Mahifi.se

Mittkursövningsprov – Ma2b

Del 1 – Utan miniräknare

1. Lös ekvationerna, svara exakt

a) $x^2 - 36 = 0$

b) $x^2 - 4x = 0$

c) $x^2 = 8x$

d) $x^2 + 4x + 3 = 0$

e) $2x^2 - 4x - 16 = 0$

f) $10^x = 40$

g) $3^x = 100$

h) $lgx = 3$

(10/0/0)

2. Lös ekvationssystemet

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2y + x = 7 \end{cases}$ (2/0/0)

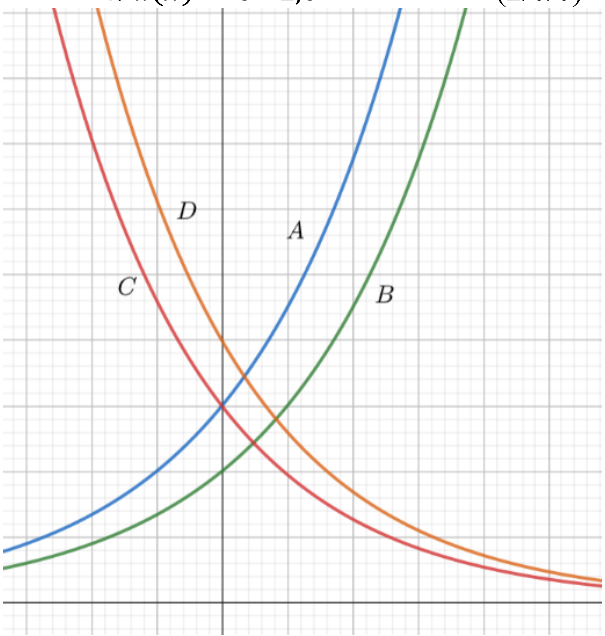
3. Para ihop följande funktionsekvationer med funktionerna på bilderna nedan

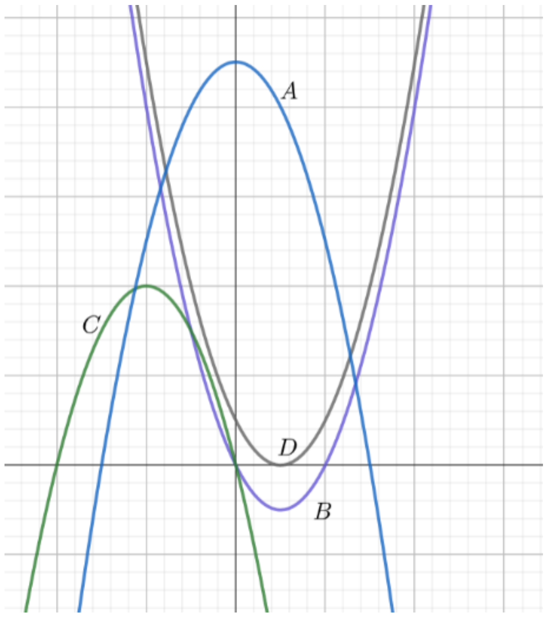
a)
1. $f(x) = 2 \cdot 1{,}5^x$
2. $g(x) = 3 \cdot 0{,}65^x$
3. $h(x) = 4 \cdot 0{,}65^x$
4. $a(x) = 3 \cdot 1{,}5^x$

(2/0/0)

b)
1. $f(x) = -x^2 + 9$
2. $g(x) = x^2 - 2x$
3. $h(x) = x^2 - 2x + 1$
4. $a(x) = -x^2 - 2x$

(2/0/0)





