Övningsprov Ma4 – Kap 1-3

1. Bestäm samtliga lösningar till följande ekvationer. Svara i radianer

a) $sinx = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $2cos2x = 1$

c) $tanx = \sqrt{3}$ (4/1/0)

2. Derivera följande funktioner

a) $f(x) = cosx + 2$

b) $f(x) = sin2x$

c) $h(x) = 2lnx$

d) $f(x) = 2x \cdot e^{2x}$

e) $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

f) $g(x) = \cos^2 x$ (5/2/0)

3. Bestäm integralerna

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinx\, dx$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} 2cosx\, dx$

c) $\int_1^e \frac{1}{x}\, dx$ (5/2/0)

4. a) Rotera funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ runt x-axeln och bestäm dess volym mellan gränserna $x = 0$ och $x = 2$

   b) Rotera samma funktion runt y-axeln och bestäm dess volym mellan $y = 1$ och $y = 3$

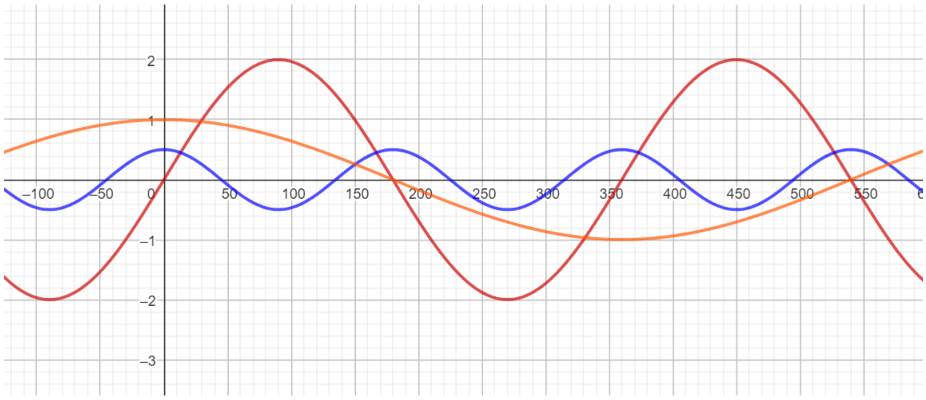
(2/2/0)

5. Para ihop funktionsuttrycket med rätt graf

$f(x) = 2sinx$

$g(x) = \frac{1}{2}cos2x$

$h(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$



(3/0/0)

6. Joakim menar att funktionen $f(x) = x \cdot e^{-2x}$ saknar extrempunkter. Undersök om han har rätt.

(2/1/0)

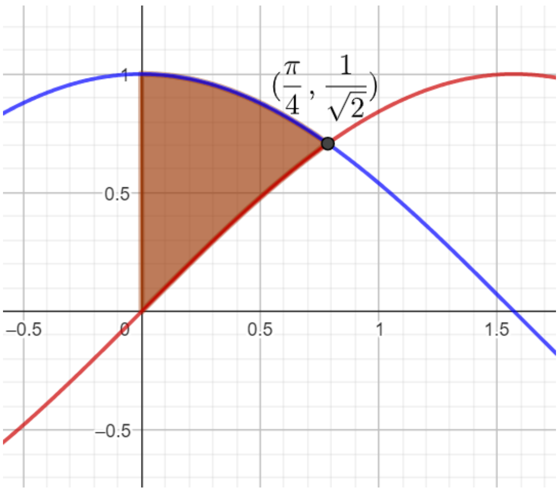
7. Vi definierar funktionerna $f(x) = asinx + bcosx$ och $g(x) = asinx - bcosx$. Du vet att $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ samt att $g(0) = 2$. Bestäm konstanterna a och b.

(1/1/0)

8. Bestäm den räta linjen som tangerar funktionen $f(x) = sin2x$ i punkten $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

(2/1/0)

9. Bestäm den markerade arean nedan. Den ena funktionen är $f(x) = sinx$ och den andra funktionen är $g(x) = cosx$. Svara exakt.



