Mahifi.se

Övningsprov 3 – Ma 5

Utan miniräknare

1. Lös differentialekvationerna och partikulärlösningen om ett begynnelsevillkor står

a) $y' = 4y, y(0) = 10$

b) $y' + 9y = 1$

c) $2\frac{dy}{dx} = 7y$

d) $y' + y = x + 5, y(0) = 20$

e) $2y' - 4y = 2x^2 - 6x$ (5/2/1)

2. Verifiera att följande funktioner är lösningar till differentialekvationerna som står i parentes bredvid

a) $y = 10e^{12x}$ $(y' - 12y = 0)$

b) $y = e^x - x^2 - 2x - 2$ $(y' = y + x^2)$ (3/0/0)

3. Bestäm de allmänna lösningarna till följande differentialekvationer

a) $y'' - 4y' - 5y = 0$

b) $y'' + 4y' + 4y = 0$

c) $y'' - 4y' + 5y = 0$

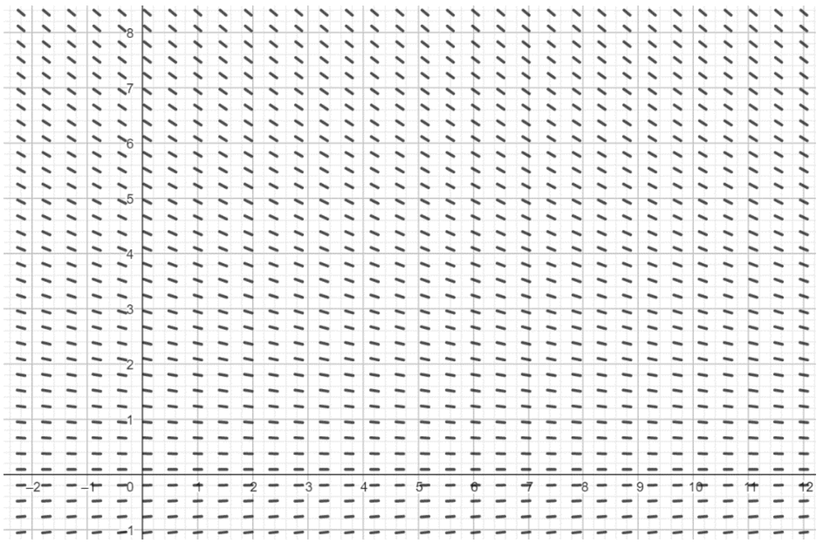
(5/1/0)

4. För differentialekvationen $y'' - 4y' + 4y = 0$ vet du att den går igenom punkterna $(0, 1)$ samt $(1, e)$. Bestäm partikulärlösningen till differentialekvationen.

(1/2/0)

5. Nedan ser du ett riktningsfält för lösningskurvorna till en differentialekvation.

a) Förklara varför differentialekvationen $y' - 5y = 0$ inte kan representerad i riktiningsfältet.
b) Skissa lösningskurvan som har begynnelsevillkoret $y(0) = 5$ (gör en ungefärlig skiss i ditt eget block)
c) Ge ett exempel på vilken differentialekvation vars allmänna lösning som skulle kunna vara representerad i riktningsfältet (behöver inte vara exakt)



(3/1/0)

6. En behållare innehåller 70 liter rent vatten och 30 liter färgmedel. Det tillförs en blandning med 80% färgmedel och 20% vatten med en hastighet av 10 liter/minut. Samtidigt lämnar blandningen i behållaren med hastigheten 12 liter/minut. Ställ upp en differentialekvation med nödvändiga villkor där $y(t)$ definierar mängden färg i behållaren efter t minuter.

(0/0/2)

7. Glukos förbrukas i kroppen med en hastighet som är proportionell mot mängden glukos i kroppen. Under en sjukdomsbehandling tillsätter också läkare β mängd glukos varje dag för att kunna stabilisera mängden glukos under tid eftersom det krävs för att Joakim ska bli frisk snabbt. Anta att Joakim har α mängd glukos i kroppen när han kommer in till sjukhuset.

   a) Ställa upp en differentialekvation som beskriver förändringen av glukos med nödvändiga definitioner

   b) Skriv ut den generella funktionen som beskriver hur mängden glukos förändras.

