Övningsprov 2 – Ma2c

Utan miniräknare

1. Lös ekvationerna, svara exakt

a) $10^x = 18$

b) $x^{10} = 30$

c) $lgx = 6$

d) $3^x = 14$

e) $\left(\frac{2}{7}\right)^x = 21$

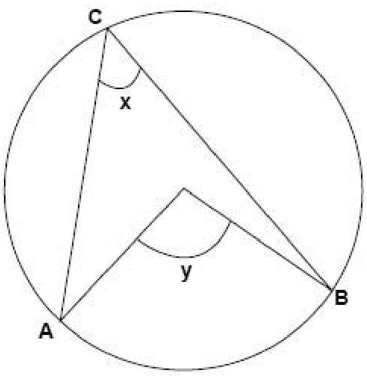
f) $3^{2x} - 4 = 9$

g) $lg(2x + 2) = 2$

h) $10^{-lgx} = 5$

(6/3/0)

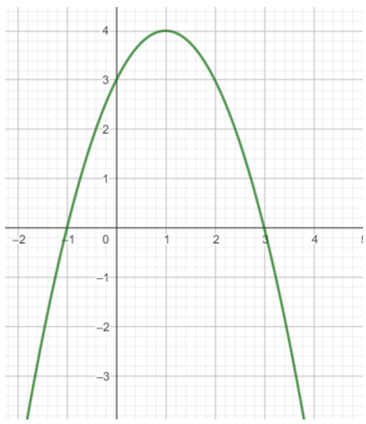
2. Om $y = 110°$ bestäm då x



(1/0/0)

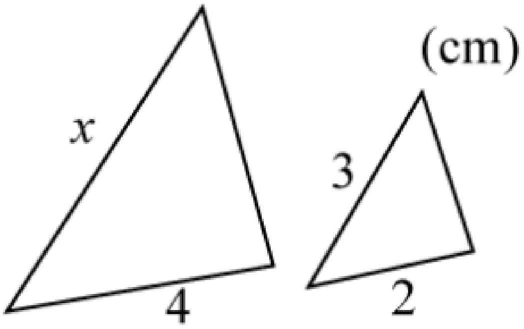
3. Nedan ser du ser du en andragradsfunktion på formen $f(x) = ax^2 + bx + c$ bestäm följde

a) Funktionens nollställen
b) Funktionens symmetrilinje
c) $f(2)$
d) $f(x) = 4$
e) Funktionens extremvärde



(4/1/0)

4. Trianglarna i likformiga. Bestäm sidan x



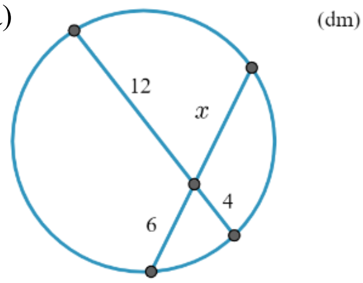
(2/0/0)

5. Bestäm nollställena och extremvärdet för funktionen $f(x) = x^2 + 2x - 8$ algebraiskt

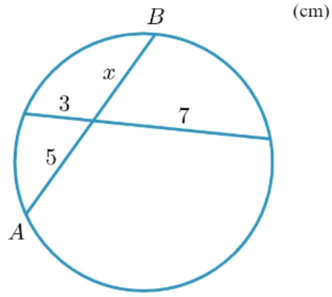
(2/1/0)

6. Bestäm sträckan x

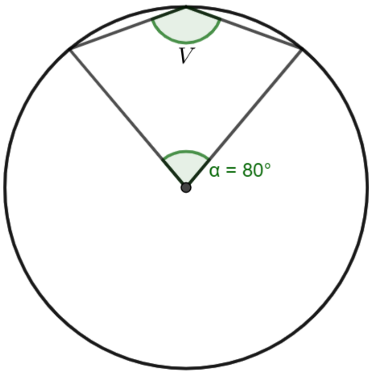
a)



b)



7. Bestäm vinkeln V



(1/1/0)