4. Bestäm det exakta värdet för följande uttryck

a) $lg1000$

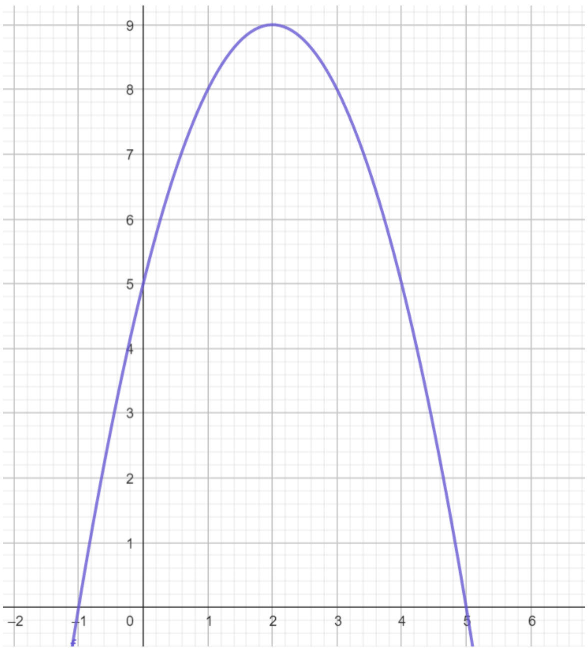
b) $3lg10 + 2lg100$

c) 10^{lg17}

d) $\frac{3^8 \cdot 3^3 \cdot 3^0}{3^9}$ (4/0/0)

5. Utgå från andragradsfunktionen på formen $f(x) = ax^2 + bx + c$ nedan och bestäm följande

a) Funktionens nollställen
b) Funktionens symmetrilinje
c) Bestäm $f(4)$
d) Lös ekvationen $f(x) = 0$
e) Bestäm med en motivering om konstanten a är större eller mindre än konstanten c
f) Bestäm b om $f(b + 1) = 5$



(4/1/1)

6. Utveckla följande uttryck med kvadreringsregeln eller konjugatregeln
a) $(x + 5)^2 - 25$
b) $(x - 3)(x + 3) + 9$
c) $\left(\frac{x}{2} - \sqrt{2}\right)\left(\frac{x}{2} - \sqrt{2}\right)$

(2/1/0)

7. Lös ekvationerna, svara exakt

a) $5 \cdot 3^{x} = 20$

b) $3x^2 - 10x - 10 = x^2 - 2x + 14$

c) $4^{2x} \cdot 4^{x} = 17$ (2/4/0)

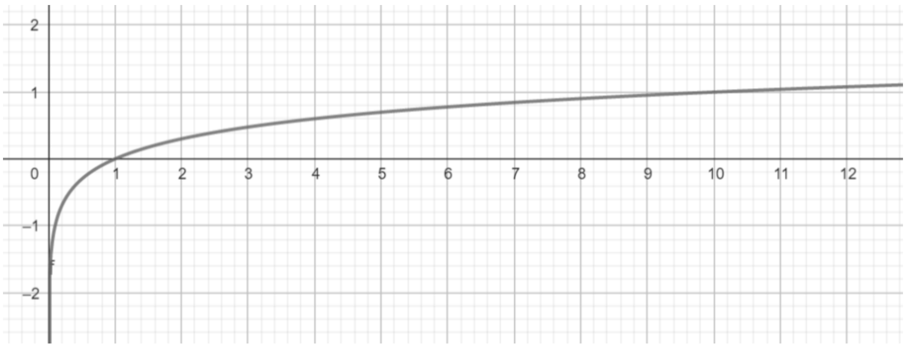
8. Joakim tänker på två tal. Summan av talen är 20 och det större talet är 3 gånger större än det mindre talet. Vilka tal tänker Joakim på? *Prövning ger inga poäng.*

(0/2/0)

9. För följande andragradsekvationer saknar en reella lösningar, en har enbart en lösning och en har två lösningar. Bestäm vilken som har vilken egenskap.

A $x^2 + 4x + 4 = 0$
B $x^2 - 2x + 10 = 0$
C $x^2 - 6x - 7 = 0$ (3/1/0)

10. Nedan ser du funktionen $f(x) = lgx$. Du kan notera funktionen går igenom punkterna $(1, 0)$ och $(10, 1)$ vilken är den nästa punkten som funktionen går igenom där både x- och y-koordinaten är positiva heltal?



