Multiplikation och division i polär form

Rektangulär form $z=a+bi$

Polär form $z=r(\cos v+i\sin v)$

Vi vill kunna multiplicera tal i polär form

Vi definierar $z_1=r_1(\cos v_1+i\sin v_1)$ $z_2=r_2(\cos v_2+i\sin v_2)$

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2(\cos v_1+i\sin v_1)(\cos v_2+i\sin v_2)=$$

$$=r_1\cdot r_2(\cos v_1\cdot\cos v_2+i\cos v_1\cdot\sin v_2+i\sin v_1\cdot\cos v_2+i^2\sin v_1\sin v_2)$$

$$=r_1\cdot r_2(\underbrace{\cos v_1\cdot\cos v_2-\sin v_1\cdot\sin v_2}_{=\cos(v_1+v_2)}+i(\underbrace{\cos v_1\sin v_2+\sin v_1\cos v_2}_{=\sin(v_1+v_2)}))$$

$$=r_1\cdot r_2(\cos(v_1+v_2)+i\sin(v_1+v_2))$$

Multiplikation i polär form

$z_1=r_1(\cos v_1+i\sin v_1)$ $z_2=r_2(\cos v_2+i\sin v_2)$

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2(\cos(v_1+v_2)+i\sin(v_1+v_2))$$

Division i polär form

$z_1=r_1(\cos v_1+i\sin v_1)$ $z_2=r_2(\cos v_2+i\sin v_2)$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(v_1-v_2)+i\sin(v_1-v_2))$$

Ex, multiplicera och dividera följande komplexa tal

$z_1=2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ $z_2=6(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$

$$z_1\cdot z_2=2\cdot 6(\cos(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{3\pi}{4})+i\sin(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{3\pi}{4}))=12(\cos\pi+i\sin\pi)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2}{6}(\cos(\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{3\pi}{4})+i\sin(\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{3\pi}{4}))=\frac{1}{3}(\cos\tfrac{-\pi}{2}+i\sin\tfrac{-\pi}{2})$$

Ex, Två komplexa tal z och v multipliceras och produkten blir $w=8(\cos(\frac{3\pi}{2})+i\sin(\frac{3\pi}{2}))$. Bestäm vad z och v skulle kunna vara.

Till exempel: $z=2(\cos(\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{2}))$ $v=4(\cos(\pi)+i\sin(\pi))$

Ex, Skriv en generell formel för z^n om

$z=r(\cos v+i\sin v)$

$$z^2=r(\cos v+i\sin v)\cdot r(\cos v+i\sin v)=r^2(\cos(v+v)+i\sin(v+v))$$

$$=r^2(\cos(2v)+i\sin(2v))$$

$$z^n=r^n(\cos(nv)+i\sin(nv))$$