8. Skriv =>, <= eller <=> i rutorna så det stämmer med påståendena

a) Talet a är ett jämnt tal Talet a är ett tal som är delbart med 2

b) Joakim har läst 3 böcker i år Joakim har läst 2 böcker i år

c) $3x + 2 = 11$ $\quad$ $x = 3$

d) $x^4 = 16$ $\quad$ $x = -2$

e) Funktionen $f(x)$ har symmetrilinjen $x = 3$ $\quad$ Funktionen $f(x)$ har nollställen i $x = 1$ och $x = 5$

(3/1/0)

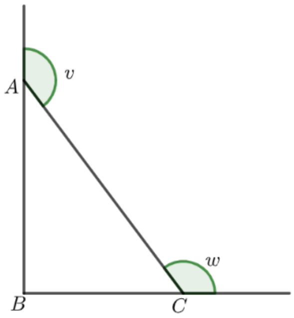
9. Skriv följande uttryck i storleksordning med det minsta först

10^{lg21} $\quad$ $lg4 + lg25 + lg10 + lg1$ $\quad$ $10^{lg350 - lg7}$ $\quad$ $lg400 - 2 \cdot lg2$

(1/1/0)

10. Triangeln ABC är rätvinklig.

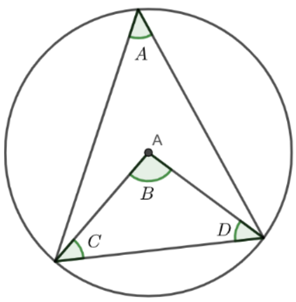
Visa att $v + w = 270°$



(0/2/0)

11. Lös ekvationen $10^{lg(2x)} + 10^{lg5} = 3x + lg10$ genom att först förenkla (1/1/0)

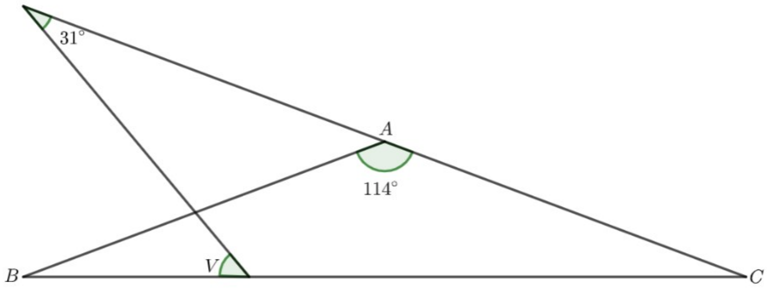
12. I figuren nedan vet du att vinkeln D är 30 grader. Bestäm då vinkel A



(1/1/0)

13. Om du vet att $lg4 = 0,6$. Bestäm då värdet för följande uttryck $lg40^3$ (0/2/0)

14. Du vet att sträckan AB är lika med AC. Bestäm vinkeln V.



(1/1/0)

15. En andragradsfunktion på formen $f(x) = ax^2 + bx + c$ vi vet att $a > 0$ och att grafen till funktionen har nollställena $x_1 = 2$ och $x_2 = 6$.

Skriv följande funktionsvärden i storleksordning med den minsta först

$$f(5), f(1), f(8), f(-10)$$

(2/2/0)

16. En exponentiell funktion $f(x)$ har följande samband:

- $f(1) = 12$
- $f(3) = 3$

Bestäm funktionen $f(x)$ (0/1/1)

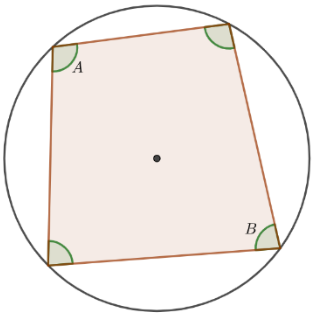
17. En andragradsfunktion har följande egenskaper
   - $f(a + 3)$ är en minimipunkt.
   - $f(a + 6)$ är ett nollställe

Bestäm $f(a)$ (0/0/1)

18. Richterskalan är ett sätt att mäta hur kraftig en jordbävning är. Forskaren Richter formulerade följande modell: $M = \frac{2}{3}(lgE - K)$ där M är magnituden och E är energin som frigörs samt K är en konstant. Lös ut E ur formeln.