(0/1/0)

11. a) Ekvationssystemet nedan saknar lösningar. Visa algebraiskt att det saknar lösningar och förklara i ord varför det saknar lösningar

$$\begin{cases} 2x = y - 10 \\ 3 = y - 2x \end{cases}$$

b) För vilket värde på konstanten a saknar följande ekvationssystem lösningar?

$$\begin{cases} ax + y = 12 \\ 2y - 10x - 1 = 0 \end{cases}$$

(0/4/0)

12. Förenkla följande uttryck med hjälp av bland annat faktorisering

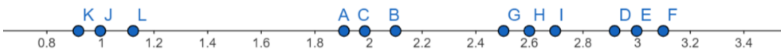
a) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$

b) $\frac{x^2-y^2}{x+y} - (x-y)$

c) $\left(\sqrt{x+1}-4\right)^2 - x + 4$ (1/2/1)

13. Para ihop lösningen till följande ekvationer med punkterna på tallinjen

1. $10^x = 99$
2. $9^x = 99$
3. $11^x = 99$



(0/2/0)

14. Inom vilket intervall A-D bör talet $lg2025$ ligga inom?

A $1 < lg2025 < 2$
B $2 < lg2025 < 3$
C $3 < lg2025 < 4$
D $4 < lg2025 < 5$ (0/1/0)

15. För en andragradsfunktion vet du att nollställena är $x_1 = 4 + \sqrt{2}$ samt $x_2 = 2 - \sqrt{2}$. Bestäm ekvationen för funktionens symmetrilinje

(0/1/1)

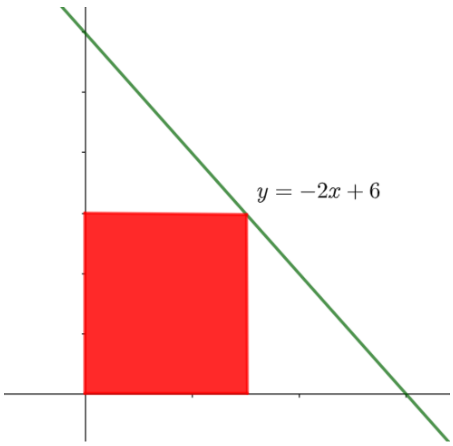
16. Bestäm $A^2 - B^2$ om $A = 1234^x + 1234^{-x}$ och $B = 1234^x - 1234^{-x}$

(0/0/2)

17. Funktionen $f(x) = ax^2 + a^2x + 2$ har enbart ett nollställe och a är en konstant. Bestäm $f(1)$ för funktionen.

(0/0/2)

18. Under grafen till den räta linjen $y = -2x + 6$ placeras en rektangel. Rektangeln har ett hörn i origo och ett annat hörn som tangerar grafen till den räta linjen. Vilket är den maximala arean som rektangeln kan anta?



(0/0/2)

Del 2 – Med miniräknare

19. Lös ekvationerna och svara med två decimaler

    a) $10^x = 32$

    b) $2^x = 11$

    c) $x^5 = 100$

20. Observera tabellerna nedan. Använd ditt regressionsanalysverktyg och anpassa en linjär funktion till a) och en exponentiell funktion till b)

a)

x	2	4	7	9	12	13
y	10	15	19	23	28	31

b)

x	1	3	4
y	10	14	21

(4/0/0)

21. Befolkningsförändringen från 2023 i staden Joakimköping beskrivs med följande funktion $f(x) = 30\ 000 \cdot 0{,}93^x$ där x är antal år från 2023. Bestäm följande

    a) Hur många människor bor det i Joakimköping 2023?
    b) Efter hur många år är befolkningen i Joakimköping 15 000?

(2/1/0)

22. Joakim har gjort ett löfte med sin son inför sonens matteprov. Joakim sa att för varje rätt du får kommer du få 5 kr för varje fel får du böta 8 kr (lätt omoraliskt). Provet innehöll 26 uppgifter och när Joakims son fick tillbaka provet fick han inga pengar och slapp betala något. Hur många rätt fick sonen? (0/2/0)

23. Turismen i världen har ökat stort sedan 1950. 1950 räknade man med att 25 miljoner människor turistade internationellt årligen. År 2005 hade siffran ökat till 800 miljoner människor som turistade internationellt årligen.

    a) Hur många miljoner människor förväntas turista internationellt år 2025 om vi antar att utvecklingen är exponentiell?

    b) Vilket år förväntas turismen vara över 5 miljarder?

