Tillämpningar av kedjeregeln

Ibland kan två funktioner påverka varandra och därmed blir det en sammansatt funktion

Kedjeregeln $\quad y = f(g(x)) \qquad y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

eller $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dg} \cdot \dfrac{dg}{dx}$

Ex) En cirkels area växer med funktionen $A(r) = \pi \cdot r^2$ och radien växer enligt funktionen $r(t) = 2t$ där t är tiden i minuter

a) Bestäm funktionen som beskriver arean beroende på tiden $\quad A(t) = \pi \cdot \underbrace{(2t)^2}_{r} = \pi \cdot 4 \cdot t^2$

b) Efter hur många minuter växer arean med 40π areaenheter/min? Sök $A'(t) = 8\pi \cdot t$

$A'(t) = 40\pi$

$8\pi \cdot t = 40\pi$

$t = 5$ Svar: 5 minuter

Ex) En snöboll smälter så att radien minskar med 0,01 dm/h. Med vilken hastighet minskar volymen när radien är 10 dm? Vi söker $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{dr} \cdot \dfrac{dr}{dt}$

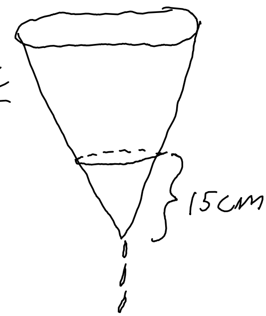
$V(r) = \dfrac{4\pi r^3}{3}$

$V'(r) = \dfrac{dV}{dr} = 4\pi r^2$

$V'(5) = 4 \cdot \pi \cdot 10^2 = 400\pi$

$\dfrac{dV}{dt} = 400\pi \cdot \overbrace{-0{,}01}^{\frac{dr}{dt}} = -12{,}56 \text{ dm}^3/\text{h}$

Ex) En konisk behållare har spetsen nedåt och lika stor radie som höjd. Behållaren läcker med $300\ cm^3/min$. Hur förändras vätskenivån i konen vid läget att höjden är 15 cm



$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$V(h) = \frac{r^2 \cdot h \cdot \pi}{3} = \frac{h^3 \cdot \pi}{3}$$

$$\frac{dV}{dh} = h^2 \cdot \pi$$

Vi vet att $\frac{dV}{dt} = 300$

Vi söker $\frac{dh}{dt}$, $\frac{dh}{dt} = \frac{\left(\frac{dV}{dt}\right)}{\left(\frac{dV}{dh}\right)}$

$\frac{dV}{dh}$ då $h = 15$ ger $\frac{dV}{dh} = 15^2 \cdot \pi$

$\frac{dh}{dt} = \frac{300}{15^2 \cdot \pi} \approx 0{,}42$ Svar: Minskar med 0,42 cm/min