(0/1/1)

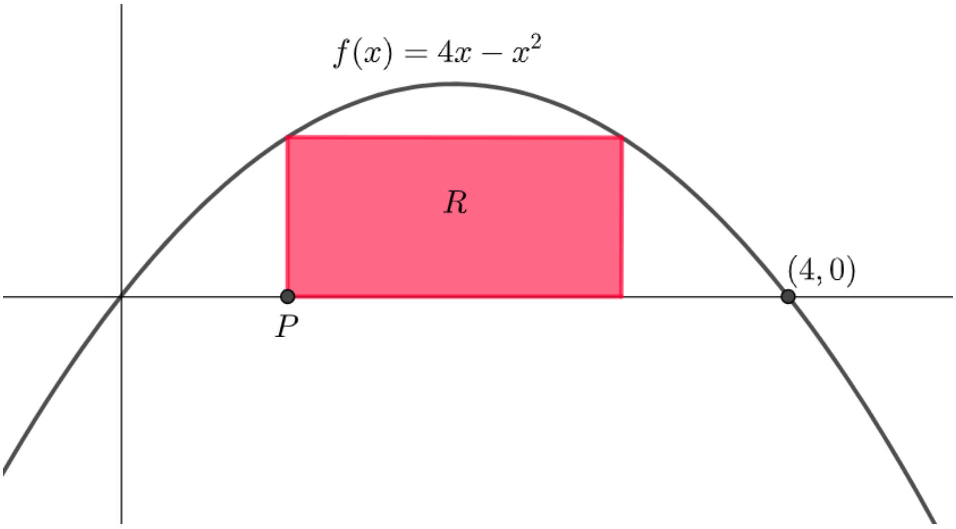
19. Visa att $A + B = 180°$ genom att använda randvinkelsatsen



(0/0/2)

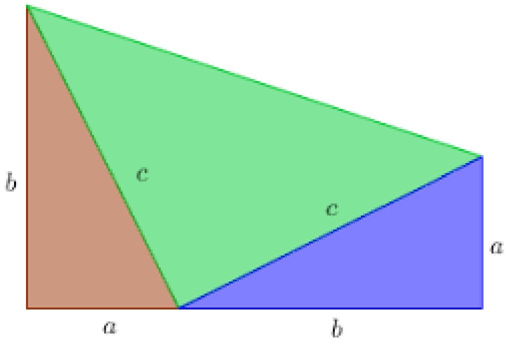
20. Under andragradsfunktion $f(x) = 4x - x^2$ placeras en rektangel som har bas längs med x-axeln och en höjd som når grafen till funktionen.

Visa att funktionen $O(x) = -2x^2 + 4x + 8$ kan användas för att bestämma omkretsen för rektangeln R om x är x-värdet för punkten P.



(0/1/2)

21. Den gamla presidenten J.A Garfield presenterade på 1800-talet ett bevis för Pytagoras sats. Han ritade följande bild.



Använd skissen för att bevis Pytagoras sats med hjälp av areor. (0/0/3)

Med miniräknare och geogebra

22. En liten by med 1000 personer växer befolkningen med 2% varje år.

a) Konstruera en funktion som beskriver förändringen i by-befolkningen
b) Efter hur många år har befolkningen tredubblats?

(3/0/0)

23. En ingenjör har gjort en modell för en bro. Hans modell går att beskriva med följande funktion $f(x) = -0{,}001x(x - 500)$. Där x är antalet meter längst med vattnet och y är höjden på bron från starten av bron. Bestäm följande

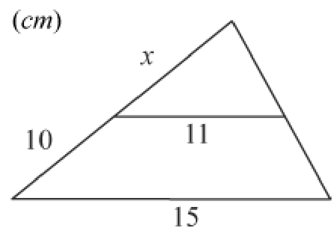
a) Hur långt längst med vattnet sträcker sig bron?
b) Hur högt når bron i förhållande till starten av bron?

