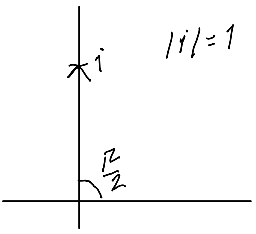
Multiplicera med i och de Moivres formel

Ibland vill vi multiplicera och dividera med i det blir lätt om vi bibehåller polär form.



$|i| = 1$

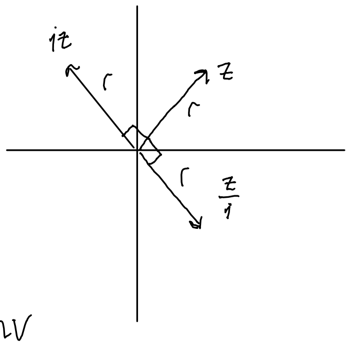
i i polär form $i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$z = r(\cos v + i\sin v)$ $\quad iz = r\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+v\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+v\right)\right)$

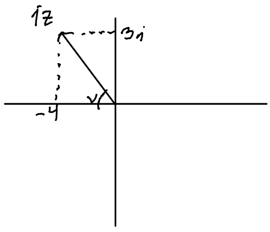
$\frac{z}{i} = r\left(\cos\left(v - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(v - \frac{\pi}{2}\right)\right)$

Grafisk representation

Det kommer alltid vara $180°$ eller π mellan iz och $\frac{z}{i}$



Ex) Nedan visas resultatet av multiplikationen iz. Bestäm z på polär form



Skriv på polär form $\quad |iz| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

$iz = 5(\cos 143° + i\sin 143°)$ $\quad \arg(iz) = 180° - v$

$z = 5(\cos(143°-90°) + i\sin(143°-90°))$ $\quad \tan v = \frac{3}{4}$ $\quad v \approx 37°$

$z = 5(\cos 53° + i\sin 53°)$ $\quad \arg(iz) = 180° - 37° = 143°$

Svar: $z = 5(\cos 53° + i\sin 53°)$

De Moivres formel: $z = r(\cos v + i\sin v)$ $\quad z^n = r^n(\cos nv + i\sin nv)$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Ex) Förenkla följande komplexa tal med hjälp av De Moivres

$z = (\sqrt{3}+i)^6$ $\quad$ Skriv om till polär form $\quad |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3+1} = 2$

$\arg(z) = v$ $\quad \tan v = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$z^6 = 2^6\left(\cos\left(6\cdot\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(6\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right)$ $\quad v = \frac{\pi}{6}$

$= 64(\cos\pi + i\sin\pi) = 64(-1 + i\cdot 0) = -64$

Ex) Bestäm talet w om $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

och $w = \frac{z^{12}}{z^9} = \frac{3^{12}\left(\cos\left(\frac{12\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{12\pi}{3}\right)\right)}{3^9\left(\cos\left(\frac{9\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{3}\right)\right)} = 3^3\left(\cos\left(\frac{12\pi}{3} - \frac{9\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{12\pi}{3} - \frac{9\pi}{3}\right)\right)$

$= 27(\cos\pi + i\sin\pi) = -27$

Ex) Bestäm alla heltal $n>0$ för vilka $(1+i)^n$ är ett reellt tal. Vi vill att $(1+i)^n$ ska ha vinkeln $0 + 360°$ eller $180 + 360°$

$z = (1+i)^n$ $\quad$ Undersök $\arg(z) = v$ $\quad \tan v = \frac{b}{a}$

$\tan v = \frac{1}{1}$ $\quad v = 45°$ $\quad z^n = |z|^n(\cos nv + i\sin nv) = \sqrt{2}(\cos 45°\cdot n + i\sin 45°\cdot n)$

Reellt tal ges då $n = 4\cdot k$ där k är ett heltal