(0/4/0)

24. Gateway Arch är ett berömt monument i Saint Louis, USA.

Konstruktionen är 192 meter hög och 192 meter bred vid basen.

Man kan modellera Gateway archs höjd med hjälp av en andragradsfunktion.

Den funktionen går att skriva som $h(x) = -0{,}0208x^2 + bx$ där x är meter längst med basen.

Bestäm konstanten b

(0/2/0)

25. Aralsjön i Centralasien har på grund av uttorkning sedan 1960-talet minskat i area. Från att ha varit en av världens största sjöar är den idag nästan borta. Statistiken nedan visar på hur sjöns area i tusen kvadratkilometer har minskat sedan år 1960. Om vi antar att förändringen är <u>exponentiell</u> vilket år beräknas sjöns area vara 3 tusen km^2?

År	1960	1985	2004	2020
Tusen km^2	68	28,6	15,1	6,8

(1/2/0)

26. Antalet ålar har minskat kraftigt under många år. Om man jämför med 1950 finns idag bara 3% av beståndet kvar. Man räknar med att ålens bestånd minskar exponentiellt.

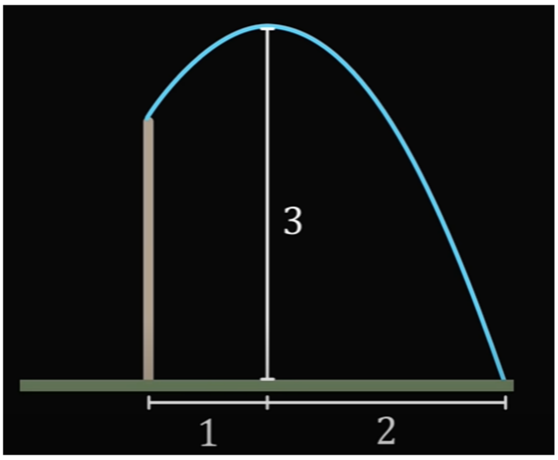
a) Konstruera en funktion som beskriver minskningen av antalet ålar.
b) Bestäm också vilket år det enbart finns 1% kvar av beståndet från 1950.

(0/0/2)

27. Joakim jobbar på en marknad och vill maximera sin vinst när han säljer blåbär. Just nu tar han 80kr/liter och han säljer i snitt 300 liter om dagen. Han har räknat ut att om han ökar literpriset med 5 kr kommer han sälja 10 liter mindre i snitt om dagen. Vilket pris ska Joakim sätta för att maximera sin vinst?

(0/1/2)

28. En fontän har en okänd höjd. Den sprutar ut en vattenstråle som når 3 meter över marken som max och landar sedan 3 meter från fontänen. Se bild nedan. Bestäm fontänens höjd. Anta att vattenstrålen rör sig som en andragradsfunktion.



(0/1/2)

Mittkursövningsprov - del 1 ingen mini

1. a) $x^2-36=0$

$x^2=36$

$x=\pm 6$

b) $x^2-4x=0$

$x(x-4)=0$

$x_1=0 \quad x_2=4$

c) $x^2=8x$

$x^2-8x=0$

$x(x-8)=0$

$x_1=0 \quad x=8$

d) $x^2+4x+3=0$

$x=-\frac{4}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2-3}$

$=-2\pm\sqrt{4-3}$

$=-2\pm 1$

$x_1=-2+1=-1$

$x_2=-2-1=-3$

e) $2x^2-4x-16=0$

$x^2-2x-8=0$

$x=\frac{2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2+8}$

$=1\pm\sqrt{9}$

$=1\pm 3$

$x_1=1+3=4$

$x_2=1-3=-2$

f) $10^x=40$

$\lg 10^x=\lg 40$

$x=\lg 40$

Stanna där!