(3/0/0)

24. Joakim har undersökt hur hans hund Bosse har växt de senaste 6 månaderna. Titta på statistiken nedan och en linjär funktion till Bosses tillväxt

$Vikt$	1,1	1,4	1,7	2,1	2,2	2,7
$Månad$	1	2	3	4	5	6

25. Bestäm sträckan x



(2/0/0)

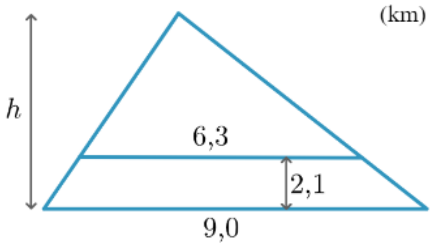
26. Hicks lag är en lag inom psykologin som visar på hur lång tid det tar för oss att ta ett beslut beroende på hur många alternativ vi har. Hicks lag för enklare beslut går att beskriva på följande sätt

$$R = 7{,}68 \cdot \lg{(n)}$$

där R är tiden i sekunder det tar för att ta ett beslut och n är antalet valbara möjligheter. Bestäm hur många valalternativ man har om ens beslutstid är 10 sekunder.

(1/1/0)

27. Bestäm höjden h



(0/2/0)

28. Turismen i världen har ökat stort sedan 1950. Nedan visas statistik på hur många människor som rest utomland under det specifika året. Anta att ökningen är exponentiell. Bestäm då vilket år den internationella turismen översteg 2 miljarder.

Internationell turism (miljoner)	25,5	528	1035
År	1950	1995	2005

(0/3/0)

29. En vattenspridare sprutar ut vatten på en cirkulär area. De vattendroppar som når längst skapar en cirkulär area på 10 kvadratmeter. Vattenbanan från vattenspridaren går att beskriva med hjälp av en andragradsfunktion. Anta att vattenspridaren <u>inte</u> sticker upp ur marken samt att vattnet når en maxhöjd på 0,4 meter. Bestäm funktionen som beskriver vattenspridarens längta vattenstrålar.

(0/0/2)

30. I en sjö med mycket föroreningar trivs torsken jättebra samtidigt som mörten mår väldigt dåligt. 2023 finns det 15 000 torskar i sjön och 30 000 mörtar. Man räknar med att mörten kommer minska med 5% varje år samtidigt som torsken kommer växa med 8% varje år. Efter hur många år kommer det finnas tre gånger så många torskar som mörtar i sjön?

(0/0/2)

31. Joakim har ett bageri som säljer semlor. Han har bara haft problem med att sätta pris på semlorna. Han anställde då en matematiker som skulle titta på försäljningsstatistiken och har komma fram till det bästa priset för att maximera vinsten.

a) Matematikern tog fram funktionen $V(p) = -0{,}1p^2 + 8p - 70$ där $V(p)$ beskriver vinsten i tusen kr beroende på vilket pris p Joakim sätter på semlorna. Vilken är den maximala vinsten Joakim kan få ut?

b) Joakim skrev tillbaka till matematikern och frågade hur han fick fram funktionen. Matematikern svarade då med följande mail:

Ämne Min matematiska funktion

Hej Joakim,

Vinstfunktionen borde följa en andragradsfunktion.

Jag noterade att det kostade dig 70 tusen att producera semlorna.

Jag noterade också att om du satte priset 20 kr per semla skulle du tjäna 50 tusen och att den maximala vinsten nåddes vid 40 kr.

Sen var det ganska lätt att ta fram funktionen.

Mvh Matematikern.

Visa hur matematikern fick fram sin funktion. Kom ihåg att bara utgå från informationen matematikern utgick ifrån i mailet.

(1/1/2)

Lösningar övningsprov 2

1. a) $10^x = 18$
$x = \lg 18$

b) $x^{10} = 30$
$x = \pm(30)^{\frac{1}{10}}$

c) $\lg x = 6$
$x = 10^6 = 1000000$

d) $3^x = 14$
$\lg 3^x = \lg 14$
$x \cdot \lg 3 = \lg 14$
$x = \frac{\lg 14}{\lg 3}$

e) $\left(\frac{2}{7}\right)^x = 21$
$\lg\left(\frac{2}{7}\right)^x = \lg 21$
$x \cdot \lg\left(\frac{2}{7}\right) = \lg 21$
$x = \frac{\lg 21}{\lg\left(\frac{2}{7}\right)}$

f) $3^{2x} - 4 = 9$
$3^{2x} = 13$
$\lg 3^{2x} = \lg 13$
$2x \cdot \lg 3 = \lg 13$
$x = \frac{\lg 13}{2 \cdot \lg 3}$

g) $\lg(2x+2) = 2$
$2x+2 = 10^2$
$2x = 98$
$x = 49$

h) $10^{-\lg x} = 5$
$\frac{1}{10^{\lg x}} = 5$
$\frac{1}{x} = 5$ $\quad x = \frac{1}{5}$

