

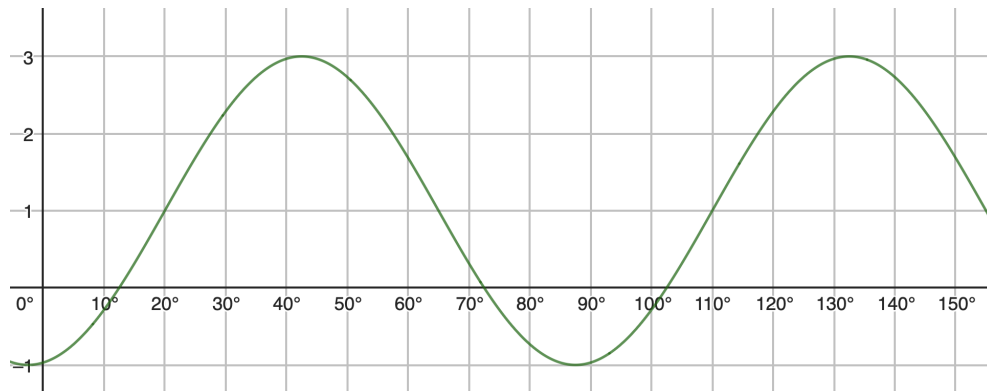
Prov Matematik 4, 240906

Kapitel 1 till 3. Skrivtid: 180 minuter. Poäng: 18/13/12.
Gränser: E 12, D 18 5AC, C 24 9AC, B 30 3A, A 35 6A.
Hjälpmedel: Standardformelblad. Digitala hjälpmedel på del II.
Om inte annat sägs krävs fullständiga och välskrivna lösningar.

Del I, utan digitala hjälpmedel.

1. Lös ekvationen $\cos 3x = 0,5$. (3/0/0)

2. Nedan är grafen till funktionen $y = A \sin(k(x + v)) + d$ ritad. Bestäm, med kortfattad motivering, konstanterna A , k , v och d . (2/1/0)



3. Bestäm derivatorna till nedanstående funktioner

(a) $f(x) = \cos 2x$ (1/0/0)

(b) $g(x) = x^2 \sin x$ (1/0/0)

(c) $h(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ (1/0/0)

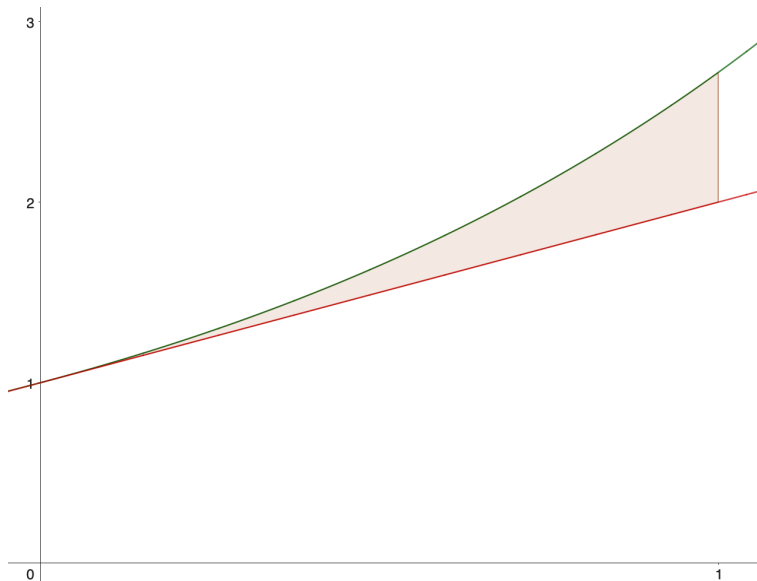
(d) $i(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ (0/1/0)

4. Beräkna integralen

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

(2/0/0)

5. Graferna till funktionerna $f(x) = e^x$ och $g(x) = x + 1$ ses nedan. Beräkna den skuggade arean. (2/0/0)



6. Resultatet på högskoleprovet förutsätts vara normalfördelat. På provet våren 2024 var medelvärdet 0,95 och standardavvikelsen 0,45. Skriv upp ett matematiskt uttryck som kan användas för att beräkna hur stor andel av de skrivande som hade mellan 1,0 och 1,2 poäng. Inga uträkningar behövs. (1/1/0)

7. Vi anger här vinklar i radianer. Är $\sin 10$ ett positivt eller negativt tal? Motivera. (0/1/0)

8. Ge exempel på tal a och b , båda större än 0, så att funktionen

$$y = f(x) = a \sin x + b \cos x$$

får $y = \sqrt{13}$ som sitt största värde. (1/1/0)

9. Låt $f(x) = e^{2x} - e^x + e$. Visa att $f(x) > 2$ för alla x . (0/1/2)

Del II, med digitala hjälpmedel.

10. Beräkna, och svara med två decimaler, (*endast svar*)

$$\int_{-1}^1 e^{x^2} dx$$

(1/0/0)

11. På grund av tidvatten kan vattendjupet variera kraftigt under dygnet. Tidvatt-
net upprepar sig med en period på 12 timmar. På en viss plats ges vattendjupet
av

$$D(t) = 4,8 \sin k(t + 3) + 5,1$$

där t anges i timmar räknat från midnatt och $D(t)$ anges i meter.