g) $3^x=100$

$\lg 3^x=\lg 100$

$x\lg 3=2$

$x=\frac{2}{\lg 3}$

Stanna där!

h) $\lg x=3$

$x=10^3$

$x=1000$

2. $\begin{cases} 3x-2y=5 & \text{I} \\ 2y+x=7 & \text{II} \end{cases}$

II $2y+x=7$

$x=7-2y$

I $3x-2y=5$

$3(7-2y)-2y=5$

$21-6y-2y=5$

$21-8y=5$

$8y=16 \quad y=2$

II $2y+x=7$

$4+x=7$

$x=3$ Svar: $x=3$, $y=2$

3. a) 1-B, 2-C, 3-D, 4-a

b) 1-A, 2-B, 3-D, 4-C

4. a) $\lg 1000$ vad ska vi höja upp 10 i för att få 1000

$\lg 1000 = 3$

b) $3\lg 10 + 2\lg 100 = 3\cdot 1 + 2\cdot 2 = 7$

c) $10^{\lg 17} = 17$

d) $\frac{3^8 \cdot 3^3 \cdot 3^0}{3^9} = \frac{3^{11}}{3^9} = 3^2$

$= 9$

5. a) $x_1 = -1$
$x_2 = 5$

b) Symmetrilinje: $x = 2$

c) $f(4) = 5$

d) $f(x) = 0$

$x_1 = -1 \quad x_2 = 5$

e) $a < 0$ eftersom $a < 0$ då vi har en maximipunkt.

f) $f(b+1) = 5$ Vilka x har vi då $y = 5$

det har vi vid $x_1 = 0$ och $x_2 = 4$

$b_1 + 1 = 0 \quad b_2 + 1 = 4$

$b_1 = -1 \quad b_2 = 3$

Svar: $b_1 = -1$
$b_2 = 3$

6. a) $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$

b) $(x-3)(x+3) = x^2 - 9$

c) $\left(\frac{x}{2} - \sqrt{2}\right)\left(\frac{x}{2} + \sqrt{2}\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4} - 2$

7. a) $5 \cdot 3^x = 20$

$3^x = 4$

$\lg 3^x = \lg 4$

$x \cdot \lg 3 = \lg 4$

$x = \frac{\lg 4}{\lg 3}$

Stannar där!

b) $3x^2 - 10x - 10 = x^2 - 2x + 14$

$2x^2 - 8x - 24 = 0$

$x^2 - 4x - 12 = 0$

$x = 2 \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + 12}$

$= 2 \pm \sqrt{4 + 12}$

$= 2 \pm \sqrt{16}$

$= 2 \pm 4$ $\quad x_1 = 2 + 4 = 6$

$x_2 = 2 - 4 = -2$

c) $4^{2x} \cdot 4^x = 17$

$4^{3x} = 17$

$\lg 4^{3x} = \lg 17$

$3x \lg 4 = \lg 17$

$x = \frac{\lg 17}{3 \lg 4}$

8. x = Ensa talet y = Andra talet

$$\begin{cases} x + y = 20 & \text{I} \\ 3x = y & \text{II} \end{cases}$$

I $x + y = 20$

$x + 3x = 20$

$4x = 20$

$x = 5$

$x + y = 20$

$5 + y = 20$

$y = 15$

Svar: talen är 5 och 15

9. A: $x^2 + 4x + 4 = 0$

$x = -2 \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 4}$

$= -2 \pm \sqrt{4 - 4}$

$= -2 \pm 0$ $\quad x_1 = -2$

Enbart ett nollställe!