2. $x = 55°$

3. a) $x_1 = -1$ $\quad x_2 = 3$ $\quad$ b) $x = 1$ $\quad$ c) $f(2) = 3$ $\quad$ d) $f(x) = 4$
$x = 1$

e) $y = 4$

4. $\frac{x}{3} = \frac{4}{2}$
$x = 6$

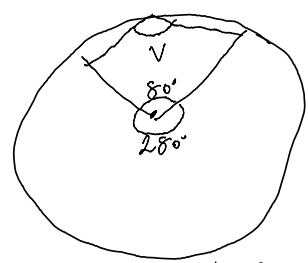
5. $f(x) = x^2 + 2x - 8$ $\quad f(x) = 0$ för nollställen
$x^2 + 2x - 8 = 0$
$x = -1 \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + 8}$
$= -1 \pm \sqrt{9}$
$= -1 \pm 3$
symmetrilinje!

$x_1 = 2$ $\quad x_2 = -4$
Extremvärde $f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 8$
$= 1 - 2 - 8 = -9$

6. a) $12 \cdot 4 = x \cdot 6$
$x = 8$

b) $5 \cdot x = 3 \cdot 7$
$x = \frac{21}{5}$

7.



Randvinkelsatsen!
$v = \frac{280°}{2} = 140°$

8. a) $\Leftrightarrow$ $\quad$ b) $\Rightarrow$ $\quad$ c) $\Leftrightarrow$

d) $\Leftarrow$

9. $10^{\lg 21} = \underline{21}$

$\underbrace{\lg 4 + \lg 25} + \underbrace{\lg 10}_{=1} + \underbrace{\lg 1}_{=0} = \underline{3}$

$= \lg 4 \cdot 25$

$= \lg 100 = 2$

$10^{\lg 350 - \lg 7} = 10^{\lg \frac{350}{7}}$

$= 10^{\lg 50} = \underline{50}$

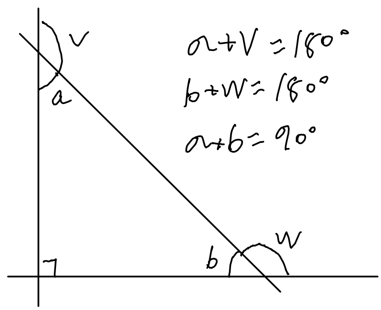
$\lg 400 - 2 \cdot \lg 2$

$= \lg 400 - \lg 2^2$

$= \lg 400 - \lg 4$

$= \lg 100 = \underline{2}$

10.



$a + v = 180°$

$b + w = 180°$

$a + b = 90°$

$a + v + b + w = 360°$

$v + w + 90° = 360°$

$v + w = 270°$

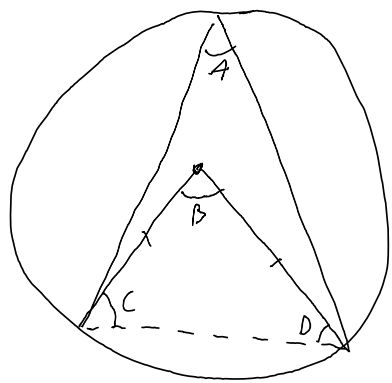
□ V.S.V

11. $\underbrace{10^{\lg(2x)}}_{=2x} + \underbrace{10^{\lg 5}}_{=5} = 3x + \underbrace{\lg 10}_{=1}$

$2x + 5 = 3x + 1$

$x = 4$

12.



