Extra A-uppgifter i Ma4

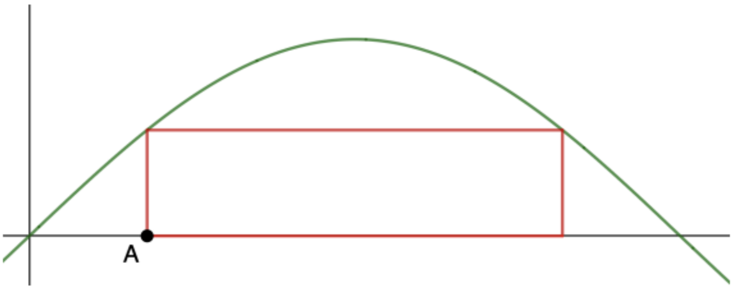
1. Bestäm $|z|$ för följande komplexa tal $z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ (0/0/1)

2. Lös ekvationen fullständigt $cos^2x - \frac{sin2x}{2sinx} = 0$ (0/1/1)

3. Förenkla följande uttryck $\frac{(a-b)^3+(a-b)^2-(a-b)-1}{(a-b)-1}$ (0/0/1)

4. Bestäm $sin3x$ i enbart subtraktioner och multiplikationer av tal och $sinx$ (0/0/2)

5. Nedan ser du grafen till funktionen $f(x) = sin4x$. Under grafen till funktionen placerar vi en rektangel vars omkrets beror på var man sätter punkten A. Vid vilken punkt A blir omkretsen maximal?



(0/0/2)

6. Bestäm $\arg(z)$ för $z = \sqrt{i-1}$ (0/1/1)

7. För en rationell funktion $f(x)$ vet att du att den har en asymptot i $y = \frac{3x}{2} + 7$. Bestäm följande gränsvärde

   $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ (0/0/1)

8. Lös ekvationen $cos2x = cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ (0/0/2)

9. Visa att $arg\left(\frac{1}{z}\right) = -arg(z)$ för alla komplexa tal z (0/0/1)

10. Ska försöka komma på något bra här.

(0/1/1)

11. Lös ekvationen $z^4 = 1 + i$ (0/2/1)

12. En isskulptur i form av ett klot smälter på ett sådant sätt att den hela tiden är ett klot. Volymen på klotet minskar med en konstant hastighet på 2π kubikmeter per timme. Med vilken hastighet förändras arean på klotet i det ögonblick då skulpturens radie är 5 meter?
(0/0/3)

13. Man har polynomet $p(x) = x^4 - 4x^3 + ax^2 + bx + 12$ och $q(x) = x^2 - 4x + 3$. Bestäm a och b så att $\frac{p(x)}{q(x)}$ saknar rest.
(0/0/2)

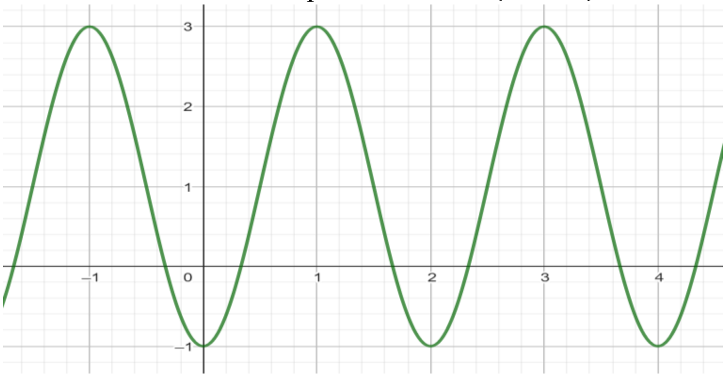
14. Bestäm värdet på gränsvärdet

$$\lim_{h \to 0} \frac{(cos(\pi + h) - cos(\pi))}{h}$$

(0/0/1)

15. Betrakta funktionen $y = ax^2$, 0 ≤ x ≤ a, där a > 0 är en konstant. Om grafen till funktionen roterar runt x-axeln respektive y-axeln alstras två olika rotationskroppar. Det finns ett värde på a så att de båda kropparna får samma volym. Bestäm detta a.
(0/0/2)