9. B $x^2-2x+10=0$

$x=1\pm\sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)-10}$

$=1\pm\sqrt{1-10}$

$=1\pm\sqrt{-9}$

Negativt

Saknar reella lösningar! under rottecknet

C $x^2-6x-7=0$

$x=\frac{6}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2+7}$

$=3\pm\sqrt{16}$

$=3\pm4$

$x_1=7,\ x_2=-1$

10. Det kommer vara då $x=100$ och därmed $y=2$ alltså $\lg 100=2$

$(100,2)$

11 a) $\begin{cases} 2x=y-10 & \text{I} \\ 3=y-2x & \text{II} \end{cases}$

I $2x=y-10$

$y=2x+10$ II $3=y-2x$

$3=2x+10-2x$

$3\neq10$ Saknar lösningar

I ord: De räta linjerna har samma k-värde och kommer således aldrig skära varandra

b) $\begin{cases} ax+y=12 & \text{I} \\ 2y-10x-1=0 & \text{II} \end{cases}$ Vi vill ha samma k-värde, skriv på k-form

I $y=-ax+12$

II $2y=10x+1$

$y=5x+\frac{1}{2}$

$-a=5$

$a=-5$

12. a) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}=\frac{(x+2)^2}{(x+2)(x-2)}$ kvadreringsregeln konjugatregeln

$=\frac{x+2}{x-2}$

b) $\frac{x^2-y^2}{x+y}-(x-y)=\frac{(x+y)(x-y)}{x+y}-(x-y)$

$=x-y-(x-y)=0$

c) $(\sqrt{x+1}-4)^2-x+4=(\sqrt{x+1})^2-2\cdot4\cdot\sqrt{x+1}+16-x+4$

$=x+1-8\sqrt{x+1}+16-x+4=-8\sqrt{x+1}+21$

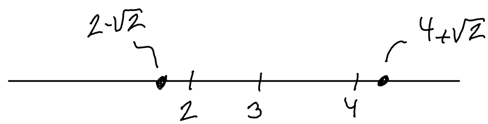
13. 1 – C   2 – B   3 – A

14. $\lg 100 = 2$

$\lg 1000 = 3$

$2 < \lg 2025 < 3$

15.



En andragradsfunktion är alltid symmetrisk runt symmetrilinjen. Vi får då $x = 3$ som symmetrilinje

16. $A^2 - B^2$ $A = 1234^x + 1234^{-x}$, $B = 1234^x - 1234^{-x}$

$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B) =$

$= \left(1234^x + 1234^{-x} - (1234^x - 1234^{-x})\right)\left(1234^x + \cancel{1234^{-x}} + 1234^x - \cancel{1234^{-x}}\right)$

$= \left(\cancel{1234^x} + 1234^{-x} - \cancel{1234^x} + 1234^{-x}\right)\left(2 \cdot 1234^x\right)$

$= \left(2 \cdot 1234^{-x}\right)\left(2 \cdot 1234^x\right) = 4 \cdot 1234^x \cdot 1234^{-x} = 4 \cdot 1234^{x-x} = 4$

Svar: $A^2 - B^2 = 4$

17 $f(x) = ax^2 + a^2x + 1$ Undersök för vilket a funktionen enbart har ett nollställe

$f(x) = 0$

$ax^2 + a^2x + 2 = 0$

$x^2 + ax + \frac{2}{a} = 0$

$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{a^2}{4} - \frac{2}{a}}_{=0}}$

för enbart ett nollställe

$\frac{a^2}{4} - \frac{2}{a} = 0$

$\frac{a^2}{4} = \frac{2}{a}$

$a^3 = 8$

$a = 2$

$f(x) = 2x^2 + 4x + 2$

$f(1) = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 2 = 8$

18. Vi vill ha en areafunktion för den röda retangeln. Basen kommer vara x och höjden kommer vara linjen $y = -2x + 6$ vi får då $A(x) = x(-2x + 6) =$
$= -2x^2 + 6x$

Vi vill nu ha extremvärdet för $A(x)$. sök symmetrilinjen. för att ta fram extremvärde

