Övningsprov 3 – Komplexa tal

1. Beräkna följande

a) $1 + 3i + 5 - i$

b) $(1 + i)(2 - i)$

c) $(2 - 5i)(2 + 5i)$

d) $\frac{1+2i}{2-3i}$ (6/0/0)

2. Skriv följande komplexa tal på polär form

a) $z = 1 + i$

b) $z = 1 - \sqrt{3}i$ (4/0/0)

3. Skriv det komplexa talet $z = 2i$ i exponentiell form

(2/0/0)

4. Lös ekvationen $x^2 - 6x + 13 = 0$ och bestäm dess komplexa rötter

(1/0/0)

5. Vi definierar det komplexa talet $z = -3 + 4i$. Bestäm följande

a) Placera ut z i det komplexa talplanet
b) $Im(z)$
c) $Re(z)$
d) Bestäm $\bar{z}$
e) Bestäm $|z|$ (6/0/0)

6. För ett tredjegradspolynom på formen $x^3 + ax^2 + bx + c$ vet du har nollställena $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ och $x_3 = -2$. Skriv polynomet i faktorform.

(1/1/0)

7. Rita upp i det komplexa talplanet samtliga komplexa tal z som uppfyller följande krav

- $Im(z) > 0$
- $|z| = 4$
- $\frac{\pi}{2} < Arg(z) < \pi$ (1/1/0)

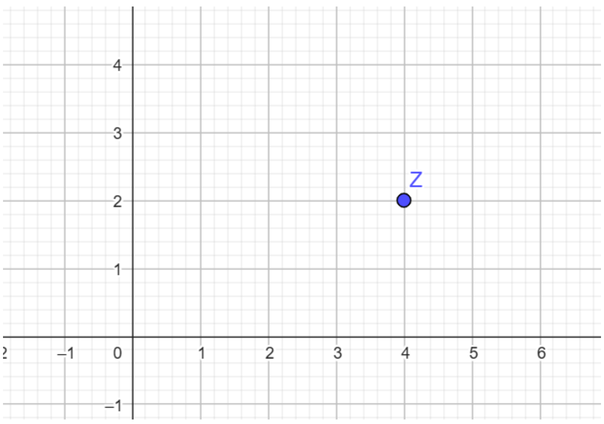
8. Utför polynomdivisionen och bestäm eventuell rest

a) $\frac{x^3-7x-6}{x-3}$ b) $\frac{x^3+3x^2-10x-25}{x+4}$ (4/2/0)

9. Lös ekvationen $z^3 = -1$ med fullständiga lösningar

(0/3/0)

10. Joakim ritar upp följande komplexa tal z i det komplexa talplanet



a) Rita upp det komplexa talet $z \cdot i$ i det komplexa talplanet.

b) För ett annat komplext tal z vet du att $Re(z) = a$ $Im(z) = b$. Bestäm Re och Im för det komplexa talet $i \cdot z$

(1/2/0)

11. Det finns en regel som säger att om en andragradsekvation har enbart reella koefficienter om dess rötter är konjugerande. Utgå från att en av rötterna är $x = a + bi$ för en andragradsfunktion visa att om ekvationen har konjugerande rötter kommer vi enbart få reella koefficienter på ekvationen.

(0/2/0)

12. a) Undersök om polynomet $x^3 + 4x^2 + x - 6$ har en faktor som är $(x - 1)$

b) Bestäm talet a så att polynomet $3x^3 - 4x^2 + 3ax + 10$ har en faktor som är $(x - 1)$

(1/3/0)

13. Visa att $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ för alla z

(0/2/0)

14. a) Visa att $\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^6 = 1$

b) För vilka positiva värden på k kommer följande uttryck $\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^k$ bli reellt?

(2/1/1)

15. Bestäm vilket/vilka a kan vara så att $|z| = 3$ för det komplexa talet

$z = a^2 e^{\frac{\pi}{2}i} + 2ae^{\frac{\pi}{2}i}$ (0/0/2)

16. Rita upp i det komplexa talplanet samtliga komplexa tal z som har följande likhet

$$|z + \bar{z}| = |z - \bar{z}|$$

(0/0/2)

17. Joakim påstår att om a är ett positivt reellt heltal större än noll kommer a^i alltid resultera i ett komplext tal. Undersök om han har rätt.

