Delprov B	Uppgift 1–12. Endast svar krävs.
Delprov C	Uppgift 13–20. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	150 minuter för Delprov B och Delprov C tillsammans.
Hjälpmedel	Formelblad och linjal.

Provet består av tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D).
Tillsammans kan de ge 60 poäng varav 22 E-, 21 C- och 17 A-poäng.

Gräns för provbetyget
E: 14 poäng
D: 23 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå
C: 30 poäng varav 12 poäng på minst C-nivå
B: 39 poäng varav 5 poäng på A-nivå
A: 47 poäng varav 9 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: ____

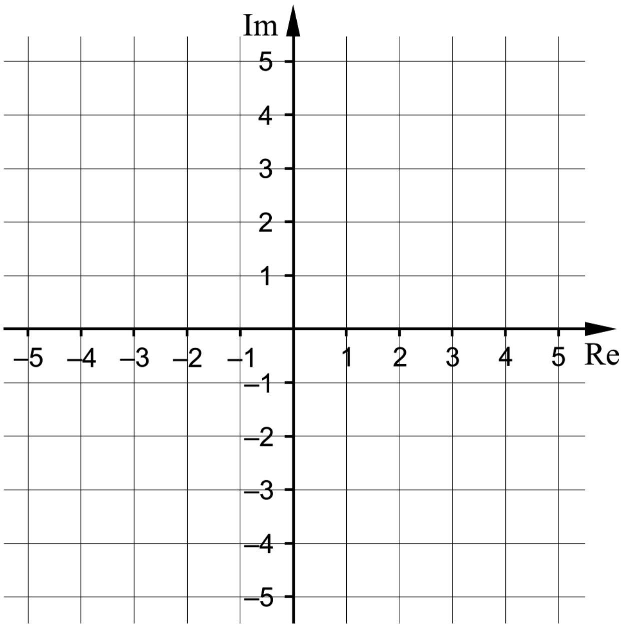
Födelsedatum: ____________________________________

Gymnasieprogram/Komvux: ______________________________

Delprov B: Digitala verktyg är inte tillåtna. *Endast svar krävs*. Skriv dina svar direkt i elevhäftet.

1. Skriv vinkeln $18°$ i radianer. ____________________ (1/0/0)

2. Markera i det komplexa talplanet ett tal z för vilket det gäller att $\text{Re}(z) = 0$ och $|z| = 2$



(1/0/0)

3. Lös ekvationen $z^3 - 6z^2 + 13z = 0$

$z_1 =$ ____________________

$z_2 =$ ____________________

$z_3 =$ ____________________ (2/0/0)

4. Ange ett komplext tal z på formen $z = a + bi$ som uppfyller villkoret $\arg(z) = 135°$ ____________________ (1/0/0)

5. Det komplexa talet $z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}\right)$ är givet.

Bestäm z^3 ____________________ (1/0/0)

6. Det finns många icke-reella tal z för vilka det gäller att
$z+\overline{z}=-10$
Ange ett sådant icke-reellt tal z ____________________ (1/0/0)

7. Funktionen $f(x)=\dfrac{x}{x^2-9}+\dfrac{7}{8}$ har två lodräta och en vågrät asymptot.
Ange ekvationerna för de tre asymptoterna. ____________________

____

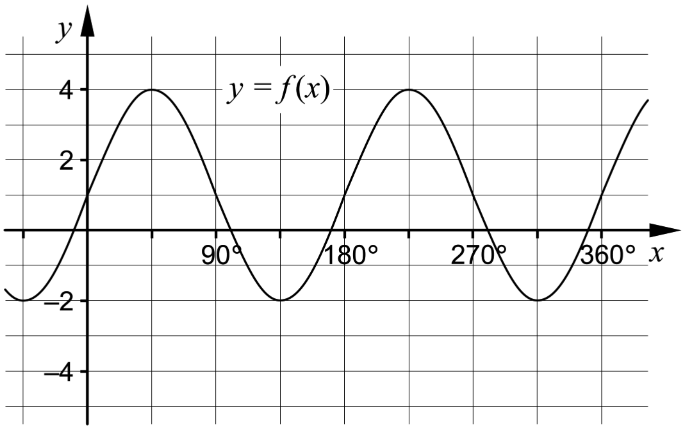
____________________ (2/0/0)

8. Derivera

a) $f(x)=2x\cdot\sin x$ ____________________ (1/0/0)

b) $g(x)=\dfrac{e^x}{x}$ ____________________ (0/1/0)

9. I figuren visas grafen till en trigonometrisk funktion f.



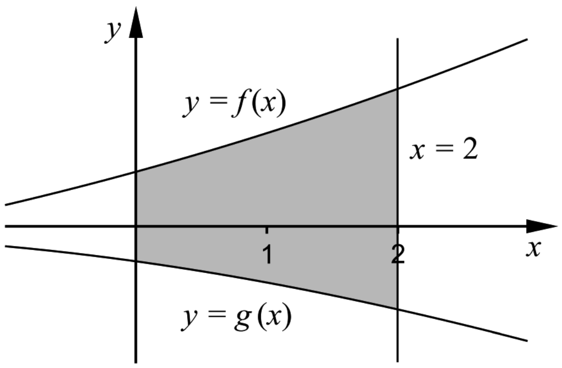
a) Funktionen kan skrivas $f(x)=A\sin(kx)+B$.
Bestäm konstanterna A, B och k. $A=$ ____________________

$B=$ ____________________

$k=$ ____________________ (1/1/0)

b) Funktionen kan även skrivas
$f(x)=A\cos(kx+v)+B$ där A, B och k
har samma värden som i uppgift a).
Bestäm ett värde på konstanten v. $v=$ ____________________ (0/0/1)