- (a) Vilket är det maximala vattendjupet? (1/0/0)
- (b) Ange konstanten k . (0/1/0)
- (c) Vid vilken tidpunkt ökar vattendjupet som snabbast? (1/0/0)
- (d) Ett fartyg har ett djupgående på 4 m (detta är avståndet från vattenlinjen
till fartygets djupaste punkt). När kan fartyget passera utan att gå på
grund? (1/1/0)

12. Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\int_0^t \cos x dx = 0$$

Både algebraiska och grafiska lösningar accepteras, så länge de är välmotive-
rade.

(0/2/0)

13. Visa att

$$\frac{1 - \cos 4x}{8}$$

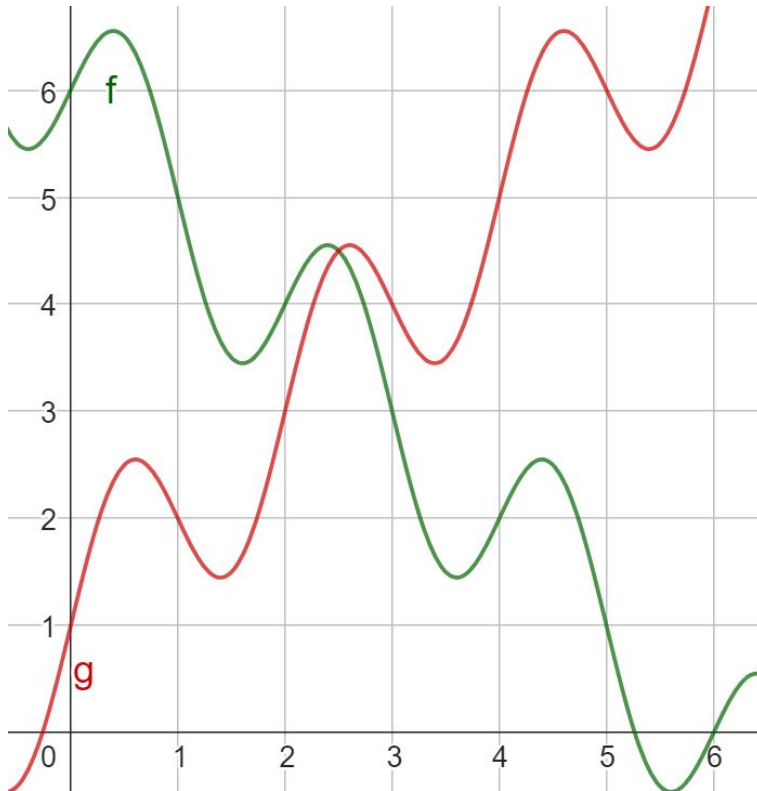
är en primitiv funktion till

$$\sin 2x \cos 2x$$

(0/2/0)

14. Beräkna följande exakt med hjälp av de ritade graferna

$$\int_0^1 f'(x)g(x) dx + \int_0^1 f(x)g'(x) dx$$



(0/1/1)

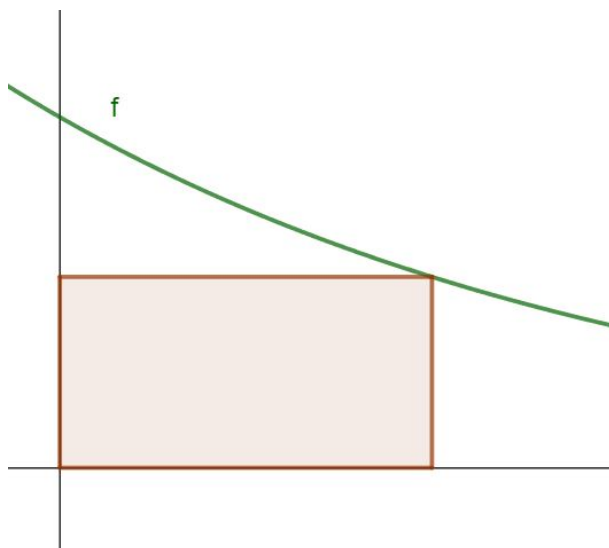
15. Joakim har designat ett glas som har modellen ungefär som visas nedan. Glaset rymmer 300 cm^3 och dess cirkulära botten har en diameter som är 6 cm. Bestäm diametern på öppningen om höjden på glaset är 10 cm. Svara med två decimaler.

(0/0/3)



16. Under grafen till $f(x) = e^{kx}$ placeras en rektangel som avgränsas av de positiva koordinataxlarna. För vilket värde på konstanten k kommer den rektangel som har största arean att vara en kvadrat?

(0/0/3)



17. En isskulptur i form av ett klot smälter på ett sådant sätt att den hela tiden är ett klot. Volymen på klotet minskar med en konstant hastighet på 2π kubikmeter per timme. Med vilken hastighet förändras **arean** på klotet i det ögonblick då skulpturens radie är 5 meter?

(0/0/3)