$A(x) = 0$

$-2x^2 + 6x = 0$

$x^2 - 3x = 0$

$x(x - 3) = 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 3$

Symmetrilinjen är då $x = \frac{3}{2}$

Vi får då $A(\frac{3}{2}) = -2(\frac{3}{2})^2 + 6 \cdot \frac{3}{2} =$

$= -2 \cdot \frac{9}{4} + 9 = -\frac{9}{2} + 9 = \frac{9}{2}$

Svar: $\frac{9}{2}$ areaenheter

Del 2 - med miniräknare

19. a) $10^x = 32$

$x = \lg 32 \approx 1{,}51$

b) $2^x = 11$

$\lg 2^x = \lg 11$

$x \cdot \lg 2 = \lg 11$

$x = \frac{\lg 11}{\lg 2} \approx 3{,}46$

c) $x^5 = 100$

$x = 100^{\frac{1}{5}} \approx 2{,}51$

20. a) $y = 1{,}81x + 6{,}79$

b) $y = 7{,}63 \cdot 1{,}26^x$

21. a) $f(0) = 30000 \cdot 0{,}93^0 = 30000$ Svar: 30 tusen

b) $f(x) = 15000$

$15000 = 30000 \cdot 0{,}93^x$

$0{,}5 = 0{,}93^x$

$\lg 0{,}5 = \lg 0{,}93^x$

$\lg 0{,}5 = x \cdot \lg 0{,}93$

$x = \frac{\lg 0{,}5}{\lg 0{,}93} \approx 9{,}55$ Svar: Efter ungefär 9,5 år

22. x = Antal rätt, y = Antal fel Vi vet att $x + y = 26$

Vi vet också $5x - 8y = 0$ Vi får ekvationssystemet

$\begin{cases} x + y = 26 & \text{I} \\ 5x - 8y = 0 & \text{II} \end{cases}$

I $x + y = 26$

$x = 26 - y$

II $5x - 8y = 0$

$5(26 - y) - 8y = 0$

$130 - 5y - 8y = 0$

$13y = 130$ $y = 10$ $x = 26 - 10 = 16$

Svar: 16 rätt och 10 fel!

23. a) Vi sätter 1950 som år noll. Då får vi att

$f(x) = c a^x$ och att $f(0) = 25$ $\quad f(0) = c \cdot a^0 = 25$

$c = 25$

Vi vet också att $f(55) = 800$

Vi får då $25 \cdot a^{55} = 800$ eller lös med lös-funktionen på geogebra

$a^{55} = 32$

$(a^{55})^{\frac{1}{55}} = 32^{\frac{1}{55}}$ $\quad a = 1,065$

$a = 1,065$

$f(x) = 25 \cdot 1,065^x$ $\quad f(75) = 25 \cdot 1,065^{75} = 2821$ Svar: 2821 miljoner

b) $f(x) = 5000$ $\quad 25 \cdot 1,065^x = 5000$

$1,065^x = 200$

$\lg 1,065^x = \lg 200$

$x = \frac{\lg 200}{\lg 1,065} \approx 84$ Svar: år 2034 är det över 5 miljarder turister

24. Vi vet att funktionen har följande samband

$f(192) = 0$ eller $f(96) = 192$. Sätt in någon av sambanden i funktionen för att få fram b