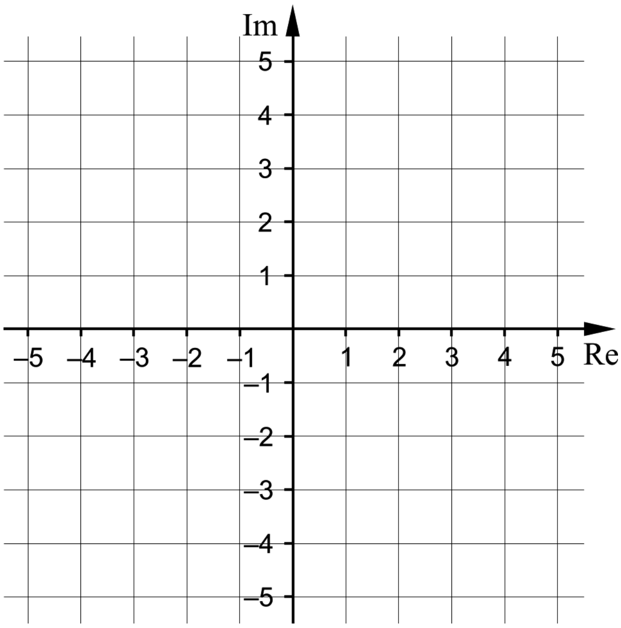
10. Det skuggade området i figuren begränsas av graferna till funktionerna f och g, linjen $x = 2$ samt y-axeln. Områdets area är 16 a.e.



För funktionen f gäller att $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 10$

Bestäm $\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x$ ______________________ (0/1/0)

11. Markera i det komplexa talplanet alla z som uppfyller villkoret $|z + \overline{z}| = |z - \overline{z}|$.



(0/0/2)

12. Ge ett exempel på en trigonometrisk funktion f på formen $f(x) = A\sin kx$

som uppfyller $\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ ______________________ (0/0/1)

Delprov C: Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

13. Beräkna $\frac{20}{3+\mathrm{i}}$ och svara på formen $a+b\mathrm{i}$. (2/0/0)

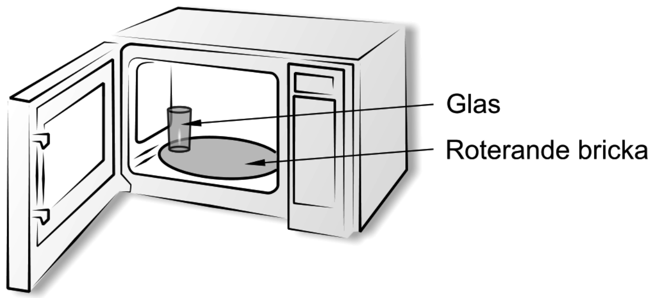
14. Bestäm konstanten a så att $y=2\mathrm{e}^{3x}$ blir en lösning till differentialekvationen $y'+ay=0$ (2/0/0)

15. För vinkeln v gäller att $\sin v=\frac{4}{5}$ och $0° < v < 90°$
Bestäm $\cos(v+45°)$ exakt. (0/3/0)

16. Grafen till $f(x)=(2x-3)^5$ har en tangent i den punkt där $f(x)=1$
Bestäm tangentens ekvation. (0/3/0)

17. Visa att $g(x)=\sin^4 x$ är en primitiv funktion till $f(x)=2\sin^2 x\cdot\sin 2x$ (0/2/0)

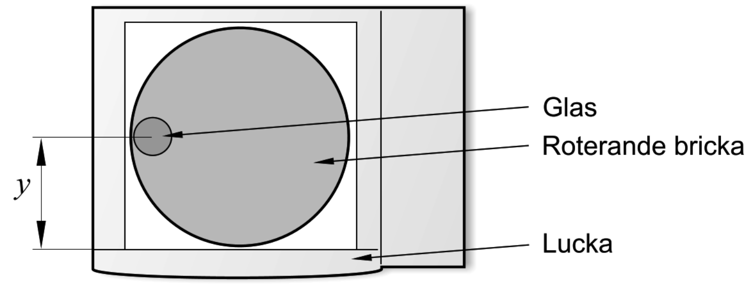
18. I en mikrovågsugn finns en rund bricka som kan rotera. Ett glas placeras på brickan enligt figur 1.



Figur 1

När mikrovågsugnen är igång roterar brickan med konstant fart.
Avståndet y cm från glasets centrum till mikrovågsugnens lucka beskrivs av funktionen $y(t) = 17{,}0 - 12{,}5\cos\left(\frac{\pi}{6}(t+3)\right)$

där t är tiden i sekunder. Vid $t = 0$ befinner sig glaset längst till vänster i mikrovågsugnen, se figur 2.

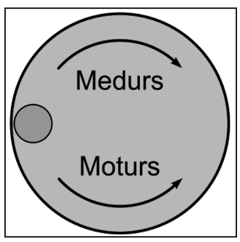


Figur 2 Mikrovågsugn i genomskärning sedd uppifrån.
Glasets placering vid t = 0

a) Bestäm det största avståndet från glasets centrum till mikrovågsugnens lucka. *Endast svar krävs* (1/0/0)

b) Bestäm hur lång tid det tar för glaset att rotera ett varv i mikrovågsugnen. (0/1/0)

Glaset roterar antingen medurs eller moturs. Se figur 3.



Figur 3

c) Undersök åt vilket håll glaset roterar i den här mikrovågsugnen. (0/0/2)

19. Lös ekvationen $\tan 2x \cdot \tan x = \tan x$ (0/0/2)

20. Låt $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + \dfrac{1}{4}$

Visa att $f(x) \geq 0$ för alla x. (0/0/2)

Delprov D	Uppgift 21–28. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter.
Hjälpmedel	Digitala verktyg, formelblad och linjal.

Provet består av tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D).
Tillsammans kan de ge 60 poäng varav 22 E-, 21 C- och 17 A-poäng.

