

Övningsprov 1 - Ma3c

1. Derivera funktionerna och förenkla om möjligt

a) $f(x) = x^3 + 1$

b) $y = 2x + x^2$

c) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + x$

d) $y = \frac{3}{x} + 4$

e) $f(x) = x^{\frac{4}{5}} + 2\sqrt{x}$

f) $f(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}}$

g) $f(x) = ax^{a+1} + \frac{1}{x^b}$ (4/3/1)

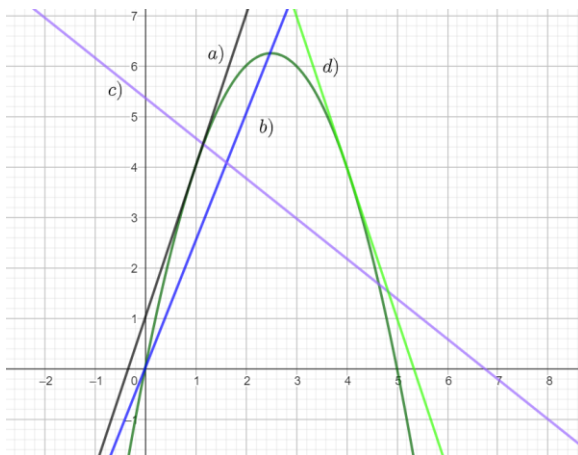
2. Bestäm om $f'(x)$ är större, lika med eller mindre än noll för funktionen $f(x) = x^2 - x$ för följande x -värden

a) $x = 1$

b) $x = -3$

c) $x = \frac{1}{2}$ (3/0/0)

3. Bestäm vilka räta linjer som är sekanters respektive tangenter för följande bild



(3/0/0)

4. Lös ekvationerna

a) $x^2 - 6x + 5 = 0$

b) $x^3 - 10x^2 + 16x = 0$

c) $(x^2 - 4)(x + 1) = 0$

d) $|y| = 7$

e) $|y - 3| = -1$

f) $|2x - 5| = x + 1$

g) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

h) $(\sqrt{x+1})^3 - 2(\sqrt{x+1})^2 + \sqrt{x+1} = 0$ (4/4/2)

5. Skriv följande uttryck i faktorform

a) $x^2 - 16$

b) $x^2 - 2x - 8$

c) $2x^2 + 2x - 12$

d) $x^3 - 4x^2 + 4x$ (3/2/0)

6. Bestäm gränsvärdet

a) $\lim_{x \rightarrow -2} 3x + 6$

b) $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^2 - 20x + 100}{x^2 - 100}$

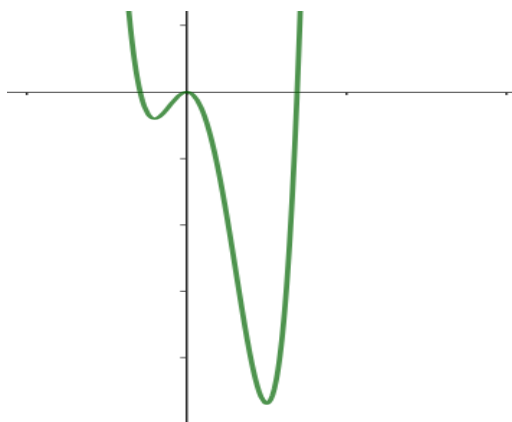
c) $\lim_{h \rightarrow \infty} 3 + \frac{h}{h^2} + h^{-3}$

d) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{7t - 12}{3t + 120}$

(1/2/2)

7. Bestäm medellutningen i intervallet $0 < x < 3$ för funktionen $f(x) = x^2$

8. Nedan ser du funktionen $f(x)$ hur många lösningar har ekvationen $f'(x) = 0$ och $f(x) = 0$



(1/1/0)

9. För vilka värden är det rationella uttrycket odefinierat?

- a) $\frac{2x+1}{x^2-16}$
- b) $\frac{x+143}{(x+1)(x-10)}$

(1/1/0)

10. Förenkla de rationella uttrycken

- a) $\frac{2x^2+4x}{x}$
- b) $\frac{2x^2+4x+2}{5x+5}$
- c) $\frac{x^3-9x}{x^2-3x}$
- d) $\frac{x^2+2x-15}{x^2-25}$

(3/3/0)

11. Ställ upp vilket gränsvärde du ska lösa för att bestämma derivatan för funktionen med hjälp av derivatans definition. *Notera du behöver inte lösa gränsvärdet **bara** ställa upp gränsvärdet*

- a) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$
- b) $f(x) = \sqrt{2x+1}$

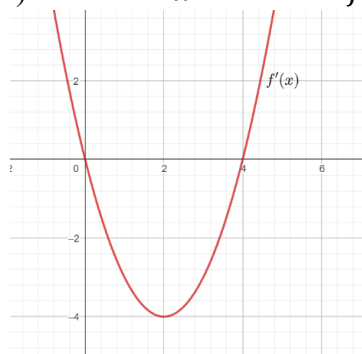
(0/2/0)

12. Nedan ser du derivata-funktionen $f'(x)$ för någon funktion $f(x)$

a) Vilken grad har funktionen $f(x)$?

b) Hur många extrempunkter har $f(x)$?

c) För vilka x -värden har $f(x)$ en maximipunkt eller minimipunkt?



