



Integrationsmetoder

Innehåll

Inledning	2
Implicit Derivering	3
Volymberäkning med cylindriska skal	4
Arcustangens	6
Partialintegration	7
Variabelsubstitution	8
Integration av rationella funktioner	9



Integrationsmetoder

Inledning

Idén med detta extramaterial är att ge er en liten försmak på en del av innehållet i universitetskursen Envariabelanalys. Tonvikten här ligger på olika integrationsmetoder, men vi tar även upp implicit derivering och ytterligare en metod för volymberäkning. Metoden med cylindriska skal.

All teori finns i denna text och förhoppningen är att ni med hjälp av teorin skall kunna ta er an uppgifterna. Uppgifterna i sin tur finns i en separat fil.

Var och en av er kommer att få några uppgifter att lösa, varav en del kommer att vara identiska. Ni får såklart gärna hjälpas åt, men redovisningen är individuell.



Integrationsmetoder

Implicit Derivering

För många uttryck kan y vara en funktion av x även om man inte har ett explicit uttryck för y som funktion av variabeln x . Det kan var svårt eller omöjligt att lösa ut y . Ändå kan man ibland, bestämma $y'(x)$ för åtminstone vissa x -värden.

Med implicit menas att funktionen inte är given på det "vanliga" explicita sättet med ett y i vänsterledet och ett uttryck med enbart x i högerledet, även om det naturligtvis också går bra. Man brukar ibland säga att *i implicita funktioner är y intrasslad*. Det finns ingen specifik "formel" som man använder utan detta är istället en annan metod, en ny metod att derivera.

Notera också att den implicita derivatan är avgörande för att kunna lösa differentialekvationer. De beskriver ju hur en kvantitet relaterar till dess förändringshastighet.

Implicit derivering kan upplevas som något förvirrande, men det viktigaste och enda som man behöver komma ihåg är vilken variabel som betraktas som en funktion (oftast y) och vilken variabel man deriverar med avseende på (oftast x) och därefter går metoden kort och gott ut på att vi deriverar "båda sidorna av lika-med-tecknet", och absolut inte glömmer den inre derivatan!

Alla de vanliga deriveringsreglerna gäller, men notera att eftersom även y är en funktion av x så blir exempelvis derivatan av y^2 med avseende på x

$$D(y^2) = 2yy'$$

där $2y$ är den yttre derivatan och y' den inre.

Exempel: Vi illustrerar metoden med ett känt exempel.

Derivera funktionen $y = \sqrt{x}$ implicit. Denna funktion kan vi ju lätt derivera på vanligt sätt och får då att $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Hur går det då till att derivera den implicit.

Börja med att kvaderar båda sidorna.

$$y^2 = x$$

derivera nu *båda* sidorna med avseende på x . Vi får

$$2yy' = 1$$

Lös ut den sökta derivatan y'

$$y' = \frac{1}{2y}$$

men eftersom $y = \sqrt{x}$ får vi nu också att

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

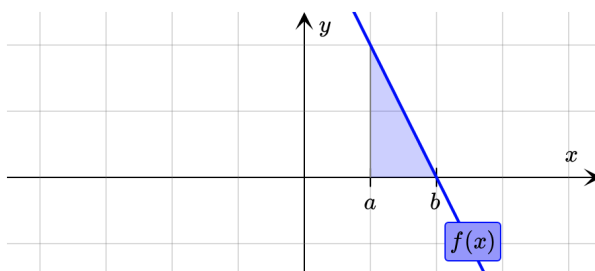


Integrationsmetoder

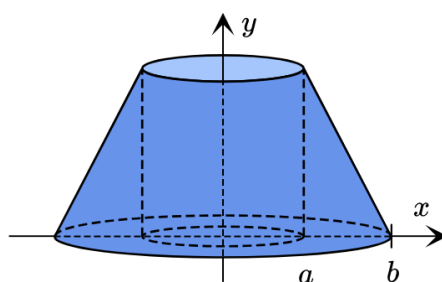
Volymberäkning med cylindriska skal

Skalmetoden är en metod för att beräkna volymer av rotationskroppar och används främst för kroppar som uppkommer genom att rotera områden kring y-axeln.