Gräns för provbetyget
E: 14 poäng
D: 23 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå
C: 30 poäng varav 12 poäng på minst C-nivå
B: 39 poäng varav 5 poäng på A-nivå
A: 47 poäng varav 9 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: ____

Födelsedatum: ______________________________________

Gymnasieprogram/Komvux: _____________________________

Delprov D: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

21. Bestäm den största roten till ekvationen $\sin x + \cos(3,6x) = 0$ i intervallet $0° < x < 180°$
Ange svaret med minst tre värdesiffror. (2/0/0)

22. Rasmus studerar graferna till $y = 3\sin x$ och $y = 2\cos x$. Han ser att största värdet är 3 respektive 2. Han tänker då att största värdet av $y = 3\sin x + 2\cos x$ måste vara $3 + 2 = 5$

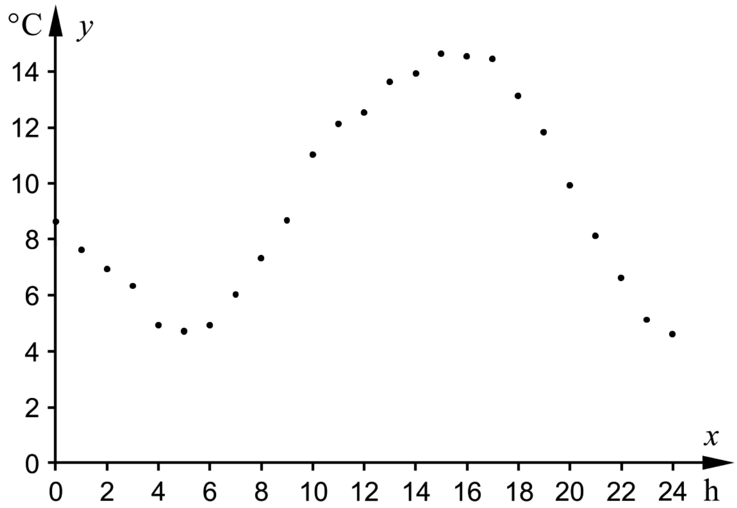
Rasmus kontrollerar detta genom att rita grafen till $y = 3\sin x + 2\cos x$ på räknaren och upptäcker då att största värdet är mindre än 5

Förklara med hjälp av graferna till $y = 3\sin x$ och $y = 2\cos x$ varför det största värdet av $y = 3\sin x + 2\cos x$ inte är 5 (1/1/0)

23. I Torup finns en av SMHI:s väderstationer som mäter temperaturen en gång i timmen.

Om dygnsmedeltemperaturen överstiger 10 °C fem dygn i rad anses sommaren ha börjat.

Under de fyra dygnen 20–23 april 2014 översteg dygnsmedeltemperaturen 10 °C i Torup. Diagrammet visar temperaturerna som mättes den 24 april.



Enligt en förenklad modell kan temperaturen under detta dygn beskrivas med funktionen

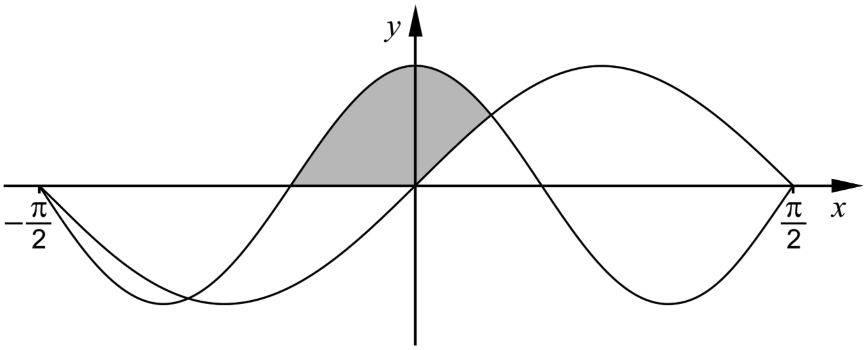
$$f(x) = -0,0079x^3 + 0,238x^2 - 1,43x + 8,2 \qquad 0 \le x \le 24$$

där $f(x)$ är temperaturen i °C och x är tiden i timmar efter klockan 0:00

Faktaruta: Om temperaturen ges av $f(x)$ kan medeltemperaturen för tidsintervallet $a \le x \le b$ beräknas på följande sätt: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

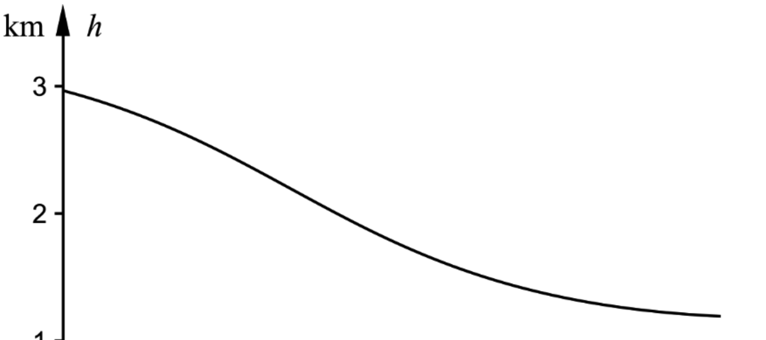
Avgör om sommaren hade börjat i Torup genom att bestämma dygnsmedeltemperaturen den 24 april med hjälp av funktionen. (2/0/0)

24. I figuren visas ett koordinatsystem med kurvorna $y = \cos 3x$ och $y = \sin 2x$ ritade i intervallet $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$



Beräkna arean av det skuggade området. Svara med minst två värdesiffror. (1/3/0)

25. Ett företag ska bygga en stuga i en backe i Alperna och vill veta backens lutning. Enligt en förenklad modell kan backens form beskrivas med sambandet $h(x) = 4{,}1 - \frac{5+3e^x}{6+e^x}$ där $h(x)$ är höjden i km över havet och x är sträckan i km i horisontell riktning.



Företaget ska bygga stugan på den del av backen som ligger på höjden 1,4 km över havet. Bestäm vilken lutning backen har där stugan ska byggas.
Svara med minst två värdesiffror. (0/2/0)

26. Ett företag vill kontrollera livslängden hos en viss typ av lampor. Tiden till dess att en lampa går sönder har visat sig vara en slumpvariabel med täthetsfunktionen $f(x) = \dfrac{e^{-x/24}}{24}$, $x \geq 0$ där x är tiden i månader som lampan används.