(1/2/0)

13. Bestäm k -värdet för den tangent som tangerar funktionerna i $x = 4$

a) $f(x) = x^2 + x + 1$

b) $f(x) = \sqrt{x} + x$

(2/2/0)

14. Visa med hjälp av derivata att funktionen $f(x) = x^3 + 3x$ bara skär x -axeln en gång.

(0/2/0)

15. Lös ekvationen $f'(x) = -4$ för funktionen $f(x) = \frac{2}{x}$

(0/2/0)

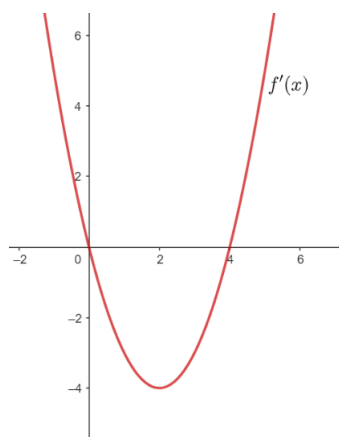
16. Bestäm derivatan för funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$ med hjälp av derivatans definition

(0/1/2)

17. Visa med hjälp av derivatans definition att funktionen $f(x) = \frac{1}{x+1}$ har derivatan $\frac{-1}{(x+1)^2}$

(0/1/2)

18. Nedan ser du grafen till derivatafunktionen för $f(x)$. Du vet att $f(0) = 12$. Undersök om $f(0) > f(4)$. Motivering krävs för fullständig poäng.



(0/0/1)

19. Undersök vilka värden som är möjliga för konstanterna a och b för att en funktion på formen $f(x) = ax^3 - bx$ ska ha exakt två lösningar på ekvationen $f'(x) = 0$

(0/1/1)

20. Visa att tangenterna som tangerar funktionen $f(x) = ax^5 - bx^3 + cx$ i $x = \pm q$ alltid är parallella.

(0/0/2)

21. För en andragsgradsfunktion $f(x)$ vet du att

- $f(-5) = 0$

- $f'(-1) = 0$

- $f'(1) = 8$

(0/0/2)

Bestäm funktionen $f(x)$

22. Bestäm ett exempel på en funktionen $f(x)$ som har följande samband för samtliga värden på a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1}{5}$$

Lösningstävling Övning 4 Proov 1

1. a) $f(x) = x^3 + 1$ b) $y = 2x + x^2$ c) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + x$
 $f'(x) = 3x^2$ $y' = 2 + 2x$ $f'(x) = 2 \cdot \frac{3}{2}x + 1$

$$= 3x + 1$$

d) $y = \frac{3}{x} + 4 = 3x^{-1} + 4$ e) $f(x) = x^{\frac{4}{5}} + 2\sqrt{x}$
 $y' = -3x^{-2} = -\frac{3}{x^2}$ $= x^{\frac{4}{5}} + 2x^{\frac{1}{2}}$ $f'(x) = \frac{4}{5}x^{\frac{4}{5}-1} + 2x^{\frac{1}{2}-1}$
 $= \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

f) $f(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}} = \frac{-1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^{3/2}}$
 $= \frac{1}{4x\sqrt{x}}$

g) $f(x) = a \cdot x^{a+1} + \frac{1}{x^b} = a \cdot x^{a+1} + x^{-b}$

$f'(x) = (a+1)a \cdot x^{a+1-1} - b \cdot x^{-b-1} =$
 $= (a+1)a \cdot x^a - b \cdot x^{-(b+1)} = (a+1)a \cdot x^a - \frac{b}{x^{b+1}}$

2. $f(x) = x^2 - x$ $f'(x) = 2x - 1$

3. a) och d) tangenter

c) och b) skärnader

a) $f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ $f'(1) > 0$

b) $f'(-3) = 2 \cdot (-3) - 1 = -7$ $f'(-3) < 0$

c) $f'(\frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$ $f'(\frac{1}{2}) = 0$