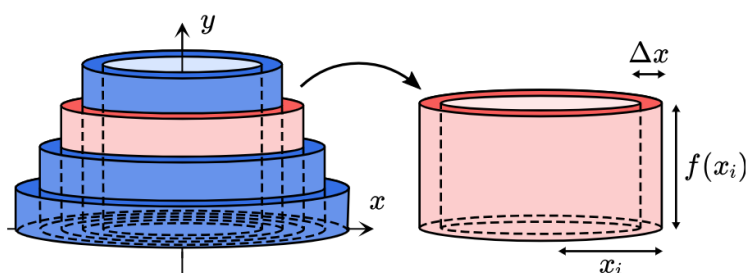
Området som roteras finns mellan grafen till funktionen $f(x)$ och x-axeln, från $x = a$ till $x = b$. Till exempel kan det markerade området i figuren nedan roteras kring y-axeln.



Vi får då en konliknande kropp med ett cylinderformat hål i mitten.



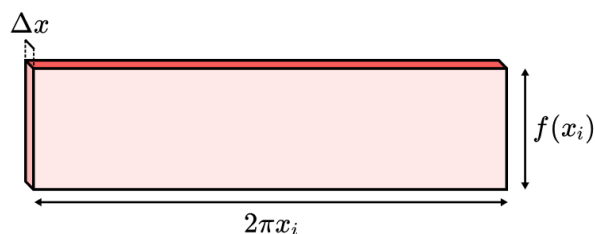
Det går nu att approximera volymen av den här kroppen genom att dela in den i ett antal cylindriska skal. Dessa har tjockleken Δx , radien x_i och höjden $f(x_i)$. Detta illustreras i figuren nedan, där ett av skalen har ritats separat.





Integrationsmetoder

Om man öppnar detta skal och vecklar ut det får man en form som ungefärligt kan beskrivas av ett rätblock med tjockleken Δx och höjden $f(x_i)$. Längden är cylinders omkrets, $2\pi r$, och eftersom radien är x_i blir den $2\pi x_i$.



Volymen för det här rätblocket blir $2\pi x_i \cdot f(x_i) \cdot \Delta x$ och lägger man ihop alla dessa rätblock får man en summa som approximerar volymen för hela rotationskroppen:

$$V \approx 2\pi x_1 \cdot f(x_1) \cdot \Delta x + 2\pi x_2 \cdot f(x_2) \cdot \Delta x + \dots + 2\pi x_n \cdot f(x_n) \cdot \Delta x$$

Genom att låta rätblockens volym och därmed skalens tjocklek gå mot 0, vilket också innebär att antalet skal går mot oändligheten, blir approximationen bättre och bättre och summan övergår till integralen för **Volymberäkning med cylindriska skal**

$$2\pi \int_a^b x \cdot f(x) \, dx \quad (1)$$



Integrationsmetoder

Arcustangens

Kännedom om derivatan till arcusfunktionerna är ofta användbart, speciellt arcustangens är väldigt bra att ha tillgång till då vi skall lösa integraler.

Vi vet sedan tidigare att

$$\begin{aligned}D \sin x &= \cos x \\D \cos x &= -\sin x \\D \tan x &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x\end{aligned}$$

Inversfunktionerna har alla egenskapen att

$$\begin{aligned}y = \arcsin x &\iff x = \sin y \quad \text{med ekvivalens om } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \\y = \arccos x &\iff x = \cos y \quad \text{med ekvivalens om } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \\y = \arctan x &\iff x = \tan y \quad \text{med ekvivalens om } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Derivatan för exempelvis arcsin kan härledas på följande sätt, där vi enligt räkneregler för inverser att

$$D \arcsin x = \frac{1}{D \sin y}$$

derivatan av sinus är cosinus

$$= \frac{1}{\cos y}$$

eftersom $\cos y$ är positiv i hela intervallet, vi har ju att $\sqrt{\cos^2 y} = |\cos y| = \cos y$, kan vi skriva

$$= \frac{1}{\sqrt{\cos^2 y}}$$

trigonometriska ettan ger nu

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

På motsvarande sätt kan vi också härleda derivatan för cosinus och tangens. Vi har då att

$$\begin{aligned}D \arcsin x &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \\D \arccos x &= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \\D \arctan x &= \frac{1}{1 + x^2}\end{aligned}$$



Integrationsmetoder

Partialintegration

Sats: Partialintegration

Låt f , g och g' vara kontinuerliga i intervallet $[a, b]$ och låt F vara en primitiv funktion till f i $[a, b]$. Då gäller att

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = \left[F(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x) \, dx \quad (2)$$

Bevis:

Detta resultat är en integrerad version av produktregeln för derivator. Produktregeln för derivator ger att

$$D(F(x) \cdot g(x)) = f(x)g(x) + F(x)g'(x)$$

Integrerar vi denna likhet får vi

$$\int_a^b D(F(x) \cdot g(x)) \, dx = \int_a^b f(x)g(x) \, dx + \int_a^b F(x)g'(x) \, dx$$

Notera att

$$\int_a^b D(F(x) \cdot g(x)) \, dx = \left[F(x)g(x) \right]_a^b$$

Efter omskrivning får vi resultatet

$$\int_a^b f(x)g(x) \, dx = \left[F(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x) \, dx \quad \square$$

Vi illustrerar med ett exempel

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^2 \ln x \, dx &= \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \left(\frac{8}{3} \cdot \ln 2 - \frac{1}{3} \cdot \ln 1 \right) - \left[\frac{x^3}{9} \right]_1^2 \\ &= \frac{8}{3} \cdot \ln 2 - \frac{7}{9} \end{aligned}$$



Integrationsmetoder

Variabelsubstitution

Variabelsubstitution är den absolut mest frekvent använda integrationsmetoden. Så fort ett uttryck blir det minsta svårt så kan det ofta vara möjligt att använda sig av en enkel substitution för att komma vidare med problemet. Det som kan vara lite klurigt inledningsvis är att byta intervall när man gör substitutionen, men det kommer med lite träning.

Det finns inga formler eller regler för hur man gör detta, utan det är en metod man använder och följer.

Fram tills nu har det sista ” dx ” som alltid finns med i integraler inte spelat något större roll. Men med denna metod blir det helt avgörande att hålla koll på hur den förändras och utvecklas.

Vi illustrerar med ett exempel.

Beräkna värdet av integralen I

$$I = \int_0^2 \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

Vi gör nu en variabelsubstitution genom att införa den nya variabeln t och låta $t = x^2 + 1$. Derivatans av t med avseende på x blir då $\frac{dt}{dx} = 2x$. Vi sammanfattar variabelsubstitutionen med skrivsättet.

$$\left[\begin{array}{l} t = x^2 + 1 \\ dt = 2x dx \end{array} \right] \quad (\text{variabelsubstitution})$$

observera att även integrationsgränserna påverkas av substitutionen

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \implies t = x^2 + 1 = 0^2 + 1 = 1 \\ x = 2 \implies t = x^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5 \end{array} \right] \quad (\text{integrationsgränserna})$$

vi får alltså

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=0}^{x=2} \frac{x}{x^2 + 1} dx = \int_{t=1}^{t=5} \frac{1}{2t} dt & \text{OBS!} \quad \left(x dx = \frac{1}{2} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln t \right]_1^5 = \frac{1}{2} \ln 5 \end{aligned}$$



Integrationsmetoder

Integration av rationella funktioner

Problemet att finna en primitiv funktion när integranden är en rationell funktion kan delas upp i fyra steg. Låt $g(x)$ och $h(x)$ vara reella polynom och betrakta den rationella funktionen

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

För att bestämma en primitiv till $f(x)$ arbetar vi efter följande schema:

Steg I: Om $\text{grad}(g) \geq \text{grad}(h)$ utför polynomdivision av $g(x)$ med $h(x)$. Det innebär att $f(x)$ kan framställas på formen

$$f(x) = q(x) + \frac{r(x)}{h(x)}, \text{ där } \text{grad}(r) < \text{grad}(h)$$

där q är ett polynom.

Steg II: Faktorisera nämnaren så långt som möjligt i reella faktorer. Om nämnaren kan faktoriseras så gör vi en så kallad *partialbråksuppdelning*. Om inte så behöver vi istället göra kvadratkomplettering och variabelsubstitution.

Steg III: Gör en uppdelning av kvoten $\frac{r(x)}{h(x)}$ i partialbråk.

Steg IV: Beräkna primitiva funktioner till partialbråken.

Exempel på hur partialbråksuppdelning går till i praktiken. Dela upp $\frac{1}{x^2+x}$ i två bråk.

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

gemensam nämnare

$$\begin{aligned} &= \frac{A(x+1)}{x(x+1)} + \frac{Bx}{x(x+1)} = \frac{A(x+1) + Bx}{x(x+1)} \\ &= \frac{(A+B)x + A}{x(x+1)} \end{aligned}$$

detta ger att

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ A &= 1 \end{aligned}$$

vi har då att

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

Vilket underlättar en eventuell integration avsevärt.