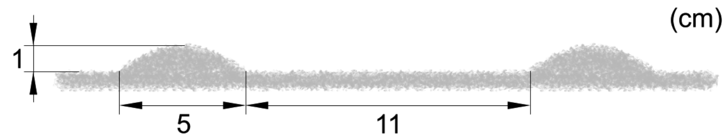
a) Bestäm sannolikheten att en slumpvis vald lampa går sönder under de 3 första månaderna som den används. (0/2/0)

b) Anta att man slumpvis väljer ut tre lampor. Bestäm sannolikheten för att alla tre lamporna är hela efter 6 månaders användning. (0/0/2)

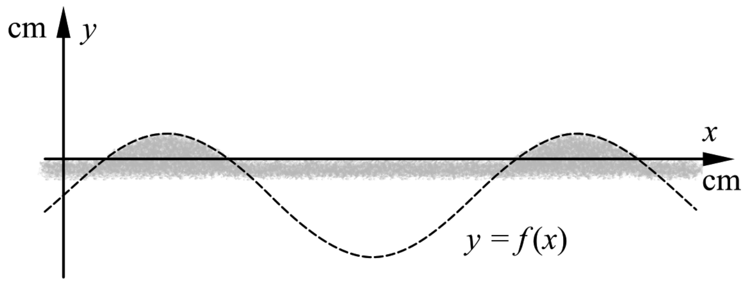
27. Undersök om polynomet $p(x) = x^5 + a^4x^4 - x^3 + a^2x^2 + x + 1$ är delbart med $x - 1$ för något reellt värde på konstanten a. (0/0/2)

28. På havsbottnen vid sandstränder bildas ibland periodiska mönster av kullar i sanden.

Anta att höjden på en kulle är 1 cm, bredden är 5 cm och avståndet mellan två kullar är 11 cm. Se figur nedan.



Enligt en förenklad modell följer varje kulle toppen på en sinuskurva som ges av funktionen $f(x) = A\sin(kx) - d$ där A, k och d är positiva konstanter. Se figur nedan.



a) Bestäm värdet på konstanten k (0/1/0)

b) Bestäm värdet på konstanterna A och d. (0/0/3)

Innehållsförteckning

Inledning

Det här häftet ska användas vid bedömningen och betygssättningen av det nationella provet i matematik 4. Häftet består av 5 kapitel. Inledningsvis finns information om bedömningen och betygssättningen av provet (kapitel 1). Sedan följer anvisningar för att bedöma samtliga skriftliga delprov (kapitel 2). Därefter finns ett kapitel med exempel på bedömda elevlösningar (kapitel 3) och ett kapitel med instruktioner för sammanvägningen till ett provbetyg (kapitel 4). Det avslutande kapitlet innehåller kopieringsunderlag samt hänvisningar till webbmaterial (kapitel 5).

1. Allmän information om bedömningen och betygssättningen av provet i matematik 4

Allmänna riktlinjer för bedömning

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges den poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som prövas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den *huvudsakliga* som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E_{PL} och A_R ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

Bedömningsmodeller

Bedömningsanvisningarna till långsvarsuppgifterna är skrivna enligt tre olika modeller. Avvikelser från dessa kommenteras i direkt anslutning till uppgiftens bedömningsanvisning.

Modell 1:

Godtagbar ansats, t.ex. …	+1 E_P
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (…)	+1 E_P

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen utfaller först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.

Modell 2:

Godtagbar ansats, t.ex. …	+1 E_P
med korrekt bestämning av …	+1 E_P
Godtagbar verifiering av …	+1 E_P

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (3/0/0). I detta exempel är den tredje poängen oberoende av den andra poängen. Det indikeras med att den tredje raden inleds med stor bokstav. Det innebär att den tredje poängen kan falla ut även om den andra poängen inte gör det.

Modell 3:

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. … 1 E_R	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. … 1 E_R och 1 C_R	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. … 1 E_R, 1 C_R och 1 A_R

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).

Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga

Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för betyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

För uppgifter där elevens skriftliga kommunikativa förmåga ska bedömas gäller de allmänna kraven nedan.

Kommunikationspoäng på C-nivå (C_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

För uppgifter där det kan delas ut kommunikationspoäng på C- eller A-nivå kan bland annat symboler, termer och hänvisningar förekomma i lösningen. Följande tabell kan då vara till stöd vid bedömningen av skriftlig kommunikativ förmåga:

Symboler	t.ex. $=$, $\neq$, $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $\approx$, $\pm$, $\sqrt{\ }$, $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, x, y, $(\ )$, $[\ ]$, $\int$, $\mathrm{d}x$, gradtecken, index, lim, VL, HL, $\sin v$, $\sin^2 v$
Termer	t.ex. komplext tal, komplext talplan, real-/imaginärdel, polär/rektangulär form, absolutbelopp, argument, konjugat, reell/komplex rot, enhetscirkel, period, amplitud, fasförskjutning, radian, ekvation, funktion, funktionsvärde, definitionsmängd, värdemängd, koefficient, nollställe, skärningspunkt, graf, asymptot, derivata, andraderivata, förändringshastighet, extrempunkt, maximi-/minimi-/terrasspunkt, största/minsta värde, växande, avtagande, integral, integrationsgräns, primitiv funktion, längd-/area-/volymenhet, rotationskropp, intervall, sannolikhetsfördelning, normalfördelning, täthetsfunktion, standardavvikelse, polynomdivision, differentialekvation, begynnelsevillkor
Hänvisningar	t.ex. till de Moivres formel, avståndsformeln, faktorsatsen, enhetscirkeln, trigonometriska formler, deriveringsregler, kedjeregeln, figur
Övrigt	t.ex. figurer (med införda beteckningar), definierade variabler, tabeller, angivna enheter

2. Bedömningsanvisningar

I det här kapitlet finns anvisningar för hur provet ska bedömas.

Läsanvisning

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om exempel på bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en hänvisning.

