Övningsprov 2 – Ma5

1. Beräkna följande

a) 3!

b) $P(5,2)$

c) $\binom{7}{5}$

d) $\frac{5!}{6!+5!}$ (4/1/0)

2. Joakim definierar tre mängder innehållande tal

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ $B = \{2, 3, 5, 9\}$ $C = \{1,5,6,9\}$

Bestäm följande

a) $A \cup B$
b) $A \cap C$
c) $|A|$
d) $A \backslash B$
e) $|A \cup C|$
f) $A \cap B \cap C$

3. I ett 100 meterslopp tävlar 10 personer.

a) Hur många olika topp 3 kan vi få om vi bortser från placering på topp 3?

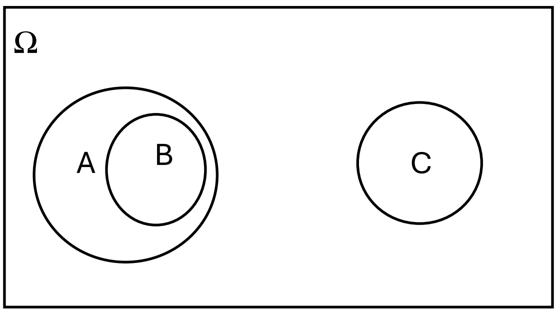
b) Hur många olika topp 3 kan vi få om vi vill ha en 1, 2 och 3? (4/0/0)

4. I Sverige bor det ungefär 10,5 miljoner människor. Sverige har också 290 kommuner. Visa att oavsett hur man fördelar befolkningen i Sverige kommer minst en kommun ha 36 000 personer

(3/0/0)

5. Placera ut rätt mängd i rätt mängdrepresentation i venndiagrammet

1. $\{x | x \text{ är } alla\ jämna\ tal\}$
2. $\{x | x \text{ är } alla\ tal\ som \text{ är } delbara\ med\ 8\}$
3. $\{x | x \text{ är } alla\ udda\ tall\}$



(2/1/0)

6. Joakim ska beställa mat på en restaurang. Här är menyn.

Förrätt	**Huvudrätt**	**Efterrätt**
Toast Skagen	Burgare	Vaniljglass
Vitlöksbröd	Pizza	Panacotta
Linssoppa	Höstsoppa	Fruktskål
Svampsoppa	Schnitzel	Creme Brulée

a) Hur mycket olika kombinationer av tre rätter kan han välja totalt?
b) Joakim älskar schnitzel och vill verkligen ha det till huvudrätt. Hur många kombinationer kan ha nu välja?

c) Astrid vill inte ha soppa till både förrätt och huvudrätt. Hur många kombinationer av tre rätter kan hon nu välja?

(3/2/0)

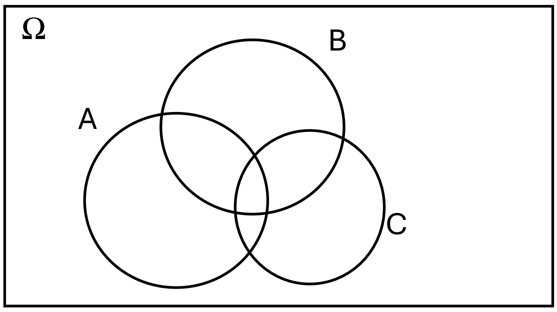
7. 6 personer ska ställa sig i en kö.

a) På hur många olika sätt kan de personerna ställa sig i kön?
b) Joakim och Astrid vill stå bredvid varandra hur många sätt kan man nu ställa sig i kön? (1/2/0)

8. Utveckla följande uttryck med hjälp av binomialsatsen $(2x - y)^4$

(1/1/0)

9. Markera följande mängd i venndiagrammet $A \setminus (B \cup C)$



(0/1/0)

10. I en grupp med 20 personer ska man välja ut tre representanter till en konferens.

a) På hur många sätt kan man göra det?

b) Gruppen innehåller 8 kvinnor och 12 män. På hur många sätt kan man välja tre representanter om det måste vara en man och en kvinna i representantgruppen?

(2/2/0)

11. Visa att likheten stämmer med hjälp av induktionsbevis

$2 + 4 + 6 + 8 + 10 \ldots 2n = n^2 + n$ (1/2/0)

12. I en gymnasieklass fick de 30 elever som gick i klassen välja fördjupningskurser. De fick välja Engelska 7, Matematik 5 eller både och. Det var totalt 17 elever som valde Engelska, 8 personer som valde både Engelska och Matematik.

    Bestäm $|M|$ där M är mängden av de som valde Matematik 5

    (1/1/0)

13. En grupp består av 10 kvinnor och 15 män. Du ska slumpmässigt välja 5 personer ur gruppen

    a) Beräkna sannolikheten att ditt val av personer endast består av kvinnor

    (0/2/0)

    b) Beräkna sannolikheten att högst två är kvinnor blir valda om du väljer ut 5 personer

    (0/0/2)

14. Hur många ord ska bilda av följande bokstäver? (Anta att alla bokstavskombinationer ger ett ord)

    KOMBINATORIK

a) Överhuvudtaget?

b) Om man väljer ut 3 bokstäver (0/2/2)

15. Förenkla följande uttryck $\frac{n!-(n-2)!}{n^2-n-1}$

    (0/0/2)

16. För ett n gäller följande samband: Om du väljer tre element ur n utan hänsyn till ordning kommer det finns dubbelt så många kombinationer som om du väljer 2 element ur n utan hänsyn till ordning. Bestäm talet n algebraiskt.