16. Nedan ser du en funktion på formen $2sin(kx + v) + 1$. Bestäm konstanterna k och v

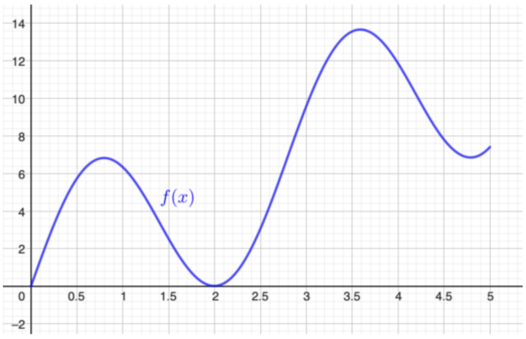


(0/0/1)

17. Bestäm samtliga lodräta asymptoter för funktionen $f(x) = \frac{sin(\pi+2x)}{cosx} + \frac{cos(\pi+2x)}{sinx}$
(0/1/1)

18. Bestäm ett exakt värde på $tan15°$ (0/0/2)

19. Vi definierar funktionen $h(x) = \ln(f(x))$. Nedan ser du grafen till $f(x)$. Bestäm för vilket/vilka värden $h'(x)$ är odefinierad om $f(x)$ har definitionsmängden $0 \leq x \leq 5$



(0/1/1)

20. Joakim har designat ett glas som har modellen ungefär som visas nedan. Glaset rymmer 300 cm^3 och dess cirkulära botten har en diameter som är 6 cm. Bestäm diametern på öppningen om höjden på glaset är 10 cm. Svara med två decimaler.

(0/0/3)

21. Vi konstruerar funktionen $h(x) = (f(x))^2 + (g(x))^2$

Du vet att

- $f'(x) = g(x)$
- $g'(x) = -f(x)$
- $h\left(\frac{\pi}{23}\right) = 7$

Bestäm $h\left(\frac{\pi}{28}\right)$ (0/0/2)

Extra A-uppgifter - Ma 4

1. $z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 1 + i$

$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

2. $\cos^2 x - \frac{\sin 2x}{2\sin x} = 0$

$\cos^2 x - \frac{2\sin x\cos x}{2\sin x} = 0$

$\cos^2 x - \cos x = 0$

$\cos x(\cos x - 1) = 0$ nollproduktsmetod!

$\cos x = 0 \quad x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n$

$\cos x - 1 = 0$

$\cos x = 1 \quad x = \pm 0 + 2\pi \cdot n$

4. $\sin(3x) = \sin(2x + x) =$

$= \sin(2x)\cdot\cos x + \cos(2x)\cdot\sin x$

$= 2\sin x\cdot\cos^2 x + (1 - 2\sin^2 x)\cdot\sin x$

$= 2\sin x(1 - \sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x$

$= 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x$

$= 3\sin x - 4\sin^3 x$

3. $\frac{(a-b)^3 + (a-b)^2 - (a-b) - 1}{(a-b) - 1}$

Ansätt $(a-b) = x$

$\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1}$ liggande stolen

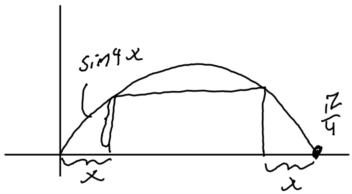
$$\begin{array}{l|l} \multicolumn{1}{l}{x^2 + 2x + 1} & \\ \hline x^3 + x^2 - x - 1 & x - 1 \\ -(x^3 - x^2) & \\ \hline 2x^2 - x - 1 & \\ -(2x^2 - 2x) & \\ \hline x - 1 & \\ -(x - 1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$x^2(x-1) = x^3 - x^2$

$2x(x-1) = 2x^2 - 2x$

$x^2 + 2x + 1 = (a-b)^2 + 2(a-b) + 1$

5.



omkretsfunktion:

$O(x) = \sin 4x + \sin 4x + \left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) + \left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$

$= 2\sin 4x + \frac{\pi}{2} - 4x$

Undersök max $O'(x) = 8\cos 4x - 4$

$O'(x) = 0$

$8\cos 4x - 4 = 0$

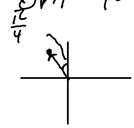
$\cos 4x = \frac{1}{2}$

$4x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot n$

$x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi \cdot n}{2}$

Vi söker extrempunkt i intervallet $0 < x < \frac{\pi}{4}$ vi får då $x = \frac{\pi}{12}$ eftersom resterande nollställen ligger utanför intervallet! Svar: $x = \frac{\pi}{12}$

6. Skriv om $i-1$ i polär form



$\arg(i-1) = \frac{3\pi}{4}$

$|i-1| = \sqrt{2}$ $\quad i-1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

$\sqrt{i-1} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)\right)^{\frac{1}{2}}$

$= 2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)$

Svar: $\arg(z) = \frac{3\pi}{8}$

7. $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \frac{3}{2}$ lutningen på asymptoten

8. $\cos 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

$2x = \pm\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi \cdot n$

Två fall: I $2x = x + \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot n$

$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot n$

II $2x = -\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi \cdot n$

$2x = -x - \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot n$

$3x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot n$

$x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi \cdot n}{3}$

9. Vi definierar

$z = r(\cos v + i\sin v)$ där $\arg z = v$

$\frac{1}{z} = z^{-1} = \left(r(\cos v + i\sin v)\right)^{-1}$

$= r^{-1}\left(\cos(-v) + i\sin(-v)\right)$ $\quad \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -v$

$= -\arg(z)$ □

11. $z^4 = 1+i$ skriv om i polär form $1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$z^4 = r^4(\cos 4v + i\sin 4v)$ $\quad r^4 = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ $\quad 4v = \frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot n$

$r = 2^{\frac{1}{8}}$ $\quad v = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi \cdot n}{2}$ där $n = 0, 1, 2, 3$

$z_1 = 2^{\frac{1}{8}}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right)$

$z_2 = 2^{\frac{1}{8}}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + i\sin\frac{9\pi}{16}\right)$

$z_3 = 2^{\frac{1}{8}}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + i\sin\frac{17\pi}{16}\right)$

$z_4 = 2^{\frac{1}{8}}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + i\sin\frac{25\pi}{16}\right)$

12. Vi kommer behöva två förändrings-ekvationer

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

$V(r) = \frac{4\pi \cdot r^3}{3}$

$A(r) = 4\pi r^2$

$V'(r) = \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$

$A'(r) = \frac{dA}{dr} = 8\pi r$

Vi vill veta $\frac{dr}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\frac{dV}{dr}}$ $\quad \frac{dV}{dt} = -2\pi$

$\frac{dV}{dr}$ där $r = 5$ är $4\pi \cdot 5^2 = 100\pi$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{-2\pi}{100\pi} = \frac{-1}{50}$$

Vi vill nu ha $\frac{dA}{dr} = A'(5) = 8 \cdot \pi \cdot 5 = 40\pi$ $\quad \frac{dA}{dt} = 40 \cdot \pi \cdot \frac{-1}{50}$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{-4\pi}{5}$$

13. Undersök faktorerna för x^2-4x+3 och använd sedan faktorsatsen

$$x^2-4x+3=0$$

$$x=2\pm\sqrt{2^2-3}$$

$$=2\pm1 \qquad x_1=3 \quad x_2=1$$

$$x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$$

Då vet vi att $P(3)=0$ och $P(1)=0$

$$\begin{cases} 3^4-4\cdot 3^3+9a+3b+12=0 \\ 1-4+a+b+12=0 \end{cases}$$ ekvationssystem

$$\begin{cases} 9a+3b-15=0 & \text{(I)} \\ a+b+9=0 & \text{(II)} \end{cases}$$

om man löser det får man

$a=7$

$b=-16$

14. Det är derivatans definition!

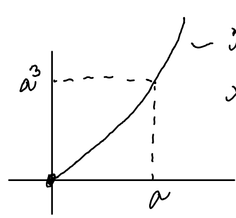
$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(\pi+h)-\cos(\pi)}{h}=f'(\pi) \text{ då } f(x)=\cos x$$

$$f'(x)=-\sin x$$

Svar gränsvärdet är noll!

$$f(\pi)=-\sin(\pi)=0$$

15.