$C = D$ (ligebenet)

$B = 180° - 2 \cdot 30°$

$B = 120°$ $\quad A = \frac{B}{2}$

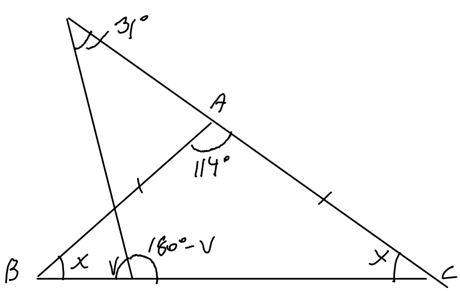
$A = \frac{120°}{2} = 60°$

13. $\lg 4 = 0{,}6$

$\lg 40^3 = 3 \cdot \lg 40 = 3 \cdot \lg 4 \cdot 10 = 3(\lg 4 + \lg 10)$

$= 3 \cdot \lg 4 + 3 \cdot \lg 10 = 3 \cdot 0{,}6 + 3 \cdot 1 = 1{,}8 + 3 = 4{,}8$

14



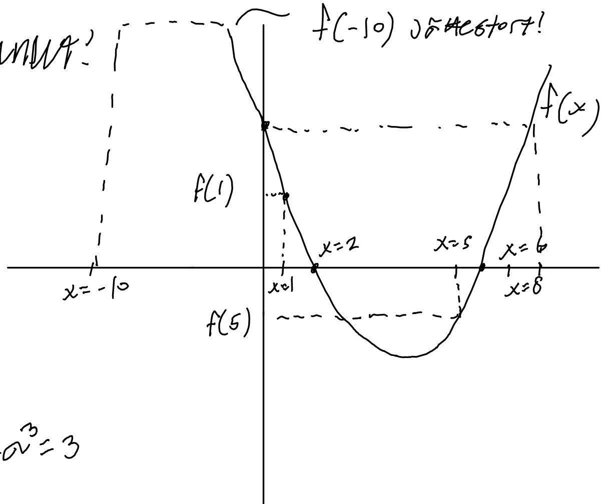
$2x = 66°$

$x = 33°$

$180° - v + 31° + 33° = 180°$

$v = 64°$

15. $a > 0$ minimipunkt!



$f(5), f(1), f(8), f(-10)$

16. $f(x) = Ca^x$

$f(1) = Ca^1 = 12$ $\quad f(3) = Ca^3 = 3$

$Ca = 12$

$$\begin{cases} Ca = 12 & \text{(I)} \\ Ca^3 = 3 & \text{(II)} \end{cases} \qquad Ca = 12, \quad C = \frac{12}{a}$$

(II) $C \cdot a^3 = 3$

$\frac{12}{a} \cdot a^3 = 3$

$12a^2 = 3$

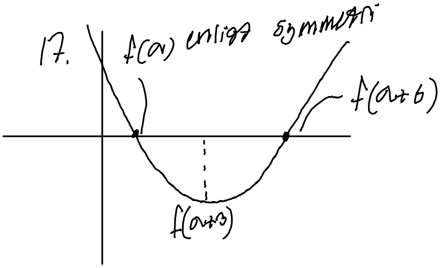
$a^2 = \frac{1}{4}$

$a = (\pm)\frac{1}{2}$

$C = \frac{12}{a} = \frac{12}{\frac{1}{2}} = 24$

Svar: $f(x) = 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

17.



$f(a) = 0$

18. $M = \frac{2}{3}(\lg E - k)$

$M = \frac{2}{3}\lg E - \frac{2k}{3}$

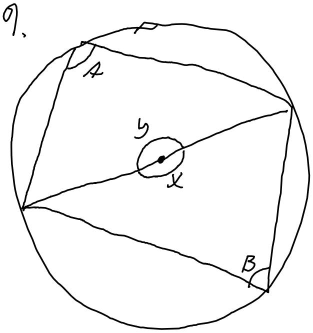
$M + \frac{2k}{3} = \frac{2}{3}\lg E$

$$\frac{M + \frac{2k}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)} = \lg E$$

$\frac{3M}{2} + k = \lg E$

$E = 10^{\frac{3M}{2} + k}$

19.



Använd randvinkel och medelpunkts-vinkel?

$2A = x$

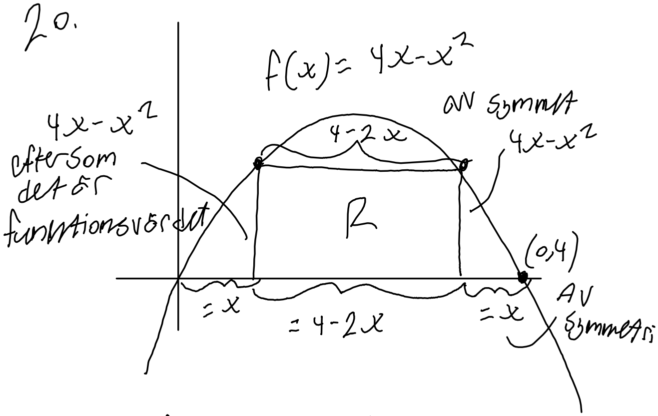
$2B = y$

$x + y = 2A + 2B = 360°$

$2(A+B) = 360°$

$A + B = 180°$ $\square$

20.