4. a) $x^2 - 6x + 5 = 0$

$x = 3 \pm \sqrt{9-5}$

$= 3 \pm \sqrt{4}$

$x_1 = 3 + 2 = 5$

$x_2 = 3 - 2 = 1$

4. b) $x^2 - 10x + 16 = 0$

$x(x^2 - 10x + 16) = 0$ $x_1 = 0$

$x = 5 \pm \sqrt{25-16}$

$= 5 \pm \sqrt{9}$

$= 5 \pm 3$ $x_2 = 2$

$x_3 = 8$

$x^2 - 10x + 16 = 0$

c) $(x^2 - 4)(x + 1) = 0$

$x^2 - 4 = 0$

$x + 1 = 0$

$x^2 = 4$

$x = -1$

$x_1 = 2$

$x_2 = -2$

$$4. d) |y| = 7 \quad y_1 = 7 \quad e) |y-3| = -1$$

$$y_2 = -7$$

Soluzioni (Söningar), inget absolutteknik
kan bli neg.

$$f) 12x - 5 = x + 1$$

$$\text{fall 1. } 2x - 5 = x + 1 \\ x = 6$$

$$\text{fall 2. } 2x - 5 = -(x + 1)$$

$$2x - 5 = -x - 1$$

$$3x = 4$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$g) x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

$x^2 = t$ substitution

$$t^2 - 10t + 9 = 0$$

$$t = 5 \pm \sqrt{8^2 - 9}$$

$$= 5 \pm \sqrt{16}$$

$$t = 5 \pm 4$$

$$t_1 = 9$$

$$t_2 = 1$$

$$x^2 = 9$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -3$$

$$x^2 = 1$$

$$x_3 = 1$$

$$x_4 = -1$$

$$b) (\sqrt{x+1})^3 - 2(\sqrt{x+1}) + \sqrt{x+1} = 0 \quad t = \sqrt{x+1} \text{ substitution}$$

$$t^3 - 2t^2 + t = 0$$

$$t(t^2 - 2t + 1) = 0 \quad t_1 = 0$$

$$0 = \sqrt{x+1} \\ x_1 = -1$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$t = 1 \pm \sqrt{1-1} \quad t_2 = 1$$

$$\sqrt{x+1} = 1$$

$$x = 0$$

$$5. a) x^2 - 16 = (x+4)(x-4)$$

$$b) x^2 - 2x - 8 \text{ lös } = 0 \text{ för att}$$

fö fram nåställen

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{1} = 1 \pm 3 \quad x_1 = 4, x_2 = -2$$

$$x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$$

$$c) x^2 + x - 6 \text{ lös } = 0$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6}$$

$$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}}$$

$$= -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \quad x_1 = 2$$

$$x_2 = -3$$

$$x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$$

$$d) x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x-2)^2$$

$$6. a) \lim_{x \rightarrow -2} 3x + 6 = -6 + 6 = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^2 - 20x + 100}{x^2 - 100} = \text{nåmnenen blir noll förutom!}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{(x-10)^2}{(x+10)(x-10)} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x-10}{x+10} = 0$$

$$6. c) \lim_{h \rightarrow \infty} 3 + \frac{h}{h^2} + h^{-3} = \lim_{h \rightarrow \infty} 3 + \frac{1}{h} + \frac{1}{h^3} \quad \frac{1}{h} \text{ och } \frac{1}{h^3} \text{ försummas då } h \rightarrow \infty$$

$$= 3$$

$$d) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{7t-12}{3t+120} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t(7-\frac{12}{t})}{t(3+\frac{120}{t})} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{7-\frac{12}{t}}{3+\frac{120}{t}} \quad \frac{12}{t} \text{ och } \frac{120}{t} \text{ försummas då } t \rightarrow \infty$$

7. Vi ställer upp förändringskvoten

$$\text{medellutning} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{3^2 - 0^2}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

Så, medellutningen är 3.

8. lösningar $f(x) = 0$, nollställen: 3 lösningar

lösningar $f'(x) = 0$, extrempunkter: 3 lösningar

$$9 a) \frac{2x+1}{x^2-16} \quad \text{odet. de nämnaren lika med noll}$$

$$x^2 - 16 = 0$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

$$b) \frac{x+143}{(x+1)(x-10)}$$

$$(x+1)(x-10) = 0$$

$$(x+1)(x-10) = 0$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = 10$$

$$10 a) \frac{2x^2+4x}{x} = \frac{x(2x+4)}{x} = 2x+4$$

$$b) \frac{2x^2+4x+2}{5x+5} = \frac{2(x^2+2x+1)}{5(x+1)} = \frac{2(\cancel{x+1})^2}{5(\cancel{x+1})} = \frac{2x+2}{5}$$