(0/0/3)

Övningsprov - komplexa tal

1. a) $1+3i+5-i=6+2i$

b) $(1+i)(2-i)=2-i+2i-i^2=2+i-(-1)=$
$=3+i$

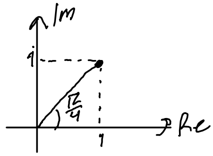
c) $(2-5i)(2+5i)=2^2-(5i)^2$
$=4+25=29$

d) $\dfrac{1+2i}{2-3i}=$ [förläng med nämnarens konjugat]

$=\dfrac{(1+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\dfrac{2+3i+4i+6i^2}{2^2-(3i)^2}=\dfrac{-4+7i}{13}=$

$=\dfrac{-5}{13}+\dfrac{7i}{13}$

2. a)

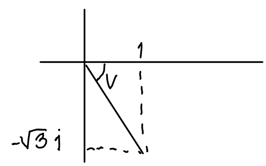


$|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\arg(z)=\frac{\pi}{4}$

Svar: $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

b)



$|z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$

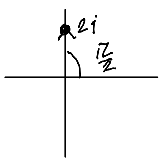
arg v: $\tan v=\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{1}$

$v=\frac{\pi}{3}$ vilket ger

arg $v=\frac{5\pi}{3}$ eller $-\frac{\pi}{3}$

$z=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

3. $z=2i$



$z=2\cdot e^{\frac{\pi}{2}\cdot i}$

4. $x^2-6x+13=0$

$x=3\pm\sqrt{3^2-13}$

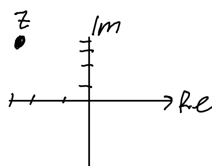
$=3\pm\sqrt{-4}$

$=3\pm 2i$

$x_1=3+2i$

$x_2=3-2i$

5. a)



b) $\text{Im}(z)=4$ c) $\text{Re}(z)=-3$

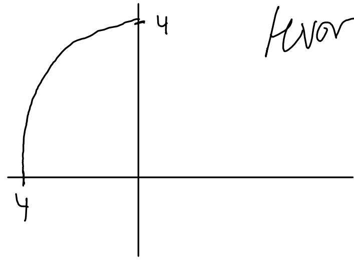
d) $\bar{z}=-3-4i$ e) $|z|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{25}$

$=5$

6. Använd faktorsatsen

$x^3+ax^2+bx+c=(x-3)(x-1)(x+2)$

7.



Kvartscirkel med radien 4

8. Använd den liggande stolen

a)

$$\begin{array}{l} \quad x^2+3x+2 \\ \hline x^3-7x-6 \;\big|\; x-3 \\ -(x^3-3x^2) \\ \hline \quad 3x^2-7x-6 \\ -(3x^2-9x) \\ \hline \quad\quad 2x-6 \\ -(2x-6) \\ \hline \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

$x^2(x-3)=x^3-3x^2$

$3x(x-3)=3x^2-9x$

$2(x-3)=2x-6$

Ingen rest!

$$\begin{array}{l} \quad x^2-x-6 \\ \hline x^3+3x^2-10x-25 \;\big|\; x+4 \\ -(x^3+4x^2) \\ \hline \quad -x^2-10x-25 \\ -(-x^2-4x) \\ \hline \quad\quad -6x-25 \\ -(-6x-24) \\ \hline \quad\quad\quad -1 \end{array}$$

$x^2(x+4)=x^3+4x^2$

$-x(x+4)=-x^2-4x$

$-6(x+4)=-6x-24$

Svar: Resten är -1

9. $z^3=-1$ svar i polär form

$z^3=\cos\pi+i\sin\pi$ $\quad z=\cos(v)+i\sin(v)$ $\quad z^3=\cos(3v)+i\sin(3v)$

$3v=\pi+2\pi\cdot n$

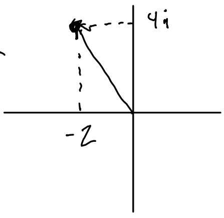
$v=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi\cdot n}{3}$ där $n=0,1,2$

z_1 då $n=0$ $\quad z_1=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

z_2 då $n=1$ $\quad z_2=\cos(\pi)+i\sin(\pi)$

z_3 då $n=2$ $\quad z_3=\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

10. a) $z = 4+2i$ $\quad i\cdot z = i(4+2i) = 4i-2$



b) $\mathrm{Re}(iz) = -b \quad \mathrm{Im}(iz) = a$

11. $(x-(a+bi))(x-(a-bi)) = x^2 - x(a-bi) - x(a+bi) + (a+bi)(a-bi)$

$= x^2 - ax + bix - ax - bix + a^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$ Bara reella koefficienter!