$y=ax^2$

$x=\sqrt{\frac{y}{a}}$

$$\pi\int_0^a (ax^2)^2\,dx=\pi\int_0^{a^3}\left(\sqrt{\frac{y}{a}}\right)^2 dy$$

$$\pi\int_0^a a^2x^4\,dx=\pi\int_0^{a^3}\frac{y}{a}\,dy$$ Utveckla båda leden!

$$\pi\left[a^2\frac{x^5}{5}\right]_0^a=\pi\left[\frac{y^2}{2a}\right]_0^{a^3}$$

$$\pi\left(\frac{a^7}{5}\right)=\pi\left(\frac{a^6}{2a}\right)$$

$$\frac{a^7}{5}=\frac{a^5}{2}$$

Lös med geogebra!

$a=\frac{\sqrt{10}}{2}$

Svar:

16. $2\sin(kx+v)+1$ skriv om uttrycket till

$2\sin(k(x+\frac{v}{k}))+1$ k beroende av perioden och $\frac{v}{k}$ kommer vara förskjutningen

Perioden $=2$ $\quad 2=\frac{2\pi}{k}$ $\quad k=\pi$

kurvan är förskjuten åt höger med $-0,5$

$\frac{v}{\pi}=-0,5$ $\quad$ svar: $k=\pi$ $\quad v=-\frac{\pi}{2}$

$v=-\frac{\pi}{2}$

17. Lodräta asymptoter ges då funktionen är odefinierad, alltså då nämnaren är lika med noll!

vi får $\cos x=0$ $\quad x=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot n$

$\sin x=0$ $\quad x=0+2\pi\cdot n$ eller $x=\pi+2\pi\cdot n$

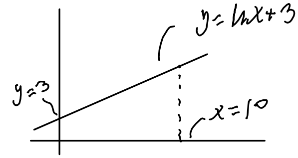
18. $\tan 15°=\frac{\sin(15°)}{\cos(15°)}=\frac{\sin(45°-30°)}{\cos(45°-30°)}=\frac{\sin 45°\cdot\cos 30°-\cos 45°\cdot\sin 30°}{\cos 45°\cdot\cos 30°+\sin 45°\cdot\sin 30°}$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}\cdot 2}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}\cdot 2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

19. $h(x)=\ln(f(x))$

$h'(x)=\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$ kedjeregeln nu får inte nämnaren bli noll och det sker då $x=0$ och $x=2$

20. Modellera för en rotationsvolym



$$\pi \int_0^{10} (hx+3)^2\,dx = 300$$

$$\pi \int_0^{10} h^2x^2 + 6hx + 9\,dx = \pi\left[\frac{h^2x^3}{3} + 3hx^2 + 9x\right]_0^{10} =$$

$$= \pi\left(\frac{1000h^2}{3} + 300h + 90\right) = 300$$ Lös med geogebra

vi får då $h = 0{,}02$

Den roterande linjen blir då $y = 0{,}02x + 3$ $y(10) = 3{,}4$

öppningen blir då 6,8 cm övre 6,8 cm

21. $h(x) = (f(x))^2 + (g(x))^2$

$h'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) + 2g(x) \cdot g'(x)$ kedjeregeln, sätt in det

vi vet vi får då

$h'(x) = 2f(x) \cdot g(x) - 2g(x) \cdot f(x) = 0$ funktionen $h(x)$

är konstant!

om $h\left(\frac{\pi}{23}\right) = 7$ är också $h\left(\frac{\pi}{28}\right) = 7$