(2/0/0)

10. För vilket värde på x har funktionen $f(x) = x \cdot e^{x}$ en extrempunkt?

(2/0/0)

11. Joakim menar om man ändrar amplituden med en viss faktor på funktionen $f(x) = sinx$ och räknar ut arean med gränserna från $x = 0$ till $x = \pi$ kommer arean under grafen öka med samma faktor förutsatt att faktorn är större än noll.

a) Undersök om det stämmer om vi ökar amplituden med 2

b) Undersök om det stämmer om vi ökar amplituden med a

(2/2/0)

12. Lös ekvationen $sinxcosx = \frac{1}{4}$ (1/1/0)

13. Bestäm samtliga primitiva funktioner till $f(x) = cos2x + e^{2x}$

(2/0/0)

14. Joakim vill att integralen $\int_a^b sinx + c\ dx$ alltid ska vara större eller lika med noll. För vilka värden på c kommer det fungera?

(1/1/0)

15. Skissa grafen till funktionen $f(x) = \frac{1}{x-1} + x$ med dess viktigaste egenskaper

(2/2/0)

16. För vilka värden inom intervallet $0 < x < 2\pi$ är $f(x) = \sin^3 x$ avtagande?

(0/2/0)

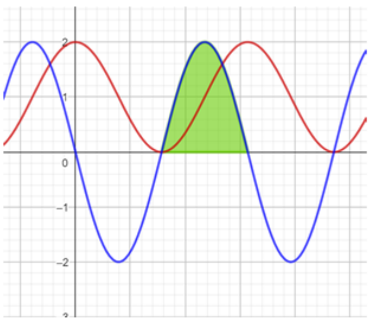
17. Bestäm samtliga primitiva funktioner till $f(x) = \sin^2 2x$

(0/2/0)

18. Bestäm samtliga möjliga värdet på talet k om $\int_0^{\frac{\pi}{2}} k \cdot coskx\ dx = 1$

(0/2/0)

19. Nedan ser du två funktioner där den ena är en derivatafunktion och den andra ursprungsfunktionen. Bestäm den gröna arean.



(0/0/1)

20. Bestäm samtliga asymptoter till följande funktioner

a) $f(x) = \frac{1}{x} + 3$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2-4} + x$

c) $f(x) = \frac{1}{(x-a)(x+b)} + c$ (2/2/1)

21. Pelle påstår att funktionen $f(x) = \sin(x^2)$ har primitiv funktion $F(x) = \frac{\sin(x^2)}{2x}$, Joakim håller inte med. Visa vem som har rätt.

(1/1/0)

22. Vi definierar funktionen $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Du vet att funktionerna $f(x)$ och $g(x)$ är sinusfunktioner utan förskjutning i x −led. Du vet också att $f(x)$ har en period på $\frac{\pi}{2}$ och $g(x)$ har en period på 2π.

Bestäm $h'(\pi)$

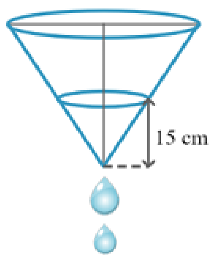
(0/2/0)

23. Visa att $\cos^4 x - \sin^4 x = cos2x$

(0/2/0)

24. Lös ekvationen $sinx + cosx = 1$ (0/2/0)

25. En konisk behållare har spetsen nedåt och lika stor radie som höjd. Behållaren läcker med 300 $cm^3/minut$. Hur förändras vätskenivån i konen vid läget att höjden är 15 cm?



(0/3/0)

26. Följande täthetsfunktion beskriver livslängden på moderna lampor från ett företag $f(x) = \frac{1}{0{,}2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-5}{0{,}2}\right)^2}$ där standardavvikelsen och medelvärdet är antalet år från första förbrukningsdag.