(0/0/3)

Mahifi.se

Med miniräknare och geogebra

8. Lös följande differentialekvationer med begynnelsevillkor med ditt digitala hjälpmedel

a) $y' = 0{,}34y,\ y(0) = 13$

b) $y' = -0{,}05(y - 14),\ y(0) = 40$ (4/0/0)

9. En bakteriekultur växer med en hastighet bakterier/dag som är proportionell mot mängden. Där proportionalitetskonstanten är 0,68.

a) Ställ upp en differentialekvation som beskriver sambandet

b) Om du vet att forskarna planterade 1200 bakterier från början. Hur många bakterier kommer det finnas efter en vecka.

(3/1/0)

10. En valpopulations tillväxthastighet går att beskriva med differentialekvationen $y' = 0{,}3y\left(1 - \frac{y}{1000}\right)$. Där y är antalet valar och x är antalet år.

a) 2023 fanns det 200 individer i populationen vad var tillväxthastigheten då?

b) Använd geogebra för att ta fram funktionen som beskriver antalet valar från 2023 (om antalet valar då är 200) och bestäm hur många individer det kommer finnas i populationen 2030.

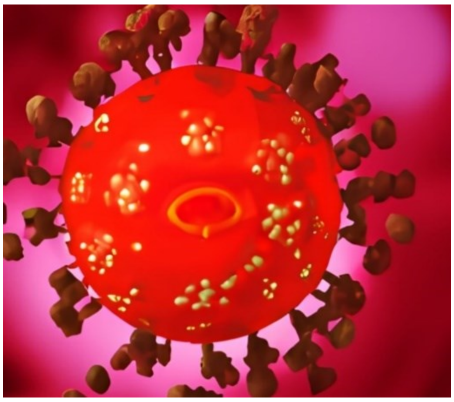
c) Vid hur många individer är tillväxthastigheten 50 individer/år?

(2/2/0)

11. En virussjukdom sprider sig snabbt i det lilla samhället Joakimköping med 10 000 invånare. Smitthastigheten är proportionell mot produktionen av antalet smittade och antalet icke-smittade. Du vet att smitthastigheten för smittade är 50 personer per dag då antalet smittade är 1000 personer.

a) Ställ upp en differentialekvation som beskriver sambandet med tydliga definitioner

b) Ungefär när räknar med att alla i samhället är smittade om det var 100 smittade från början.



(1/2/0)

12. Joakim har tagit fram en modell för hur ett föremål som har temperaturen $65\ °C$ kyls ner i ett kylskåp som är 9 grader Celsius. Hastigheten $°C/timme$ i vilket föremål tappar går är proportionell mot differensen mellan föremålets temperatur och temperaturen i kylskåpet med proportionalitetskonstanten -0,45.

   a) Ställ upp differentialekvationen för situationen.

   b) Efter hur många timmar är temperaturen 25 grader Celsius (0/3/0)

13. Joakims färgföretag ska experimentera fram ett nytt färgämne som kräver två ingredienser. Den ena är vatten och den andra är ett färgmedel som en forskare på företaget tagit fram. Experimentet är att de ska fylla en tank innehållande 100 liter vatten med färgmedel. Man tillför 5 liter färgmedel varje minut samtidigt som 5 liter blandning av vatten och färgämne lämnar tanken varje minut för att blandningen ska luftas för bästa resultat.

a) Formulera en differentialekvation som beskriver förändringshastigheten för färgmedlet i tanken.
b) Forskaren på företaget menar att det ska finnas 75% färgmedel i tanken för bästa resultat. Hur lång tid kommer det ta?