Vi får omkretsen

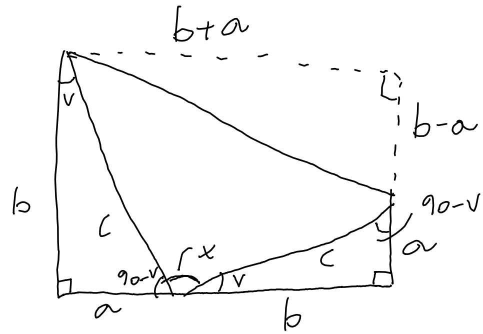
$2(4x - x^2) + 2(4 - 2x) =$

$= 8x - 2x^2 + 8 - 4x =$

$-2x^2 + 4x + 8$

stämmer med $O(x)$

21



$$180° = 90° - v + x + v$$

$$180° = 90° + x$$

$$x = 90°$$

räkna på area!

Area av hela rektangeln:

$$(b+a) \cdot b = b^2 + ab$$

Area av hela rektangeln med trianglarna

$$\frac{a \cdot b}{2} + \frac{a \cdot b}{2} + \frac{c^2}{2} + \frac{(b+a)(b-a)}{2}$$

$$= ab + \frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

Areorna är samma

$$b^2 + \cancel{ab} = \cancel{ab} + \frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$$\frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2} = \frac{c^2}{2}$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \square$$

22. a) $f(x) = 1000 \cdot 1{,}02^x$

b) $f(x) = 3000$

$$3000 = 1000 \cdot 1{,}02^x$$

$$3 = 1{,}02^x$$

$$\lg 3 = \lg 1{,}02^x$$

(gör att lösa med lös-funktion på geogebra också!

$$x = \frac{\lg 3}{\lg 1{,}02} \approx 55{,}4$$

Svar: ungefär 55 år

23. Använd geogebra!

a) Sök nollställen

$x_1 = 0 \quad x_2 = 500$

Svar: 500 meter

b) Sök extremvärde

$y = 62.5$ Svar: 62.5 meter

24. $y = 0{,}3x + 0{,}78$

25. Topptriangelsatsen

$$\frac{x+10}{x} = \frac{15}{11}$$

$$11x + 110 = 15x$$

$$4x = 110$$

$$x = 27{,}5$$

Svar: $x = 27{,}5$ cm

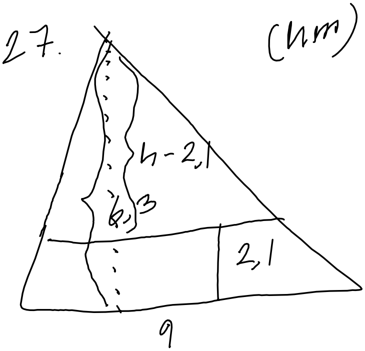
26. $7{,}68 \cdot \lg x = R$ $\quad R = 10$

$7{,}68 \cdot \lg x = 10$

$\lg x = \frac{10}{7{,}68}$

$x = 10^{\frac{10}{7{,}68}} \approx 20$ svar: 20 svarsalternativ

27. (km)



$\frac{h}{(h-2{,}1)} = \frac{9}{6{,}3}$ korsmulti

$6{,}3h = 9h - 18{,}9$

$2{,}7h = 18{,}9$

$h = \frac{18{,}9}{2{,}7} = 7$ svar: 7km

28. Anpassa en exponentiell funktion till statistiken

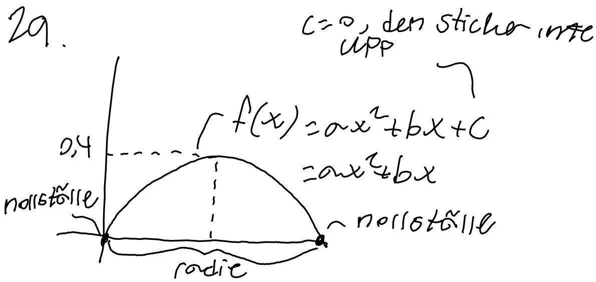
$f(x) = Ca^x$ ~~sätt~~ 1950 som är noll!

