Dä $a = 1$ eller $a = -3$

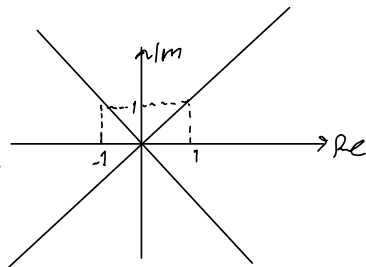
$$14 \quad z = a + bi \quad \bar{z} = a - bi \quad |z + \bar{z}| = |z - \bar{z}|$$

$$|a + bi + a - bi| = |a + bi - (a - bi)|$$

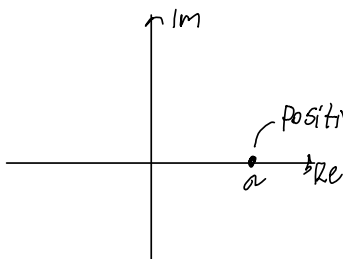
$$|2a| = |2bi|$$

$$|a| = |bi|$$

Alla komplexa tal
på dessa linjer



15.



positivt heltal

Smart att skriva om
till e som bas

$$a = e^{\ln a}$$

$$a^i = (e^{\ln a})^i = e^{\ln a \cdot i} \quad \text{vi har}$$

nu detta: exponentierings
form, nice!

$\ln a$ kommer nu vara
argumentet för det

komplexa talet

För att $e^{\ln a \cdot i}$ ska resultera
i ett reellt tal måste $\ln a = 2\pi \cdot n$
eller $\ln a = i\pi + 2\pi \cdot n$ vilket aldrig kommer
ske då a är ett positivt heltal. Det
gör att $e^{\ln a \cdot i}$ alltid kommer vara komplext.