(1/3/1)

14. I Joakimsköping har stadens dystra profil gjort att antalet födslar och dödsfall i staden gör att befolkningsminskningen varje år är 3% av befolkningen. Samtidigt noterar man utvandringen från staden har ökat varje år med 2% och förväntas göra det i framtiden. 2025 är befolkningen 46 000 personer och utvandringen var 2000 personer.

a) Ställ upp en differentialekvation som beskriver situationen för Joakimsköping med tydliga definitioner.

b) Bestäm vilket år Joakimköping har 25 000 invånare.

(0/0/3)

15. Bonusfråga (ligger utanför kursens ramar men en intressant tillämpning på differentialekvationer)

Differentialekvationer kan användas för att beskriva relationer mellan till exempel arter i naturen. Om vi antar att ett område i naturen framförallt innehåller två arter vargar och rådjur. Enligt naturens lagar kommer vargarna livnära sig på rådjuren och därför kommer antalet rådjur respektive vargar påverkas av hur många det finns i respektive population. Man kan därför ställa upp ett system av differentialekvationer som beskriver hur antalet rådjur respektive vargar påverkar varandra. Nedan följder en förenklad modell som beskriver situationen. Beskriv hur modellen fungerar och skissa två grafer hur populationerna förändras utifrån modellen. $r(t)$ står för storleken på populationen för rådjur i tusental, $v(t)$ står för populationen för av vargar i tusental. Anta att $r(0) = 0{,}5$ och $v(0) = 0{,}2$

$$\begin{cases} r'(t) = 0{,}5r(t) - 0{,}3r(t) \cdot v(t) \\ v'(t) = -0{,}2v(t) + 0{,}1v(t) \cdot r(t) \end{cases}$$

Övningsprov 3

1. a) $y' = 4y \quad y(0) = 10$

$y' - 4y = 0 \quad y = Ce^{4x} \quad y(0) = 10 \quad y = 10e^{4x}$

b) $y' + 9y = 1$ Inhomogen! $y = y_h + y_p$ y_h ges då

$y' + 9y = 0 \quad y_h = Ce^{-9x}$ Anta $y_p = a$

$y_p' = 0$

$0 + 9a = 1 \quad a = \frac{1}{9}$

$y = y_h + y_p = Ce^{-9x} + \frac{1}{9}$

c) $2\frac{dy}{dx} = 7y \quad 2y' = 7y$

$y' - \frac{7y}{2} = 0 \quad y = Ce^{\frac{7x}{2}}$

d) $y' + y = x + 5$ Inhomogen $y = y_h + y_p$

y_h ges då $y' + y = 0 \quad y_h = Ce^{-x}$ Antag: $y_p = ax + b$

$y_p' = a$

$a + ax + b = x + 5$

$a = 1$

$a + b = 5 \quad b = 4 \quad y_p = x + 4 \quad y = y_h + y_p = Ce^{-x} + x + 4$

$y(0) = 20 \quad C + 4 = 20 \quad C = 16 \quad y = 16e^{-x} + x + 4$

c) $2y' - 4y = 2x^2 - 6x$

$y' - 2y = x^2 - 3x$ Inhomogen! $y = y_h + y_p$

$y_h = Ce^{2x}$ Antag $y_p = ax^2 + bx + c$

$y'_p = 2ax + b$

$2ax + b - 2(ax^2 + bx + c) = x^2 - 3x$

$2ax + b - 2ax^2 - 2bx - 2c = x^2 - 3x$

$$\begin{cases} -2a = 1 & a = -\frac{1}{2} \\ 2a - 2b = -3 & \text{I} \\ b - 2c = 0 & \text{II} \end{cases}$$

$y_p = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$

I $-1 - 2b = -3$ $b = 1$

$y = Ce^{2x} - \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$

II $1 - 2c = 0$ $c = \frac{1}{2}$

2 a) $y = 10e^{12x}$ $y' = 120e^{12x}$ $y' - 12y = 0$

$120e^{12x} - 12 \cdot 10e^{12x} = 0$ Klart!

b) $y = e^x - x^2 - 2x - 2$

$y' = y + x^2$

$y' = e^x - 2x - 2$

$e^x - 2x - 2 = e^x - \cancel{x^2} - 2x - 2 + \cancel{x^2}$

$e^x - 2x - 2 = e^x - 2x - 2$ Klart!

