Multiplikation och division av komplexa tal

Vi vill också kunna multiplicera och dividera komplexa tal. Låt oss undersöka hur!

Om vi har de komplexa talen $z_1 = a+bi$ och $z_2 = c+di$ kan vi multiplicera dessa som parenteser

$$z_1 \cdot z_2 = (a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd$$

eftersom $i = \sqrt{-1}$ $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$

Ex) multiplicera följande komplexa tal

a) $z_1 = 1-i$ $z_2 = 2+3i$ $z_1 \cdot z_2 = (1-i)(2+3i) = 2+3i-2i-3\underbrace{i^2}_{=-1} = 2+i+3 = 5+i$

b) $z_1 = 2+2i$ $z_2 = 2-2i$ $z_1 \cdot z_2 = (2+2i)(2-2i) = 4-4i+4i-4i^2 = 4+4 = 8$

Vi får alltid ett reellt tal om vi multiplicerar ett komplext tal och dess konjugat

Ex) Bevisa att ovanstående stämmer

$z = a+bi$ $\bar{z} = a-bi$ $z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - abi + abi - b^2\underbrace{i^2}_{=-1} = a^2 + b^2$

a och b är två reella tal.

Om vi vill dividera två komplexa tal använder vi följande metod.

Vi definerar $z_1 = 3+i$ och $z_2 = 2-i$ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+i}{2-i}$ vi förlänger bråket med nämnarens konjugat! $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{6+3i+2i+i^2}{4-i^2} = \frac{5+5i}{5}$

$$= \frac{5(1+i)}{5} = 1+i$$

Ex) Bestäm divisionen $\frac{z_1}{z_2}$ av följande komplexa tal $z_1 = 4-3i$, $z_2 = 7+5i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4-3i}{7+5i} = \frac{(4-3i)(7-5i)}{(7+5i)(7-5i)} = \frac{28-20i-21i+15i^2}{7^2-5^2i^2} = \frac{13-41i}{49+25} = \frac{13-41i}{74} = \frac{13}{74} - \frac{41i}{74}$$

Ex) Joakim menar att $z^2 + \bar{z}^2$ alltid är ett reellt tal som är delbart med 2. Undersök om han har rätt.

$z = a + bi \quad \bar{z} = a - bi$

$z^2 = (a+bi)^2 = a^2 + 2abi + b^2 i^2 = a^2 + 2abi - b^2$

$\bar{z}^2 = (a-bi)^2 = a^2 - 2abi + b^2 i^2 = a^2 - 2abi - b^2$

$z^2 + \bar{z}^2 = a^2 + 2abi - b^2 + a^2 - 2abi - b^2 = 2a^2 - 2b^2 = \underbrace{2(a^2 - b^2)}_{\text{ett tal som är delbart med 2}}$

Svar: Joakim har såklart rätt!