Eulers formel

Vi vill visa att $e^{iv} = \cos v + i\sin v$

Vi skapar funktionen $f(v) = \dfrac{\cos v + i\sin v}{e^{iv}}$

Vi deriverar funktionen $f'(v) = \dfrac{(-\sin v + i\cos v)\cdot e^{iv} - (\cos v + i\sin v)ie^{iv}}{(e^{iv})^2}$

$$= \frac{(-\sin v + i\cos v)e^{iv} - (i\cos v + i^2\sin v)e^{iv}}{(e^{iv})^2} = \frac{e^{iv}(-\sin v + i\cos v - i\cos v + \sin v)}{(e^{iv})^2} = \frac{e^{iv}\cdot 0}{(e^{iv})^2} = 0$$

Funktionen är konstant! Undersök ett värde på $f(v)$

$f(0) = \dfrac{\cos 0 + i\sin 0}{e^{i\cdot 0}} = \dfrac{1}{1} = 1$ funktionen är konstant vid $f(v) = 1$

det visar att $e^{iv} = \cos v + i\sin v$

$\boxed{\text{Eulers formel} \quad e^{iv} = \cos v + i\sin v}$

Ex) Joakim definierar det komplexa talet $z = 5e^{\frac{\pi i}{2}}$

Bestäm följande

a) $\arg(z)$ Svar: $\frac{\pi}{2} = v$

b) $|z|$ Svar: $|z| = 5$

c) z på formen $z = a + bi$ $\quad 5e^{\frac{\pi}{2}i} = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 5(0 + i) = 5i$

Ex) Många menar att det matematiska sambandet $e^{\pi i} + 1 = 0$ är det vackraste i matematiken. Härled likheten

$e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + 0 = -1$

$-1 + 1 = 0$

$e^{\pi i} + 1 = 0$ V.S.V