3. a) $y'' - 4y' - 5y = 0$ ger karakteristiska ekvationen

$r^2 - 4r - 5 = 0$

$r = 2 \pm \sqrt{2^2 + 5}$

$= 2 \pm \sqrt{9}$

$= 2 \pm 3 \quad r_1 = 5 \quad r_2 = -1 \qquad y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-x}$

b) $y'' + 4y' + 4y = 0$

$r^2 + 4r + 4 = 0$

$r = -2 \pm \sqrt{2^2 - 4}$

$= -2 \pm 0$ dubbelrot! $\qquad y = e^{-2x}(C_1 x + C_2)$

c) $y'' - 4y' + 5y = 0$

$r^2 - 4r + 5 = 0$

$r = 2 \pm \sqrt{4 - 5}$

$= 2 \pm i \qquad y = e^{2x}(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x))$

4. $y'' - 4y' + 4y = 0$

$r^2 - 4r + 4 = 0$

$r = 2 \pm \sqrt{2^2 - 4}$

$= 2 \pm 0$ dubbelrot

$y = e^{2x}(C_1 x + C_2)$ $\quad (0,1)$ och $(1,e)$

$y(0) = 1$ $\qquad y(1) = e$

$e^0(C_1 \cdot 0 + C_2) = 1$ $\qquad e^2(C_1 \cdot 1 + 1) = e$

$C_2 = 1$ $\qquad C_1 + 1 = \frac{1}{e} \quad C_1 = \frac{1}{e} - 1$

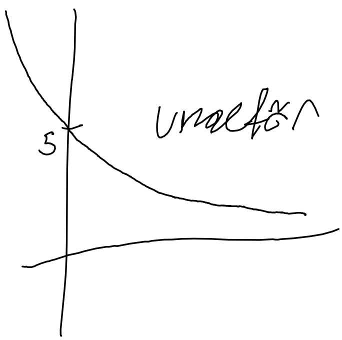
$y = e^{2x}\left(\left(\frac{1}{e} - 1\right)x + 1\right)$

5. a) $y' - 5y = 0$ ger den allmänna lösningen

$y = Ce^{5x}$ vilket är en växande funktion då

$C > 0$

b)

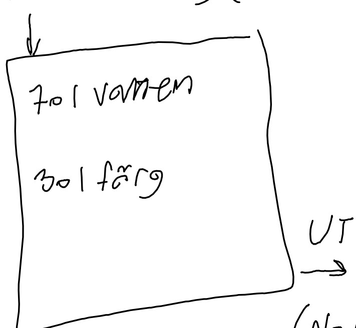


c) Till exempel

$y' + \frac{y}{2} = 0$

6. $y' = IN - UT$

IN 8 liter färg (10 liter tot.)



UT Andel av 12 liter

(Notera, minskar med 2 liter per minut)

$y' = 8 - 12 \cdot \frac{y}{100 - 2t}$ — minskar med 2 liter per minut

total mängd blandning vid $t = 0$

$y(0) = 30$

7. a) $y' = -ky + \beta \quad y(0) = \alpha$

b) $y' + ky = \beta \quad y = y_h + y_p \quad y_h:\ y' + ky = 0 \quad y_h = C_1 e^{-kx}$

y_p: Antagande: $y_p = a$ (en konstant) $\quad y_p' = 0$

$0 + ka = \beta$

$a = \frac{\beta}{k} \quad y_p = \frac{\beta}{k} \quad y = C_1 \cdot e^{-kx} + \frac{\beta}{k} \quad y(0) = \alpha$