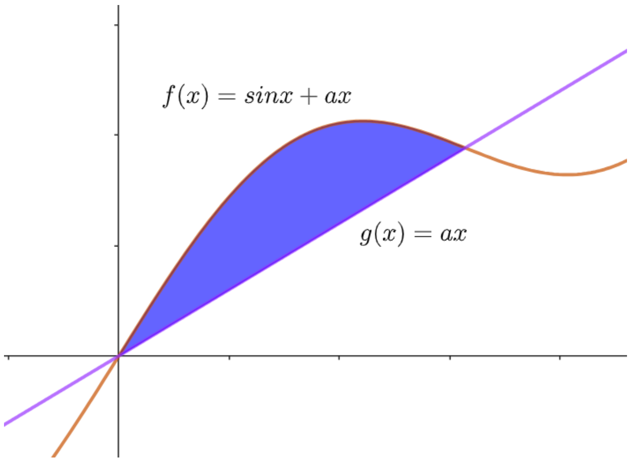
a) Förklara i ord vad Joakim vill undersöka om han ställer upp följande integral $\int_{4{,}5}^{5{,}5} f(x)\,dx$

b) Vad vill Joakim undersök om han ställer upp följande ekvation $\int_{5}^{a} f(x)\,dx = 0{,}3$

c) Företaget tar fram en ny modell för lampan vars livslängd går att beskriva med funktionen $f(x) = \frac{1}{0{,}4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-6}{0{,}4}\right)^2}$ beskriv i ord vad han har hänt med lamporna i den nya modellen i förehållande till den föregående

(2/2/0)

27. Nedan ser du funktionerna $f(x) = sinx + ax$ och $g(x) = ax$ där $a > 0$. Visa att den blåmarkerade arean är konstant oavsett värde på a



(0/1/1)

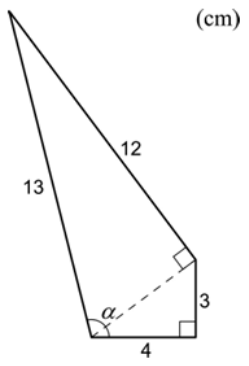
28. Joakim menar att ekvationen $A \cdot cos2x = -2$ har olika antal lösningar beroende på A. Ställ upp de olika fallen och motivera.

(0/2/1)

29. Visa med hjälp av rotationsvolymer att volymen för en kon är $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

(0/1/2)

30. Nedan visas en fyrhörning och en definierad vinkel. Bestäm $sina$



(0/0/2)

31. Bestäm värdet av integralen

$\int_0^{2\pi} \sin^3 x$ (0/0/2)

32. Vi definierar funktionen $h(x) = \left(f(x)\right)^2 + \left(g(x)\right)^2$

Du vet att

- $f'(x) = g(x)$
- $g'(x) = -f(x)$
- $h\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{2}$

Bestäm $h\left(\frac{1}{2}\right)$ (0/0/2)

33. Lös ekvationen $\sqrt{3}\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot sinx + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot cosx = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (0/0/2)

Del 2: Med digitala hjälpmedel

34. Bestäm $f'(1)$ för funktionen $f(x) = \frac{sinx}{x}$ med ditt digitala hjälpmedel svara med två decimaler

(1/0/0)

35. Derivera funktionerna med hjälp av ditt digitala hjälpmedel

a) $f(x) = x^x$

b) $f(x) = \ln{(sinx)}$ (2/0/0)

36. Bestäm samtliga lösningar till ekvationen $sinx = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(3/0/0)

37. Bestäm integralen med hjälp av ditt digitala hjälpmedel svara med två decimaler

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$$

(2/0/0)

38. Kroppstemperaturen för en person kan beskrivas med funktionen $f(x) = 1{,}1 \sin\left(\frac{\pi}{12}x - \pi\right) + 36$ där $x = 0$ är timmen då personen somnar.

a) Efter hur många timmar från insomning är kroppstemperaturen som lägst?

b) Efter hur många timmar från insomning är kroppstemperaturen som högst?

c) Efter hur många timmar ökar kroppstemperaturen som snabbast?

(2/1/0)

39. Höjden för en vagn i ett parishjul går att beskriva med funktionen $f(x) = 80 \sin\left(\frac{\pi x}{25} - \frac{9\pi}{25}\right) + 84$ där x är antalet minuter från start. Bestäm följande

a) Hur högt går parishjulet som högst?

b) Hur lång tid tar det för parishjulet att snurra ett varv? (1/1/0)

40. I ett naturområde går antalet lejon i tusental att beskriva med funktionen $L(t) = 9 + 6\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)$ och antalet gnuer i tusental går att beskriva med funktionen $G(t) = 27 + 19\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$ där t är antalet år från 2010.