    (0/1/2)

17. Visa med matematisk induktion att följande likhet stämmer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

(0/1/2)

18. Du är en tjuv och vill bryta dig in i ett kassaskåp hos en rik VD. Du placerar ett ämne på VD:n skrivbord som enbart du kan se med en speciell lampa. Du kommer tillbaka till kontoret nästa dag och ska observera om VD:n har kladdat av ämnet på kassaskåpet, då vet du ju vilka siffror han använder för den fyrsiffriga koden. Vilken vill du som tjuv minst se att han använder för att så snabbt som möjligt komma in i kassaskåpet en kod kan innehålla 2, 3 eller 4 siffror? Motivera.

(0/1/2)

19. I en undersökning där 54 personer svarade fick man veta att

- 31 personer åker längdskidåkning
- 27 personer åker slalom
- 19 personer spelar hockey

Man fick också veta att exakt 11 håller på med två idrotter.

Hur många håller på med alla idrotter? (0/1/1)

Övningsprov 2 - Mars

1. a) $3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$ b) $P(5,2) = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!} = 20$

c) $\binom{7}{5} = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5!}{5!\cdot 2!} = 21$ d) $\frac{5!}{6!+5!} = \frac{5!}{5!(6+1)} = \frac{1}{7}$

Antal element

2. a) $A\cup B = \{1,2,3,5,7,9\}$ b) $A\cap B = \{3,5,9\}$ c) $|A| = 5$

d) $A\setminus B = \{1,7\}$ e) $A\cup C = \{1,3,5,6,7,9\}$ $|A\cup C| = 6$

f) $A\cap B\cap C = \{5,9\}$

3. a) $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{3!\cdot 7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3!} = 120$

b) $P(10,3) = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{7!} = 10\cdot 9\cdot 8 = 720$

4. Lådprincipen: $36000\cdot 290 + 1 < 10500000$ V.S.V

Antal lådor

5. A - 1
B - 2
C - 3

6. a) $4\cdot 4\cdot 4 = 64$ b) Välj 4 förrätter och 4 desert $4\cdot 4 = 16$

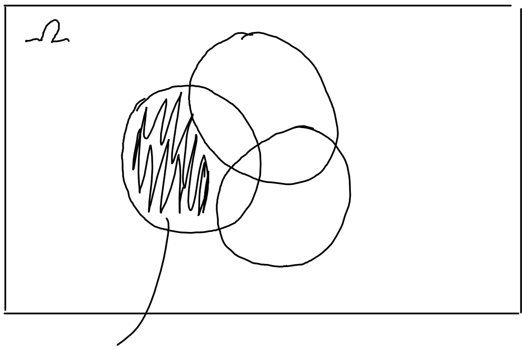
c) Ta totalen och sedan ta bort kombinationerna där hon får soppa 2 gånger.
kombinationer med dubbelsoppa $2\cdot 1\cdot 4 = 8$
$64 - 8 = 56$

7. a) $6! = 720$ b) $5!\cdot 2 = 240$

8. $(2x-y)^4 = \binom{4}{0}\cdot(2x)^4 + \binom{4}{1}\cdot(2x)^3\cdot(-y) + \binom{4}{2}\cdot(2x)^2\cdot(-y)^2 + \binom{4}{3}\cdot(2x)\cdot(-y)^3 +$
$\binom{4}{4}(-y)^4 = 16x^4 - 32x^3y + 24xy^2 - 8xy^3 + y^4$

Binomialsatsen!

9.



$A \setminus (B \cup C)$

10 a) $\binom{20}{3} = \frac{20!}{3! \cdot (20-3)!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17!}{3! \cdot 17!}$

$= \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!} = 1140$

b) På hur många sätt kan vi välja ut bara män eller bara kvinnor?

Bara män: $\binom{12}{3} = 220$

Bara kvinnor: $\binom{8}{3} = 56$

$1140 - 276 = 864$

11. Induktionsbevis

$2+4+6+8+\ldots+2n = n^2+n$

(I) Enklest fall $n=1$

$2 = 1^2+1$

$2=2$ VL=HL

(II) Induktionsantagande

Vi antar att likheten stämmer för $n=p$

$2+4+6+8+\ldots+2p = p^2+p$

(III) Induktionssteg

Visa likheten för $n=p+1$

$\underbrace{2+4+6+8+\ldots+2p}_{\text{enligt antagande}}+2(p+1) = (p+1)^2+p+1$

$= p^2+p$

$p^2+p+2p+2 = p^2+2p+1+p+1$

$p^2+3p+2 = p^2+3p+2$

VL=HL vilket visar att likheten stämmer för alla n $\square$

12. $030 = 17 + |M| - 8$ $|M| = 21$

Svar: 21 elever valde matte 5

13. a) $\frac{\text{Kombinationer med bara män}}{\text{Totala antalet kombinationer}}$