Instruktioner för bedömning av delprov B

1.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar ($\frac{\pi}{10}$)	+1 E_B
2.		**Max 1/0/0**
	Godtagbar markering (t ex $z = 2\mathrm{i}$)	+1 E_B
3.		**Max 2/0/0**
	Anger minst två korrekta rötter	+1 E_P
	med korrekt svar ($z_1 = 0,\ z_2 = 3 + 2\mathrm{i}$ och $z_3 = 3 - 2\mathrm{i}$)	+1 E_P
4.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar (t ex $-1 + \mathrm{i}$)	+1 E_B
5.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar ($8(\cos\frac{6\pi}{7} + \mathrm{i}\sin\frac{6\pi}{7})$)	+1 E_B
6.		**Max 1/0/0**
	Korrekt svar (t ex $z = -5 + \mathrm{i}$)	+1 E_{PL}

7. **Max 2/0/0**

Anger minst en korrekt ekvation +1 E_B

med korrekt svar ($x = 3$, $x = -3$ och $y = \frac{7}{8}$) +1 E_B

8. **Max 1/1/0**

a) Korrekt svar ($f'(x) = 2\sin x + 2x\cos x$) +1 E_P

b) Korrekt svar $\left(g'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} \right)$ +1 C_P

9. **Max 1/1/1**

a) Anger utifrån godtagbar avläsning minst en korrekt konstant +1 E_B

med korrekt svar ($A = 3$, $B = 1$ och $k = 2$) +1 C_B

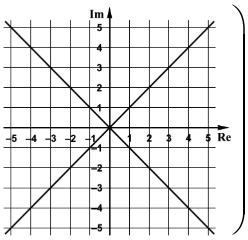
b) Korrekt svar (t ex $v = -90°$) +1 A_B

10. **Max 0/1/0**

Korrekt svar (-6) +1 C_{PL}

11. **Max 0/0/2**

Markering av minst två godtagbara punkter +1 A_B

med godtagbart svar 

+1 A_{PL}

12. **Max 0/0/1**

Korrekt svar (t ex $f(x) = \frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}$) +1 A_{PL}

Instruktioner för bedömning av delprov C

13. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, förlänger med konjugatet $+1\ E_P$

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($6-2i$) $+1\ E_P$

14. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t ex deriverar och tecknar ekvationen $6e^{3x}+2ae^{3x}=0$ $+1\ E_{PL}$

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($a=-3$) $+1\ E_{PL}$

15. **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, bestämmer $\cos v=\frac{3}{5}$ *eller* kommer fram till $\cos v\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\sin v\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$ med hjälp av additionssatsen $+1\ C_P$

med godtagbar fortsättning, bestämmer $\cos v=\frac{3}{5}$ *och* kommer fram till $\cos v\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\sin v\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$ med hjälp av additionssatsen $+1\ C_P$

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($-\frac{1}{5\sqrt{2}}$) $+1\ C_P$

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

16. **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, bestämmer x-värdet korrekt, $x=2$, *och* bestämmer $f'(x)$ korrekt, $f'(x)=10(2x-3)^4$ $+1\ C_{PL}$

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($y=10x-19$) $+1\ C_{PL}$

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 5 $+1\ C_K$

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

17. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, t ex deriverar $g(x)$ korrekt +1 C_R

med ett i övrigt godtagbart bevis +1 C_R

18. **Max 1/1/2**

a) Korrekt svar (29,5 cm) +1 E_M

b) Godtagbar lösning med korrekt svar (12 s) +1 C_M

c) Godtagbar lösning med korrekt svar (medurs) +1 A_M

Lösningen (deluppgift b och c) kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 5 +1 A_K

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

19. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, t ex skriver om ekvationen till $(\tan 2x - 1)\cdot \tan x = 0$ och tecknar de två ekvationerna $\tan 2x - 1 = 0$ och $\tan x = 0$ +1 A_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($x = n\cdot 180°$ och $x = 22{,}5° + n\cdot 90°$) +1 A_P

20. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, bestämmer derivatans nollställe *eller*

skriver om funktionen som $f(x) = \left(\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\right)^2$ +1 A_R

med ett i övrigt godtagbart bevis +1 A_R

Instruktioner för bedömning av delprov D

21. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t ex skissar kurvan $y = \sin x + \cos(3{,}6x)$ *eller* beskriver hur räknaren kan användas för att beräkna svaret numeriskt +1 E_P

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($173°$) +1 E_P

22. **Max 1/1/0**

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang där kurvornas allmänna egenskaper jämförs, t ex ”Sinus- och cosinuskurvorna är förskjutna i förhållande till varandra.” 1 E_R	Godtagbart välgrundat resonemang som förklarar varför största värdet inte kan vara 5, t ex ”Maximipunkterna infaller vid olika x-värden.” 1 E_R och 1 C_R	

__Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar__

23. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, ställer upp integralen med korrekta gränser,

$$\frac{1}{24-0}\int_0^{24}(-0{,}0079x^3+0{,}238x^2-1{,}43x+8{,}2)\,dx$$ +1 E_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (t ex ”Nej, sommaren hade inte kommit eftersom medeltemperaturen var 9,4 °C.”) +1 E_M

24. **Max 1/3/0**

Godtagbar ansats, t ex bestämmer x-koordinaterna för skärningspunkterna, $-0{,}524$ och $0{,}314$ +1 E_P

med godtagbar fortsättning, ställer upp ett korrekt uttryck för arean,

t ex $\int_{-0{,}524}^{0}\cos 3x\,dx+\int_0^{0{,}314}(\cos 3x-\sin 2x)\,dx$ +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (0,51 a.e.) +1 C_P

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 5 +1 C_K

__Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar__

25. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, t ex löser ekvationen $h(x)=1,4$ +1 C_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($-0,26$) +1 C_M

Kommentar: Även svaret 0,26 eller motsvarande svar, t ex i procent eller grader, anses vara godtagbart.