Bestäm vilket år förhållandet mellan lejon och gnuer är som störst om vi ser 10 år framöver.

(0/2/0)

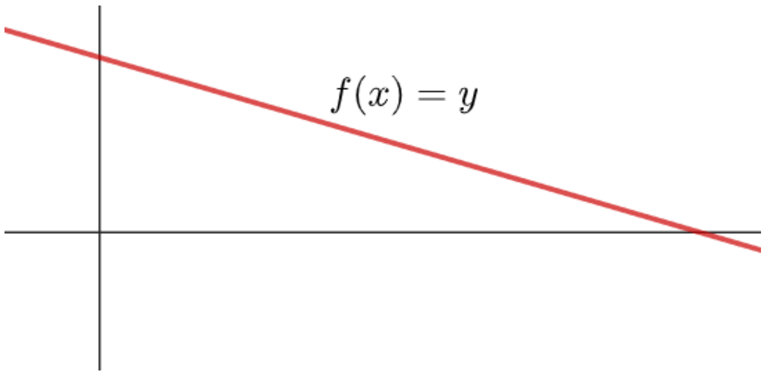
41. En tom tunna fylls med vatten med en hastighet cm^3/minut som går att beskriva med funktionen $f(x) = 2\cos\left(\frac{\pi x}{30}\right) + 3$ där x är antalet minuter. Samtidigt lämnar vatten tunnan med en konstant hastighet på 1,5 cm^3/minut. Hur många cm^3 har tunnan i sig efter 1 timme?

(0/2/1)

42. I ett samhälle kan fördelningen av åldrar beskrivas med täthetsfunktionen nedan. Man vet att den äldsta personer i samhället är 100 år gammal.

a) Bestäm täthetsfunktions ekvation.

b) Vad är sannolikheten att man väljer tre slumpmässigt valda personer som är över 80 år?



(0/2/1)

43. En matematiker har tagit fram statistik för kommunen Joakimköping. Hon har dels tagit fram en funktion som visar på hur mycket skatt (i miljoner) kommunen kan ta in beroende på hur stor befolkningen b är i tusental $s(b) = 9{,}7\sqrt{0{,}5b}$. Samtidigt har hon tagit fram statistisk för den förväntade befolkningsförändringen de närmsta 15 åren som går att beskriva $b(t) = 35 + 3{,}5\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 1{,}6t$ där t är antalet år från 2024.

a) Bestäm vilket år skatteintäkterna överstiger 45 miljoner i Joakimköping.

b) Vilket/vilka år ökar skatteintäkterna med 0,91 miljoner per år i under de första 11 åren?

(0/0/2)

44. Ett område begränsas av kurvan $y = x^2 - 4$ och linjen $y = 5$. Bestäm volymen som bildas när detta område roterar runt linjen $y = 5$

(0/0/2)

Lösningsförslag övningsprov 2

1. a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (I) $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot n$ (II) $x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot n$

$= \frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot n$

b) $2\cos 2x = 1$

$\cos 2x = \frac{1}{2}$ $2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot n$

$x = \pm \frac{\pi}{6} \pm \pi \cdot n$

c) $\tan x = \sqrt{3}$ $x = \frac{\pi}{3} + \pi \cdot n$

2. a) $f(x) = \cos x + 2$

$f'(x) = -\sin x$

b) $f(x) = \sin 2x$

$f'(x) = 2\cos 2x$

c) $f(x) = 2 \cdot \ln x$

$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$

d) $f(x) = 2x \cdot e^{2x}$

$f'(x) = 2 \cdot e^{2x} + 2 \cdot 2x \cdot e^{2x}$

$= 2e^{2x} + 4x \cdot e^{2x}$

e) $f(x) = \sqrt{2x+1} = (2x+1)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2x+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

f) $g(x) = \cos^2 x$

$g'(x) = 2 \cdot -\sin x \cdot \cos x = -2\sin x \cos x = \underbrace{-\sin 2x}_{\text{om man vill!}}$

3. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi/2} = -\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 1$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} 2\cos x \, dx = \left[2\sin x\right]_{-\pi}^{\pi} = 2\sin \pi - 2\sin(-\pi) = 0$

c) $\int_1^{e} \frac{1}{x} \, dx = \left[\ln x\right]_1^{e} = \ln e - \ln 1 = 1$

4. a) $V = \pi \int_a^b y^2 dx$ $\qquad y = \sqrt{x}$

$V = \pi \int_0^2 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^2 x\,dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \pi\left(\frac{4}{2} - \frac{0}{2}\right) = 2\pi$ v.e

b) $V = \pi \int_a^b x^2 dy$ $\qquad y = \sqrt{x}$ $\qquad \pi \int_1^3 (y^2)^2 dy = \pi \int_1^3 y^4 dy = \pi \left[\frac{y^5}{5}\right]_1^3 =$

$y^2 = x$ $\qquad = \pi\left(\frac{243}{5} - \frac{1}{5}\right) = \frac{242\pi}{5}$ v.e

5. $f(x)$ - Röd

$g(x)$ - Blå

$h(x)$ - orange

6. $f(x) = x \cdot e^{-2x}$

$f'(x) = e^{-2x} - 2xe^{-2x}$ $\qquad f'(x) = 0$

$e^{-2x} - 2xe^{-2x} = 0$

$e^{-2x}(1-2x) = 0$

$x = \frac{1}{2}$ funktionen har en extrempunkt!

7. $f(x) = a\sin x + b\cos x$

$g(x) = a\sin x - b\cos x$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} + b\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} = 1$

$a = 1$

$g(0) = \underbrace{\sin(0)}_{=0} - b\underbrace{\cos(0)}_{=1} = 2$

$-b = 2$

$b = -2$

Svar: $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$

8. $f(x) = \sin 2x$

$f'(x) = 2\cos 2x$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos(\pi)$

$= -2$ $\qquad y = -2x + m$ sök m

Gemensam punkt $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$0 = -2 \cdot \frac{\pi}{2} + m$

$m = \pi$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx =$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x - \sin x\,dx = \left[\sin x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} - (\sin 0 + \cos 0) =$

$= \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ a.e

10. $f(x) = x \cdot e^x$ $f'(x) = e^x + xe^x$

$f'(x) = 0$

$e^x + xe^x = 0$

$e^x(1+x) = 0$ $x = -1$

11. a) $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$

$\int_0^{\pi} 2\sin x \, dx \left[-2\cos x\right]_0^{\pi} = -2\cos \pi - (-2\cos 0) = 2 + 2 = 4$ stämmer!

b) $\int_0^{\pi} a\sin x \, dx = \left[-a\cos x\right]_0^{\pi} = -a\cos \pi - (-a\cos 0) = 2a$ Arean ökar med a

12. $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$ $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$ [sinus för dubbla vinkeln]

$\frac{\sin 2x}{2} = \frac{1}{4}$

$\sin 2x = \frac{1}{2}$

I $2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot n$

$x = \frac{\pi}{12} + \pi \cdot n$

II $2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot n$

$2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot n$

$x = \frac{5\pi}{12} + \pi \cdot n$

13. $f(x) = \cos 2x + e^{2x}$

$F(x) = \frac{\sin 2x}{2} + \frac{e^{2x}}{2} + C$

14. Vi vill att $\sin x + C \geq 0$ för alla x det gör att $C \geq 1$

15. $f(x) = \frac{1}{x-1} + x$ $\quad f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} + 1$ $\quad f'(x) = 0$

Asymptot då $x = 1$

och $y = x$

$$-\frac{1}{(x-1)^2} + 1 = 0$$

$$1 = \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 1$$
$$x^2 - 2x = 0$$
$$x(x-2) = 0 \qquad x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$