Bara kvinnor: $\binom{10}{5}$ Totala: $\binom{25}{5}$

$\frac{\binom{10}{5}}{\binom{25}{5}} \approx 0{,}0047$ Svar: 0,47 %

b) Falluppdela

Inga kvinnor: $\binom{15}{5}$

1 kvinna: $10 \cdot \binom{15}{4}$

2 kvinnor: $\binom{10}{2} \cdot \binom{15}{3}$

13 b) fort. $\dfrac{\binom{15}{5}+10\cdot\binom{15}{4}+\binom{10}{2}\cdot\binom{15}{3}}{\binom{25}{5}} \approx 0,699$ Svar: Ungefär 70%

14. a) $\dfrac{12!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = 59875200$

dubbletter

b) Dela upp i fall

Fall 1: Inga dubbletter: $P(9,3) = 504$

Fall 2: En dubblett:

D D ? D ? D ? D D 3 sätt att placera dubbletter

Det finns 3 dubbletter och sedan ska vi placera ut sista bokstaven vi får då

$3\cdot 3\cdot 8 = 72$ Totalt: $504 + 72 = 576$ Svar: 576st

15. $\dfrac{n! - (n-2)!}{n^2-n-1} = \dfrac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)! - (n-2)!}{n^2-n-1} = \dfrac{(n-2)!(n\cdot(n-1)-1)}{n^2-n-1}$ faktorisera

$= \dfrac{(n-2)!(n^2-n-1)}{n^2-n-1} = (n-2)!$

16. $\binom{n}{3} = 3\binom{n}{2}$

$\dfrac{n!}{3!(n-3)!} = 3\cdot\dfrac{n!}{2!(n-2)!}$

$\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{3!\cdot(n-3)!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)!}{2\cdot(n-2)!}$

$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

$\dfrac{n-2}{6} = \dfrac{1}{2}$

$2(n-2) = 6$

$2n-4 = 6$

$2n = 10$

$n = 5$

17. I $n=1$ $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^1}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ VL=HL

II Induktionsantagande $n=p$

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^p} = 1 - \frac{1}{2^p}$$

III Induktionssteg $n=p+1$

$$\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^p}}_{=1-\frac{1}{2^p} \text{ enligt antagande}} + \frac{1}{2^{p+1}} = 1 - \frac{1}{2^{p+1}}$$

$$1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{p+1}} = 1 - \frac{1}{2^{p+1}}$$

$$1 - \frac{2}{2^{p+1}} + \frac{1}{2^{p+1}} = 1 - \frac{1}{2^{p+1}}$$

$$1 + \frac{-2+1}{2^{p+1}} = 1 - \frac{1}{2^{p+1}}$$

$$1 - \frac{1}{2^{p+1}} = 1 - \frac{1}{2^{p+1}} \quad \text{VL=HL}$$

Visar att det gäller för alla n

18. Om vi antar att VD:n använder 1-2, 1-3 eller 1-4 ska vi undersöka de olika fallen för en fyrsiffrig kod.

1-4 kan ges av $4! = 24$ möjliga koder

1-3 Fall 1: två 1:or $\binom{4}{2} \cdot 2$

Placera ut 2 1:or på 4 platser

resterande två positioner

Fall 2: två 2:or samma uträkning $= 6 \cdot 2 = 12$

Fall 3: två 3:or samma uträkning

Totalt: $3 \cdot 12 = 36$

1-2 Fall 1: 1 etta 4 kombinationer

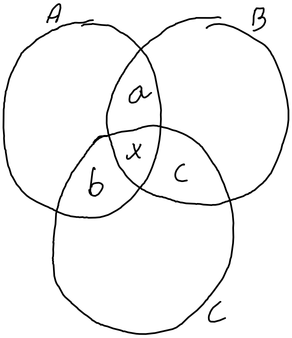
Fall 2: 1 tvåa 4 kombinationer

Fall 3: 2 ettor och 2 tvåor: $\binom{4}{2} = 6$

Totalt: $4+4+6=14$

Svar: Tre siffror är inte bra!

19 A = Långdskidåkning B = Slalom C = Hockey



Vi kan använda formeln för att ställa upp ett uttryck

$|A \cup B \cup C| = 54 \quad |A| = 31 \quad |B| = 27 \quad |C| = 19$

$a + b + c = 11$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - \overbrace{|A \cap B|}^{a+x} - \overbrace{|A \cap C|}^{b+x} - \overbrace{|B \cap C|}^{c+x} + \overbrace{|A \cap B \cap C|}^{x}$$

$$54 = 31 + 27 + 19 - (a+x) - (b+x) - (c+x) + x$$

$$54 = 77 - a - x - b - x - c - x + x$$

$$-23 = -\underbrace{(a+b+c)}_{=11} - 2x$$

$$-12 = -2x$$

$$x = 6$$

Svar: 6 spelar alla sporter