$$c) \frac{x^3-9x}{x^2-3x} = \frac{\cancel{x}(x^2-9)}{\cancel{x}(x-3)} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)} = x+3$$

$$d) \frac{x^2+2x-15}{x^2-25} = \frac{\overset{\text{faktorform}}{x^2+2x-15}}{(x+5)(x-5)} = \frac{(x+6)(x-3)}{(x+5)(x-5)} = \frac{x-3}{x-5}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{1+15}$$

$$-1 \pm 4 \quad x_1 = -5 \quad x_2 = 3$$

$$11 \ a) \ f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{h} \quad b) \ f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2(x+h)+1} - \sqrt{2x+1}}{h}$$

$$12 \ a) \ 3 \quad b) \ 2 \quad c) \ x=0 \quad x=4$$

maxi minimi
funktions funktion
derivative

$$13. \ a) \ f(x) = x^2 + x + 1 \quad f'(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$$

$$f'(x) = 2x + 1 \quad \text{Svar: } f'(4) = 9$$

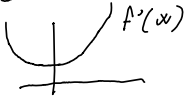
$$b) \ f(x) = \sqrt{x} + x = x^{\frac{1}{2}} + x$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 1 = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 \quad f'(4) = \frac{1}{2 \cdot 2} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$\text{Svar: } f'(4) = \frac{5}{4}$$

$$14 \ f(x) = x^3 + 3x \quad f'(x) = 3x^2 + 3 \quad \text{derivatan är alltid positiv}$$

därför står den
x-axeln bara en
gång



$$15. \ f(x) = \frac{2}{x} \quad f'(x) = -2x^{-2} = -\frac{2}{x^2} \quad f'(x) = -4$$

$$-4 = -\frac{2}{x^2} \quad x^2 = \frac{1}{2}$$

$$-4x^2 = -2 \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$16. f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h)^2 + b(x+h) + c - (ax^2 + bx + c)}{h}$$

Alla ord och grad - funktioner

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{ax^2} + 2axh + \cancel{ah^2} + \cancel{bx} + bh + \cancel{c} - \cancel{ax^2} - \cancel{bx} - \cancel{c}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2axh + ah^2 + bh}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(2ax + ah + b)}{\cancel{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} 2ax + ah + b = 2ax + b$$

□

$$17. f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h+1} - \frac{1}{x+1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x+1}{(x+1)(x+h+1)} - \frac{(x+h+1)}{(x+1)(x+h+1)}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x+1} - \cancel{x} - h - \cancel{x}}{(x+1)(x+h+1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{(x+1)(x+h+1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(x+1)(x+h+1)} = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

18. Eftersom $f'(x) < 0$ mellan $0 < x < 4$, alltså
har $f(x)$ en nedåtgående trend därför bör $f(0) > f(4)$

□

19. $f(x) = ax^3 - bx$ Vi vill ha 2 lösningar för $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 3ax^2 - b \quad 3ax^2 - b = 0$$

$$x^2 = \frac{b}{3a} \quad \text{två lösningar om } a \text{ och } b$$

har samma tecken alltså
båda måste vara positiva eller
negativa

$$20. f(x) = ax^5 - bx^3 + cx$$

$$f'(x) = 5ax^4 - 3bx^2 + c$$

$$f'(7) = 5a7^4 - 3b7^2 + c$$

$$f'(-7) = 5a(-7)^4 - 3b(-7)^2 + c = 5a7^4 - 3b7^2 + c$$

$f(7) = f(-7)$ Sætt, de har samme k -værdi tangenten

□

$$21. f(x) = ax^2 + bx + c \quad f'(x) = 2ax + b$$

$$f(-5) = 0$$

$$f'(-1) = -2a + b = 0$$

$$-2a + b = 0 \quad \textcircled{I}$$

$$f'(-1) = 0$$

$$f'(1) = 2a + b = 8$$

$$2a + b = 8 \quad \textcircled{II}$$

$$f'(1) = 8$$

$$\textcircled{I} - 2a + b = 0$$

$$b = 2a$$

$$\textcircled{II} 2a + b = 2a + 2a = 8$$

$$4a = 8$$

$$a = 2$$

$$b = 4$$

$$f(x) = 2x^2 + 4x + c$$

$$f(-5) = 0$$

$$2 \cdot (-5)^2 - 20 + c = 0$$

$$c = -30 \quad \text{Så er } f(x) = 2x^2 + 4x - 30$$

22. Tili eksempel $f(x) = \frac{x}{5} + 1$ eftersom derivator
alltid skal være $\frac{1}{5}$ uanset hvilket x man sætter
in.