Ekvationen $z^n = a$

Med hjälp av de metoderna vi lärt oss kan vi nu lösa ekvationer på formen $z^n = a$ där vi inkluderar samtliga lösningar!

$z^5 = 32$ vi antar att $z = r(\cos v + i\sin v)$, det gör att vi får att $z^5 = r^5(\cos 5v + i\sin 5v) = 32$

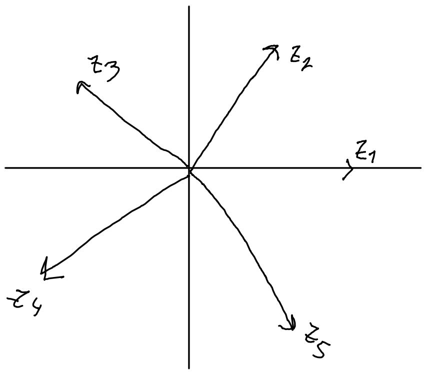
$r^5(\cos 5v + i\sin v) = 32(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ)$ $\quad r^5 = 32$, $r = 2$

$5v = 0 + 360^\circ \cdot n$

$v = 72^\circ \cdot n$ där $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

$z = 2(\cos(72^\circ n) + i\sin(72^\circ \cdot n))$

Vi vill nu undersöka rötterna genom att välja $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$



$n=0$ ger $z_1 = 2(\cos 0 + i\sin 0) = 2$

$n=1$ ger $z_2 = 2(\cos 72^\circ + i\sin 72^\circ)$

$n=2$ ger $z_3 = 2(\cos 144^\circ + i\sin 144^\circ)$

$n=3$ ger $z_4 = 2(\cos 216^\circ + i\sin 216^\circ)$

$n=4$ ger $z_5 = 2(\cos 288^\circ + i\sin 288^\circ)$

$n=5$ ger $z_6 = 2(\cos 360^\circ + i\sin 360^\circ) = z_1$

Vi ser då att vi kommit tillbaka till där vi började, vi har då hittat alla rötter till ekvationen!

$\boxed{\text{Ekvationen } z^n = a \text{ kommer ha } n \text{ lösningar om vi inkluderar alla komplexa lösningar}}$

Ex) Lös ekvationerna, bestäm samtliga lösningar

a) $z^3 = -1$ $\qquad z^3 = 1^3(\cos 3v + i\sin 3v) = 1(\cos \pi + i\sin \pi)$

$3v = \pi + 2\pi \cdot n$ $\qquad n = 0$ ger

$v = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi \cdot n}{3}$

$z = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi \cdot n}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi \cdot n}{3}\right)$

$n=0$ ger $\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = z_1$

$n=1$ ger $\cos\pi + i\sin\pi = z_2$

$n=2$ ger $\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = z_3$

b) $z^5 = 1+i$ skriv $1+i$ på polär form $|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ $\quad \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$

$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ $\qquad z^5 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$z^5 = r^5(\cos 5v + i\sin 5v) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$5v = \frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot n$ $\qquad z = (\sqrt{2})^{\frac{1}{5}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi \cdot n}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi \cdot n}{5}\right)\right)$

$v = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi \cdot n}{5}$ $\qquad n=0$ ger $(\sqrt{2})^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{\pi}{20} + i\sin\frac{\pi}{20}\right)$

$= \frac{\pi + 8\pi \cdot n}{20}$ $\qquad n=1$ ger $(\sqrt{2})^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{9\pi}{20} + i\sin\frac{9\pi}{20}\right)$

$n=2$ ger $(\sqrt{2})^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{17\pi}{20} + i\sin\frac{17\pi}{20}\right)$

$n=3$ ger $(\sqrt{2})^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

$n=4$ ger $(\sqrt{2})^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{33\pi}{20} + i\sin\frac{33\pi}{20}\right)$

Samtliga lösningar!