12. a) Om faktorn $(x-1)$ ska vara en faktor för polynomet måste $P(1)=0$ enligt faktorsatsen $P(1) = 1^3 + 4\cdot 1^2 + 1 - 6 = 0$
det stämmer!

b) Ställ upp ekvationen $P(1)=0$

$P(1) = 3\cdot 1^3 - 4\cdot 1^2 + 3a\cdot 1 + 10 = 0$

$-1 + 3a + 10 = 0$ $\quad$ Svar: $a = -3$

$3a = -9$

$a = -3$

13. $z = a+bi \quad \bar{z} = a-bi \quad z\cdot\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2+b^2$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$|z|^2 = a^2+b^2 \qquad |z|^2 = z\cdot\bar{z}$ Snyggt!

14. a) $\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^6 = \cos\left(\frac{6\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{6\pi}{3}\right) = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi)$

$= 1$ $\quad$ VL=HL

b) Två fall! Antingen är uttrycket lika med 1 eller lika med -1

$\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^k = 1 \qquad k\cdot\frac{\pi}{3} = 2\pi\cdot n$

$k = 6\cdot n \quad n = 0,1,2,3\ldots$

eller $\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^k = -1 \qquad k\cdot\frac{\pi}{3} = \pi + 2\pi\cdot n$

$k = 3 + 6\pi\cdot n \quad n = 0,1,2,3\ldots$

15. Vi vet att $|z| = 3$ $\quad z = a^2 e^{\frac{\pi}{2}i} + 2a e^{\frac{\pi}{2}i} = e^{\frac{\pi}{2}i}\underbrace{(a^2+2a)}_{=3}$ eftersom $|z|=3$

$a^2 + 2a = 3$ $\qquad$ Svar

$a^2 + 2a - 3 = 0$

$a = -1 \pm \sqrt{1+3}$

$= -1 \pm 2$

$a_1 = 1 \quad a_2 = -3$ $\qquad$ Svar: Då $a=1$ eller $a=-3$

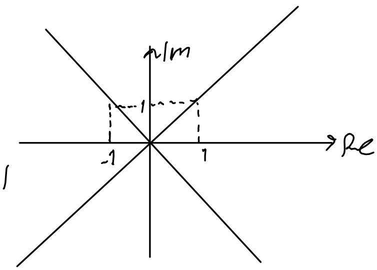
16. $z=a+bi$ $\quad \bar{z}=a-bi$ $\quad |z+\bar{z}|=|z-\bar{z}|$

$|a+bi+a-bi|=|a+bi-(a-bi)|$

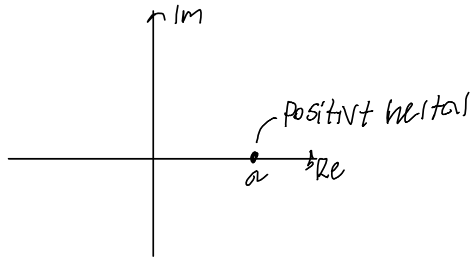
$|2a|=|2bi|$

$|a|=|bi|$

Alla komplexa tal på dessa linjer



17.



Smart att skriva om till e som bas

$a=e^{\ln a}$

$a^i=\left(e^{\ln a}\right)^i=e^{\ln a\cdot i}$ Vi har nu detta i exponentiell form, nice!

ln a kommer nu vara argumentet för det komplexa talet

För att $e^{\ln a\cdot i}$ ska resultera i ett reellt tal måste $\ln a=2\pi\cdot n$ eller $\ln a=\pi+2\pi\cdot n$ vilket aldrig kommer ske då a är ett positivt heltal. Det gör att $e^{\ln a\cdot i}$ alltid kommer vara komplext.