$C_1 + \frac{\beta}{k} = \alpha \quad C_1 = \alpha - \frac{\beta}{k} \quad \boxed{y = \left(\alpha - \frac{\beta}{k}\right) e^{-kx} + \frac{\beta}{k}}$

med miniräknare och geogebra

8. a) Använd LÖSODE-funktionen på geogebra

$y' = 0{,}34y,\ y(1) = 13$ b) $y = 26e^{-\frac{1}{20}x} + 14$

$y = 13e^{\frac{17}{50}x}$

9. a) $y' = 0{,}68y$ b) vi vet $y(0) = 1200$. Använd LÖSODE

vi får $y = 1200e^{\frac{17}{25}x} \quad y(7) = 140095$

Svar: 140095 bakterier

10. a) $y' = 0{,}3 \cdot 200\left(1 - \frac{200}{1000}\right) = 48$ Svar: ökar med 48 individer/år

b) LÖSODE för diff.ekvationen $y' = 0{,}3y\left(1 - \frac{y}{1000}\right) \quad y(0) = 200$

$y = \frac{1000}{4e^{-\frac{3x}{10}} + 1} \quad y(7) = 671$ Svar: 671 individer

10. c) $y'=50$ $\quad 0{,}3y\left(1-\frac{y}{1000}\right)=50$, lös algebraiskt eller med lös-funktionen

Svar: $y_1=211$ $\quad y_2=788$

11. a) 10000 personer i Jönköping, y är antalet smittade

$y'=ky\underbrace{(10000-y)}_{\text{icke-smittade}}$ vi söker k vi vet att $y'=50$ då $y=1000$

vi får $50=k\cdot 1000(10000-1000)$ $\quad k=\frac{50}{9000000}$

$y'=\frac{5}{900000}y(10000-y)$

b) Ungefär 200 dagar (ok med andra men i närheten iallafall)

12. a) $y'=-0{,}45(y-9)$ kylskåpets temp.

$y(0)=65$ föremålets temperatur

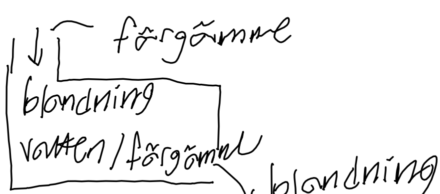
b) Ta fram funktionen

$y=56e^{-\frac{9x}{20}}+9$ $\quad y=25$

lös grafiskt eller med lös-funktionen

Svar: Efter 2,78 timmar

13. a)



$y'=IN-UT$ $\quad y$ är mängden färgämne i tanken

IN: 5liter/min $\quad$ UT: $5\cdot\frac{y}{100}=\frac{y}{20}$ $\quad y'=5-\frac{y}{20}$ $\quad y(0)=0$

13. b) Geogebra-lösning. Sätt in i LösODE vi får

$y=-100e^{-\frac{x}{20}}+100$ $\quad y(x)=75$ Lös grafiskt eller med lös-funktionen

$x=27{,}73$ svar: 27,73 minuter

Algebraisk lösning: Inhomogen diff.ekv. $y=y_p+y_h$

$y_h=-Ce^{-\frac{x}{20}}$ Antag $y_p=a$ $\quad 0+\frac{a}{20}=5$

$y_p'=0$ $\quad a=100$

$y=y_h+y_p=Ce^{-\frac{x}{20}}+100$ $\quad y(0)=0$ $\quad C=-100$

$y=-100e^{-\frac{x}{20}}+100$ $\quad y(x)=75$

$-100e^{-\frac{x}{20}}+100=75$

$-100e^{-\frac{x}{20}}=-25$

$e^{-\frac{x}{20}}=\frac{1}{4}$

$\ln e^{-\frac{x}{20}}=\ln\frac{1}{4}$

$\frac{-x}{20}=\ln\frac{1}{4}$

$x=-20\cdot\ln\frac{1}{4}\approx 27{,}73\text{min}$

14. a) $y' = -0{,}03y - 2000 \cdot 1{,}05^x$ $y(0) = 46000$

b) Lös diff.ekvationen med LösODE och bestäm $y(x) = 25000$ grafiskt.

svar: År 2031 är befolkningen 25000

14. Tänk eller prata med Joakim!

Tips:
Tänk typ