Teckentabell

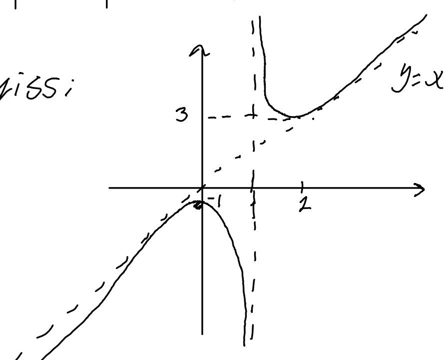
x	$x<0$	$0<x<1$	$1<x<2$	$x>2$
$f'(x)$	+	−	−	+
$f(x)$	↗	↘	↘	↗

y-värdet då vi har extempunkter

$$f(0) = \frac{1}{0-1} + 0 = -1$$

$$f(2) = \frac{1}{2-1} + 2 = 3$$

Skiss:



16. $f(x) = \sin^3 x$

$f'(x) = 3\cos x \cdot \sin^2 x$

$\sin^2 x > 0$ för alla x

$3\cos x < 0$ mellan $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

Svar: mellan $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

17. Skriv om!

$$\boxed{\begin{aligned} &\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \\ &2\sin^2 x = 1 - \cos 2x \\ &\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} \end{aligned}}$$

$f(x) = \sin^2 2x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 4x}{2}$

$F(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} + C$

Regler!

18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} k\cos kx\,dx = 1$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} k\cos kx\,dx = \left[\frac{k\sin kx}{k}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\sin kx\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2}\cdot k = 1$

$\sin\frac{\pi}{2}k = 1$ $\quad \frac{\pi}{2}k = \frac{\pi}{2} + 2\pi\cdot n$

$k = 1 + 4\cdot n$

19. Röd graf är $f(x)$
Blå är $f'(x)$

$\int_a^b f'(x)\,dx = \left[f(x)\right]_a^b = f(b) - f(a) = 2 - 0 =$
$= 2$

20. a) $x = 0$ och $y = 3$

b) $x = \pm 2$ och $y = x$

c) $x_1 = a$ $x_2 = b$ och $y = c$

21. Derivera $F(x)$, det blir inte $f(x)$.

22. $f(x) = a\sin 4x$
$g(x) = b\sin x$

$h(x) = a\sin 4x \cdot b\sin x$
$h'(x) = 4a\cos 4x \cdot b\sin x + a\cdot\sin 4x\cdot b\cos x$
$h'(\pi) = 0$ $\quad$ Svar: $h'(\pi) = 0$

23. $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$

$VL = (\cos^2 x - \sin^2 x)\underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_{=1} = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

24. $\sin x + \cos x = 1$ Skriv om till en sinusuttryck

$c\sin(x+v)$ $\quad c = \sqrt{a^2+b^2}$ där $a\sin x + b\cos x$ $\quad c = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\tan v = \frac{b}{a}$ $\quad \tan v = \frac{1}{1} = 1$ $\quad v = \frac{\pi}{4}$ $\quad \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

I) $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi\cdot n$ $\quad x = 2\pi\cdot n$

II) $x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi\cdot n = \frac{3\pi}{4} + 2\pi\cdot n$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi\cdot n$

25. $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$ $\frac{dV}{dt} = 300$ Volym kon $= \frac{\pi r^2 h}{3}$

Vi vet att $r = h$

$\frac{dh}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\frac{dV}{dh}} = \frac{300}{\pi \cdot 15^2} = 0{,}42$ cm/min

$V = \frac{\pi \cdot h^3}{3}$

$V' = \pi \cdot h^2$ då $h = 15$ ger

$V' = \pi \cdot 15^2$

26. a) Hur stor andel av alla glödlampor har en livslängd på 4,5 till 5,5 år.

b) Hur stort intervall på livslängden från 5 år krävs för att det ska utgöra 30% av totala mängden glödlampor.

c) Medelvärdet har ökat till 6 år men standardavvikelsen har samtidigt också ökat till 0,4 år