$f(x) = 25{,}5 \cdot 1{,}07^x$ lös ekvationen $f(x) = 2000$

$25{,}5 \cdot 1{,}069^x = 2000$ lös-funktionen i geogebra

$x \approx 65$ svar: 2015 översteg turismen 2 miljarder

29.



Hitta funktionen

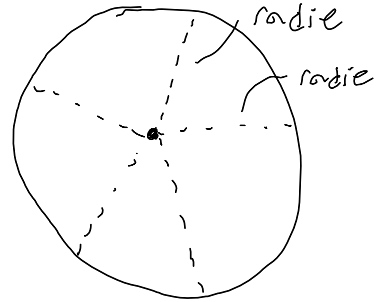
Vi får då ett samband

vi vet att $f(0)=0$

$f\left(\sqrt{\frac{10}{\pi}}\right) = 0$ samt att

$f\left(\frac{\sqrt{\frac{10}{\pi}}}{2}\right) = 0{,}4$ Vi kan lösa detta algebraiskt eller använda regressionsanalys

Med regressionsanalys får vi $f(x) = -0{,}5x^2+0{,}9x$



Area cirkel: $10 m^2$

Area cirkel: $A = r^2 \cdot \pi$

$10 = r^2 \cdot \pi$

$r^2 = \frac{10}{\pi}$

$r = (\pm)\sqrt{\frac{10}{\pi}}$

Om man vill lösa det algebraiskt får vi lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} a \cdot \left(\sqrt{\frac{10}{\pi}}\right)^2 + b \cdot \sqrt{\frac{10}{\pi}} = 0 \\ a \cdot \left(\frac{\sqrt{\frac{10}{\pi}}}{2}\right)^2 + b \cdot \frac{\sqrt{\frac{10}{\pi}}}{2} = 0{,}4 \end{cases}$$

30 Funktion för mört: $M(x) = 30000 \cdot 0{,}95^x$

Funktion för torsk: $T(x) = 15000 \cdot 1{,}08^x$

3 gånger så många torskar: $T(x) = 3 \cdot M(x)$

$15000 \cdot 1{,}08^x = 3 \cdot 30000 \cdot 0{,}95^x$

$15000 \cdot 1{,}08^x = 90000 \cdot 0{,}95^x$

$$\frac{1{,}08^x}{0{,}95^x} = \frac{90000}{15000}$$

Alternativt löser du den ekvationen med lös-funktionen på geogebra!

$$\left(\frac{1{,}08}{0{,}95}\right)^x = 6$$

$$\lg\left(\frac{1{,}08}{0{,}95}\right)^x = \lg 6$$

$$x = \frac{\lg 6}{\lg\left(\frac{1{,}08}{0{,}95}\right)} \approx 13{,}97$$

Svar: ungefär 14 år

31. a) sätt in funktionen V(p) i geogebra och undersök maximipunkten! Svariden maximala vinsten är 90 tusen

b) Vi utgår från en andragradsfunktion $V(p)=ap^2+bp+c$
vi får informationen att $V(0)=-70$, att $V(20)=50$ och att $V(60)=50$
extrempunkten ligger på $p=40$ det innebär att
enligt symmetrin i en andragradsfunktion

Vi kan lösa detta på två sätt regressionsanalys eller ekvationssystem

Regressionsanalys

Sätt in de kända punkterna i geogebra och vi får då

$V(p)=-0,1p^2+8p-70$

Ekvationssystem

$V(0)=-70$ ger $c=-70$

$V(20)=50$
$V(60)=50$
$\begin{cases} a\cdot 20^2+b\cdot 20-70=50 \\ a\cdot 60^2+b\cdot 60-70=50 \end{cases}$

Vi löser ekvationssystemet

och får $a=-0,1$ och $b=8$

Vi får $V(p)=-0,1p^2+8p-70$