26. **Max 0/2/2**

a) Godtagbar ansats, t ex ställer upp korrekt integraluttryck för den sökta sannolikheten +1 C_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (0,12) +1 C_M

b) Godtagbar ansats, t ex bestämmer sannolikheten att en lampa är hel efter 6 månader, 0,779 +1 A_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (0,47) +1 A_M

27. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, t ex utför divisionen $\dfrac{p(x)}{x-1}$ *eller*

bestämmer $p(1)$ och sätter $1+a^4-1+a^2+1+1=0$ +1 A_R

med ett godtagbart slutfört resonemang som

visar att divisionen $\dfrac{p(x)}{x-1}$ ger en rest $\neq 0$ för alla a *eller*

visar att $p(1)\neq 0$ för alla a och drar slutsatsen att polynomet inte är delbart med $x-1$ för något reellt värde på a +1 A_R

28. **Max 0/1/3**

a) Godtagbar lösning med godtagbart svar (0,39) +1 C_B

Kommentar: Vid räkning med grader fås svaret 22,5 vilket också anses godtagbart.

b) Godtagbar ansats, t ex kommer fram till sambandet $d=A-1$ *eller* bestämmer något av nollställena $x_1=1,5$ eller $x_2=6,5$ +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar ($A=2,25,\ d=1,25$) +1 A_{PL}

Lösningen (deluppgift a och b) kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 5 +1 A_K

Se avsnittet Exempel på bedömda elevlösningar

3. Exempel på bedömda elevlösningar

Uppgift 15

Elevlösningsexempel 15.1 (3 C_P)

Trig. ettan $\sin^2 V + \cos^2 V = 1$

$$\cos^2 V = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\cos^2 V = \frac{9}{25}$$

$$\cos V = \frac{3}{5}$$

$$\cos(V + 45°) = \cos V \cdot \cos 45° - \sin V \cdot \sin 45° =$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{5\sqrt{2}}$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen innehåller en godtagbar bestämning av $\cos(v + 45°)$. Vid bestämningen av $\cos v$ framgår det inte att $\cos v$ kan ha två värden där den negativa lösningen kan förkastas. Eftersom det givna intervallet är $0° < v < 90°$ anses lösningen, trots att endast positiva $\cos v$ behandlas, nätt och jämnt uppfylla kraven för de tre procedurpoängen.

Uppgift 16

Elevlösningsexempel 16.1 (2 C_{PL} och 1 C_K)

$f(x) = (2x-3)^5 \qquad f(x) = 1$

$x = 2 \longrightarrow f(2) = (2\cdot 2-3)^5 = 1$

$f'(x) = 10(2x-3)^4$

$k = 10(2\cdot 2-3)^4 = 10$

$y = kx + m$

$1 = 10\cdot 2 + m$

$m = -19$

$\underline{y = 10x - 19}$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar bestämning av tangentens ekvation. När det gäller kommunikation är lösningen möjlig att följa och förstå men det redovisas inte hur ekvationen $f(x)=1$ lösts. Vidare framgår inte tydligt att $k = f'(2)$. Trots dessa brister anses kraven för kommunikationspoäng på C-nivå nätt och jämnt vara uppfyllda. Sammantaget ges lösningen två problemlösningspoäng och en kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 18

Elevlösningsexempel 18bc.1 (1 C_M och 1 A_M)

b) $y(t) = 17{,}0 - 12{,}5\cos\left(\frac{\pi}{6}(t+3)\right)$

När $\cos\left(\frac{\pi}{6}(t+3)\right) = (-1)$ befinner sig glaset så långt ifrån luckan som möjligt.

Detta sker efter 3 sekunder:

$\cos\left(\frac{\pi}{6}(3+3)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 6\right) = \cos(\pi) = (-1)$

Då blir $y(t) = 17{,}0 - 12{,}5\cos(\pi) =$

$= 17{,}0 - 12{,}5\cdot(-1) = 17{,}0 + 12{,}5 = 29{,}5$ cm från luckan.

Det tog alltså 3 sekunder för glaset att röra sig ett kvarts varv. Därför tar det $3\cdot 4 = 12$ sekunder att rotera ett helt varv.

Svar: 12 sekunder

c) Enligt beräkningarna ovan bör glaset rotera medurs

sekunder	cm från luckan
3	29,5 cm
6	17,0 cm
9	4,5 cm
12	17,0 cm

$17{,}0 - 12{,}5\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 6\right) = 29{,}5$

$17{,}0 - 12{,}5\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 9\right) = 17{,}0$

$17{,}0 - 12{,}5\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 12\right) = 4{,}5$

$17{,}0 - 12{,}5\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 15\right) = 17{,}0$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen innehåller en godtagbar lösning av deluppgift b) och c). När det gäller kommunikation saknas i b) motivering till att $t = 3$ s är första tidpunkten då glaset befinner sig längst från luckan. Detta gör att kraven för kommunikationspoäng på A-nivå inte anses uppfyllda. Sammantaget ges lösningen av deluppgift b) och c) en modelleringspoäng på C-nivå och en modelleringspoäng på A-nivå.

Elevlösningsexempel 18bc.2 (1 C_M, 1 A_M och 1 A_K)

b) Perioden $= \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 2\pi \cdot \dfrac{6}{\pi} = \underline{\underline{12 \text{ s}}}$

c) $y(0) = 17$

$y(1) = 17 - 12{,}5 \cos\left(\frac{4\pi}{6}\right) = 17 - 12{,}5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) =$

$= 17 + 6{,}25 = 23{,}25$

Eftersom y ökar direkt efter noll måste glaset röra sig bort från luckan och då röra sig medurs.

<u>Svar:</u> medurs

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen innehåller en korrekt bestämning av perioden i b). I c) jämförs $y(1)$ med $y(0)$ och en korrekt slutsats dras om rotationsriktning. Dock saknas ett resonemang som styrker att tidsskillnaden 1 sekund är mindre än en halv period men detta anses underförstått då b)-uppgiftens lösning gav perioden 12 sekunder. Elevlösningen bedöms nätt och jämnt uppfylla kraven för modelleringspoängen på A-nivå. När det gäller kommunikation är lösningen kortfattad och i sista stycket framgår inte att ”noll” avser tidpunkten $t = 0$ s. Lösningen anses trots dessa brister nätt och jämnt uppfylla kraven för kommunikationspoäng på A-nivå.