27. Hitta skärningen $f(x) = g(x)$

$\sin x + ax = ax$

Areauttryck

$\sin x = 0$ Ⓘ $x = 2\pi \cdot n$ Första skärningen

Ⓘⓘ $x = \pi + 2\pi \cdot n$ då $x = \pi$

$\int_0^{\pi} \sin x + ax \, dx - \int_0^{\pi} ax \, dx$

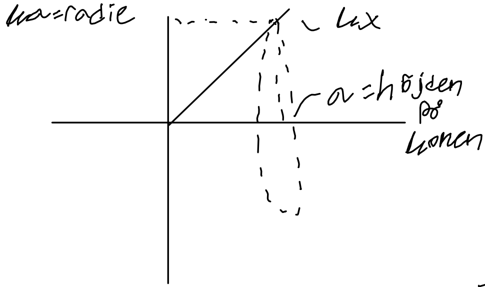
$= \int_0^{\pi} \sin x + ax - ax \, dx = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$

Arean är konstant vid 2 a.e

28. $A \cdot \cos 2x = -2$

- om $-2 < A < 2$ går funktionen aldrig under -2
- om $A = \pm 2$ kommer det finnas en lösning i en period
- om $A > 2$ eller $A < -2$ kommer det finnas 2 lösningar i varje period

29.

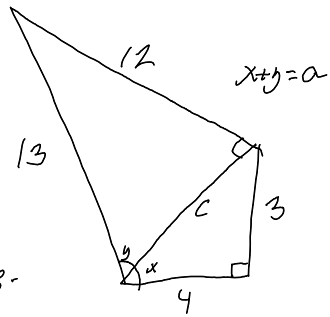


$$\pi\int_0^a (kx)^2\,dx = \pi\int k^2x^2\,dx = \pi\left[\frac{k^2x^3}{3}\right]_0^a$$

$$= \pi\cdot\frac{k^2\cdot a^3}{3} = \frac{\pi\cdot \underbrace{k^2\cdot a^2}_{r^2}\cdot a}{3} \quad \text{höjden} = h$$

$$= \frac{\pi r^2\cdot h}{3}$$ Vi har då visat vad vi vill!

30 Använd Pythagoras sats



$4^2+3^2=c^2$

$c=(\pm)5$

$\sin x=\frac{3}{5}$ $\cos x=\frac{4}{5}$

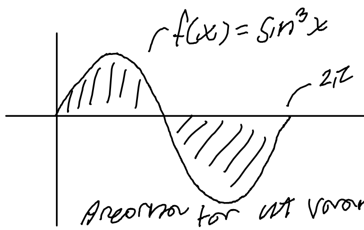
$\sin y=\frac{12}{13}$ $\cos y=\frac{5}{13}$

Additions-formeln

$\sin(a)=\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$

$=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}+\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}=\frac{3}{13}+\frac{48}{65}=\frac{15}{65}+\frac{48}{65}=\frac{63}{65}$

31. Primitiv funktion blir svårt på denna tänk till istället



$$\int_0^{2\pi}\sin^3 x\,dx=0$$

Areorna tar ut varandra!

32. $h(x)=(f(x))^2+(g(x))^2$ $h'(x)=2\cdot f'(x)\cdot f(x)+2\cdot g'(x)\cdot g(x)$

Gör substitutionerna $h'(x)=2\cdot g(x)\cdot f(x)-2\cdot f(x)\cdot g(x)=0$

$h'(x)$ är noll för alla x det gör att $h(x)$ är konstant!

$h(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{2}$

33. $\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin x+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\underbrace{\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)}_{\text{skriv om till sinusfunktion}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{3}\sin x+\cos x=a\sin(x+v)$

$a=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$

$\tan v=\frac{1}{\sqrt{3}}\quad v=\frac{\pi}{6}$

$2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$=\underbrace{2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}_{\text{sinus för dubbla vinkeln}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$=\sin\left(2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

I $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+2\pi\cdot n$

$2x=\frac{-\pi}{12}+2\pi\cdot n$

$x=\frac{-\pi}{24}+\pi\cdot n$

II $2x+\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot n$

$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}+2\pi\cdot n$

$2x=\frac{5\pi}{12}+2\pi\cdot n$

$x=\frac{5\pi}{24}+\pi\cdot n$

34 $f'(1)=-0{,}30$

35. a) $f(x)=x^x\quad f'(x)=x^x\cdot\ln x+x^x$

b) $f(x)=\ln(\sin x)\quad f'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$