$f(192) = -0,0208 \cdot 192^2 + b \cdot 192 = 0$

$192b = 0,0208 \cdot 192^2$

$b = \frac{0,0208 \cdot 192^2}{192} \approx 4$ Svar: $b = 4$

25 Använd regressionsanalys

sätt år 1960 som $x=0$ för att

för enkla

Vi får då funktionen $y=71,156\cdot 0,9631^x$

Vi söker $y=3$ $\quad 3=71,156\cdot 0,9631^x$

$\frac{3}{71,156}=0,9631^x$

$\lg\left(\frac{3}{71,156}\right)=\lg 0,9631^x$

$\frac{\lg\left(\frac{3}{71,156}\right)}{\lg 0,9631}=x \qquad x=84$

Svar: År 2044

26 a) Exponentiell förändring $f(x)=C\cdot a^x$

Vi vet inte C men modellen går att konstruera

ändå $f(73)=0,03C$ Vilket ger $0,03C=C\cdot a^{73}$

år från 1950

$0,03=a^{73}$

$(0,03)^{\frac{1}{73}}=\left(a^{73}\right)^{\frac{1}{73}}$

$a\approx 0,9531$

$f(x)=C\cdot 0,9531^x$

b) $f(x)=0,01C$

$0,01C=C\cdot 0,9531^x$

$0,01=0,9531^x$

$\lg 0,01=\lg 0,9531^x$

$\lg 0,01=x\cdot\lg 0,9531$

$x=\frac{\lg 0,01}{\lg 0,9531}$

$x\approx 95,8$

$1950+95=2045$

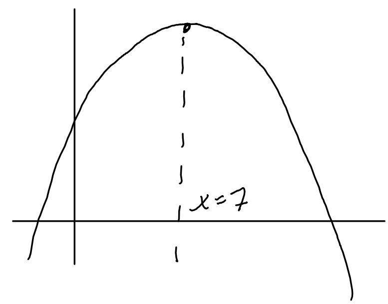
Svar: 2045

27. Konstruera en funktion som beskriver situationen där x är antalet ökningar av priset. Vinst = Pris · (Antal liter sålda)

$V(x) = (80+5x)(300-10x)$ Undersök funktionen grafiskt

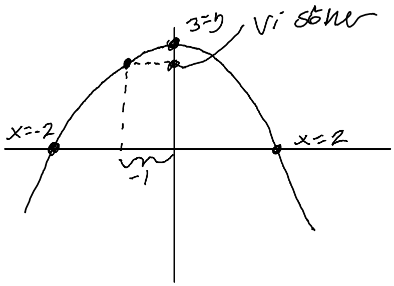
Pris efter x höjningar

Antal liter sålda



Vi ska höja priset med $5 \cdot 7$ vilket ger $80+5\cdot 7 =$
$= 105$ Svar: Vid priset 105 kr maximerar Joakim priset!

28. Lösning 1. Använda regressionsanalys. Sätt in fontänen i ett koordinatsystem och sätt ut 3 punkter



Vi har 3 punkter $(0,3)$, $(-2,0)$ och $(2,0)$ Vi söker $f(-1)$.

Bestäm funktionen med hjälp av regressionsanalys-verktyget

Vi får då $f(x) = -0,75x^2+3$

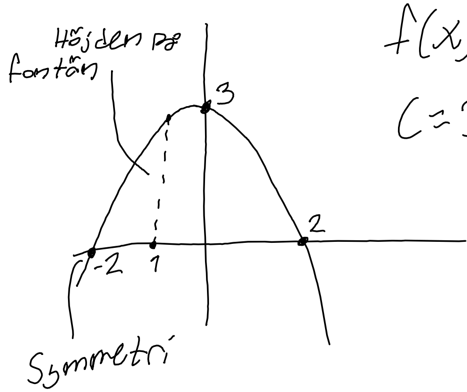
Vi undersöker $f(-1) = 2,25$

Svar: Fontänen är 2,25 meter.

Lösning 2

↓

28,2. Sätt in fontänen i ett koordinatsystem



$f(x) = ax^2 + bx + c$

$c = 3 \quad f(x) = ax^2 + bx + 3$

$f(2) = 0 \quad 2^2a + 2b + 3 = 0$

$4a + 2b + 3 = 0$

$f(-2) = 0 \quad (-2)^2a - 2b + 3 = 0$

$4a - 2b + 3 = 0$

$$\begin{cases} 4a + 2b + 3 = 0 & \text{I} \\ 4a - 2b + 3 = 0 & \text{II} \end{cases}$$

II $4a - 2b + 3 = 0$

$4a = 2b - 3$

I $4a + 2b + 3 = 0$

$2b - 3 + 2b + 3 = 0$

$4b = 0$

$b = 0$

I $4a + 2b + 3 = 0$

$4a + 3 = 0$

$a = \frac{-3}{4}$

$f(x) = \frac{-3}{4}x^2 + 3$ sätt in $x = 1$

$f(1) = \frac{-3}{4} + 3 = \frac{-3}{4} + \frac{12}{4} = \frac{9}{4}$ Svar: Fontänen är $\frac{9}{4}$ meter hög