Uppgift 22

Elevlösningsexempel 22.1 (0 poäng)

Det största värdet är 3,5, alltså inte 5. Anledningen till detta är att man inte kan addera $3 \sin x + 2 \cos x$ och få svaret 5, då den ena är sinus och den andra är cosinus.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen saknar resonemang om att sinus- och cosinuskurvorna är förskjutna eller att de har största värde för olika x-värden.

Elevlösningsexempel 22.2 (0 poäng)

Lösning $y = 3 \sin x$ och $y = 2 \cos x$

$y = 3 \sin x$ har amplituden 3

$y = 2 \cos x$ har amplituden 2

$a \sin x + b \cos x = c \sin(x + v)$

$a = 3 \quad b = 2$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

Det går inte att addera amplituder utan Rasmus behöver använda sig av trigonometriska formler.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen visas med hjälp av formel att det största värdet är $\sqrt{13}$. Däremot saknas en förklaring utifrån graferna till varför det största värdet är mindre än 5.

Elevlösningsexempel 22.3 (1 E_R)

sin och cos ger olika värden för samma x vilket
gör att man inte kan addera 3 + 2 direkt.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen innehåller ett enkelt resonemang som ur bedömningssynpunkt anses likvärdigt med ett resonemang om att kurvorna är förskjutna i förhållande till varandra.

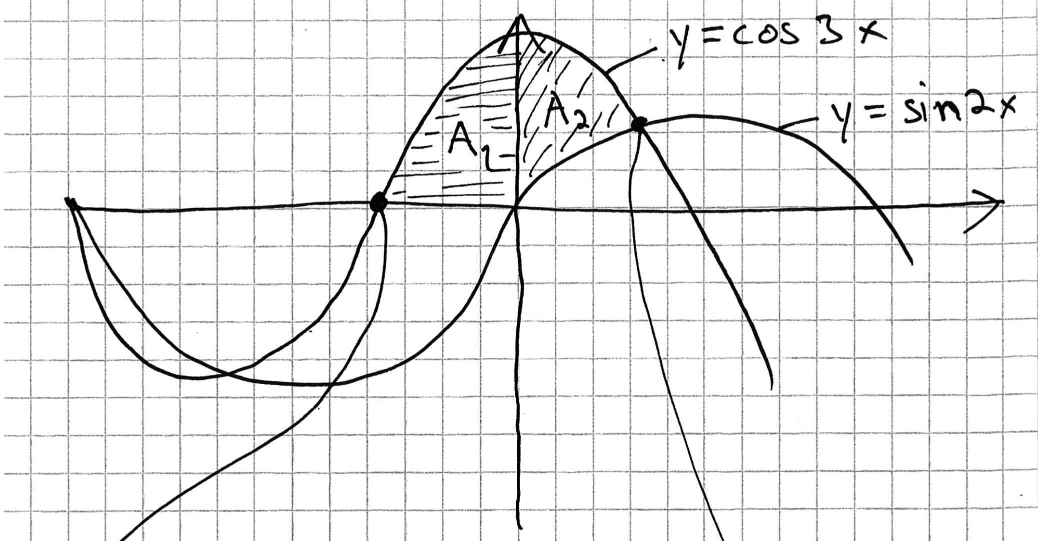
Elevlösningsexempel 22.4 (1 E_R och 1 C_R)

sinus och cosinus är vid olika lägen = 1.
Detta medför att $3 \sin x + 2 \cos x \neq 5$.

Bedömningskommentar till exemplet: I elevlösningen konstateras att kurvorna har y-värdet 1 vid olika x-värden. Detta anses motsvara ett resonemang om att maximipunkterna infaller vid olika x-värden och därmed uppfylla kraven för resonemangspoängen på E- och C-nivå.

Uppgift 24

Elevlösningsexempel 24.1 (1 E_P)



Räknaren ger (−30, 0)

$$A_1 = \int_{-30}^{0} \cos 3x \, dx = 19{,}09$$

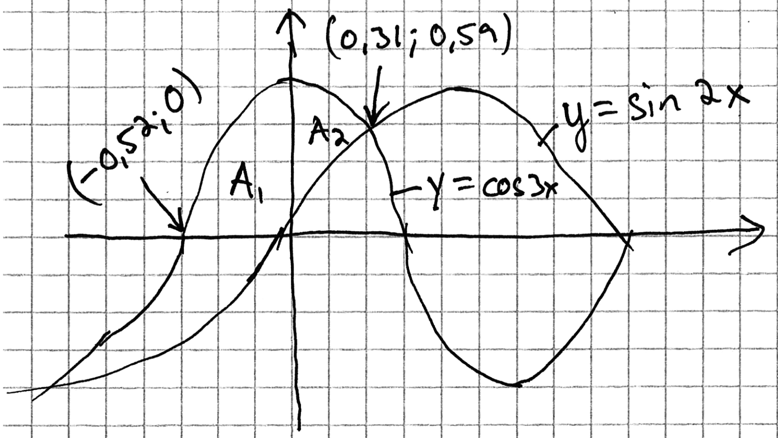
Räknaren ger (18; 0,59)

$$A_2 = \int_{0}^{18} (\cos 3x - \sin 2x)\, dx = 9{,}98$$

$$A_{Tot} = A_1 + A_2 = 29{,}08 \text{ a.e.}$$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen innehåller en bestämning av skärningspunkterna i grader i stället för i radianer. I övrigt är bestämningen av arean godtagbar. Som helhet anses lösningen motsvara en godtagbar ansats och ge procedurpoängen på E-nivå.

Elevlösningsexempel 24.2 (1 E_P, 2 C_P och 1 C_K)



Intervall:

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Skärningspunkter

$x_1 = 0,31415927$

$x_2 = -0,52335988$

$$A_1 = \int_{-0,52}^{0} \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} \text{ a.e.}$$

$$A_2 = \int_{0}^{0,31} \cos(3x) - \sin(2x) \, dx \approx 0,1742 \text{ a.e.}$$

$A_1 + A_2 \approx 0,51$ a.e.