36. $\sin x=\frac{1}{\sqrt{3}}$

37. $\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=1{,}57$

38. skriv in funktionen i geogebra och undersök

a) 6 timmar efter insomning

b) 18 timmar efter insomning

c) 12 timmar efter insomning

39. Skriv in funktionen i geogebra

a) 164 meter b) Undersök periodens längd

Svar: 50 minuter

40. Förhållandet mellan lejon och gnuer ges av

$F(t) = \frac{L(t)}{G(t)} = \frac{9+6\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)}{27+19\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)}$ Undersök $F(t)$ i geogebra!

Vi söker en maximipunkt!

Svar: Efter 3,68 år är förhållandet som störst!

41. Total fyllningshastighet $= t(x) = IN - UT$

$IN = f(x) = 2\cos\left(\frac{\pi x}{30}\right) + 3 \qquad UT = 1,5$

$t(x) = 2\cos\left(\frac{\pi x}{30}\right) + 3 - 1,5 = 2\cos\left(\frac{\pi x}{30}\right) + 1,5$ Vi söker nu mängden.

$\int_0^{60} 2\cos\left(\frac{\pi x}{30}\right) + 1,5 \, dx$ Lös med geogebra med hjälp av integralfunktionen!

$\int_0^{60} 2\cos\left(\frac{\pi x}{30}\right) + 1,5 \, dx = 90$ Svar 90 cm^3

42. a) Vi vet att arean under grafen mellan 0 och 100 ska vara lika med 1. tänk en triangel basen 100 och höjden m

$\frac{100 \cdot m}{2} = 1 \quad m = \frac{1}{50} \quad y(x) = kx + \frac{1}{50} \quad y(100) = 0$

$100k + \frac{1}{50} = 0$

$k = -\frac{1}{5000}$

Svar: $y = -\frac{1}{5000}x + \frac{1}{50}$

42 b) Bestäm sannolikheten att en person är över 80

$$\int_{80}^{100} \frac{-1}{5000}x + \frac{1}{50}\,dx = [\text{Lös med geogebra}] = 0{,}04$$

Sannolikheten för att slumpmässigt välja 3 över 80 år

$0{,}04 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}04 = 0{,}000064$ väldigt låg sannolikhet!

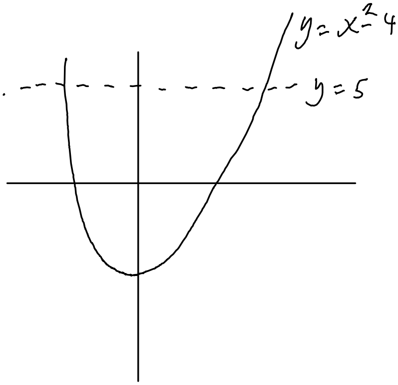
43. Vi söker $S(b(t)) = 9{,}7\sqrt{0{,}5\left(35+3{,}5\sin\left(\frac{\pi t}{6}\right)+1{,}6t\right)}$

Stäng in funktionen i geogebra och undersök för vilket värde $S(b(t)) = 45$. Skärningen ger att då $t = 2{,}85$ vilket är år 2027 Svar: 2027.

b) Undersök $S'(b(t))$ och bestäm vilket eller vilka t då $S'(b(t)) = 0{,}91$ det är då $t_1 = 2{,}85$ och $t_2 = 9{,}21$

Svar: 2027 och 2032

44.



Vi justerar så vi kan rotera runt x-axeln, Vi förskjuter funktionen i y-led nedåt med 5

Vi får då $y = x^2 - 9$ och roterar sedan runt x-axeln mellan gränserna $x = -3$ och $x = 3$ eftersom det är nollställena

$$\pi\int_{-3}^{3}(x^2-9)^2\,dx = [\text{Lös med geogebra}] = 814$$ Svar: 814 volymenheter.