Svar: Arean för det skuggade området är $\approx 0,51$ a.e.

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar bestämning av arean. När det gäller kommunikation saknas förklaring till hur skärningspunkterna bestämts, A_1 anges exakt trots avrundad integrationsgräns och parentes saknas i integranden för A_2. Trots dessa brister är lösningen möjlig att följa och förstå, bland annat eftersom figuren är tydlig och indexering av variabler används. Sammantaget anses kraven för kommunikationspoäng på C-nivå nätt och jämnt vara uppfyllda.

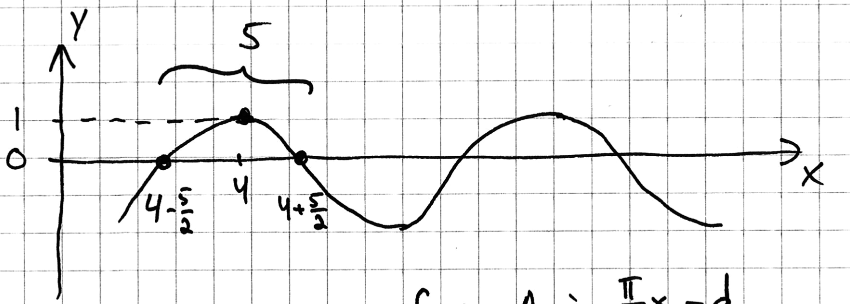
Uppgift 28

Elevlösningsexempel 28.1 (1 C_B och 2 A_{PL})

a) Period 16 cm

$k = \frac{2\pi}{16} = \underline{\underline{\frac{\pi}{8}}}$

b)



$f(x) = A\sin\frac{\pi}{8}x - d$

Punkter $(1{,}5,\ 0)$ $\quad A\sin\frac{1{,}5\pi}{8} - d = 0 \qquad d = A\sin\frac{1{,}5\pi}{8}$

$(6{,}5,\ 0)$ $\quad A\sin\frac{6{,}5\pi}{8} - d = 0$

$(4,\ 1)$ $\quad A - d = 1$

$A - A\sin\frac{1{,}5\pi}{8} = 1$

$\left(1 - \sin\frac{1{,}5\pi}{8}\right)A = 1$

$A = \frac{1}{\left(1 - \sin\frac{1{,}5\pi}{8}\right)} \approx 2{,}25 \qquad d \approx 1{,}25$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen visar en godtagbar bestämning av de efterfrågade konstanterna. När det gäller kommunikation saknas redovisning till hur maxpunktens x-värde bestämts. Vidare framgår det inte tydligt vilka ekvationer som ger sambandet $A - A\sin\frac{1,5\pi}{8} = 1$. Dessa brister gör att kraven för kommunikationspoäng på A-nivå inte anses uppfyllda. Sammantaget ges lösningen en begreppspoäng på C-nivå och två problemlösningspoäng på A-nivå.

Elevlösningsexempel 28.2 (1 C_B, 2 A_{PL} och 1 A_K)

a) Perioden: $(5+11)$ cm $= 16$ cm $\longrightarrow$

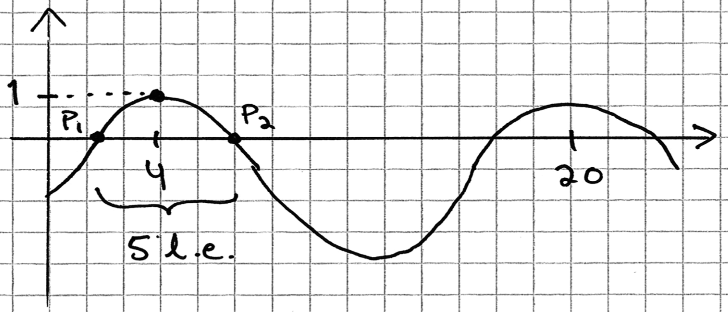
$\frac{2\pi}{k} = 16 \qquad k = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$

b) $f(x) = A \sin \frac{\pi}{8} x - d$

y_{max} då $\sin \frac{\pi}{8} x = 1$

$\frac{\pi}{8} x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$

$x = 4 + n \cdot 16 \longrightarrow$ Maximipunkt $(4, 1)$



Avstånd mellan nollställen: 5 l.e. $\longrightarrow$

P_1 har x-koordinaten $4 - \frac{5}{2} = 1{,}5$

P_2 $4 + \frac{5}{2} = 6{,}5$

$\longrightarrow (1{,}5;0), (4,1), (6{,}5;0)$ är punkter på kurvan.

$\longrightarrow \begin{cases} A \sin \frac{1{,}5\pi}{8} - d = 0 & (1) \\ A \sin \frac{6{,}5\pi}{8} - d = 0 \\ A \sin \frac{\pi}{2} - d = 1 & (3) \end{cases}$

(1) $A \sin \frac{1{,}5\pi}{8} = d$

(3) $A \sin \frac{\pi}{2} - A \sin \frac{1{,}5\pi}{8} = 1$

$A \left(1 - \sin \frac{1{,}5\pi}{8}\right) = 1$

$\longrightarrow A = \dfrac{1}{1 - \sin \frac{1{,}5\pi}{8}} \approx 2{,}25$

$\longrightarrow d \approx 1{,}25$

Svar: $\begin{cases} A \approx 2{,}25 \\ d \approx 1{,}25 \end{cases}$

Bedömningskommentar till exemplet: Elevlösningen innehåller en godtagbar bestämning av de efterfrågade konstanterna. När det gäller kommunikation är lösningen något otydlig när ekvation (1) och (3) slås ihop samtidigt som förenklingen $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ görs. Dessutom redovisas inte beräkningen av d på sista raden. I övrigt är lösningen lätt att följa och förstå då det finns en tydlig figur med några förklarande ord och då ekvationerna i ekvationssystemet numrerats. Sammantaget anses kraven för kommunikationspoäng på A-nivå vara uppfyllda.