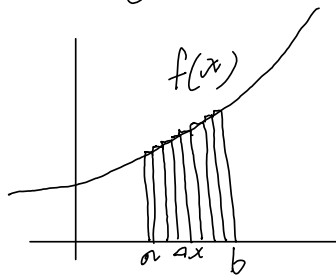
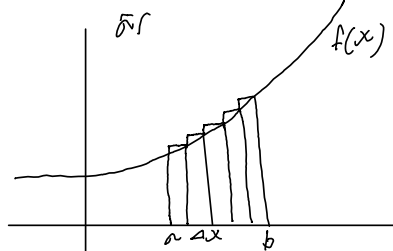


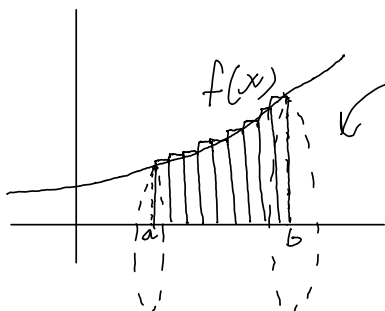
Rotationsvolymer

Vad integrerar



Basen på
rektanglarna Δx
minskar kontinuerligt.
Arean blir mer exakt!
vi får $A = \int_a^b f(x) dx$

Rotera kring x-axeln



Undersök cylindern

radien = $f(b) = y$
Höjden = Δx
Volymen för cylindern
 $\pi f(b)^2 \cdot \Delta x$

Om vi nu summerar samtliga cylindrar och drar Δx mot noll får vi $\int_a^b \pi y^2 dx$ om en kurva roterar runt x-axeln

Samma argument funkar för rotation kring y-axeln där får vi $\int_a^b \pi x^2 dy$ där x är funktionen x uttryckt i y

Ex, Bestäm volymen om funktionen $y=x^2$ roterar runt

a) x-axeln mellan $x=0$ och $x=2$

b) y-axeln mellan $y=1$ och $y=3$

$$a) \int_0^2 \pi y^2 dx = \int_0^2 \pi (x^2)^2 dx = \int_0^2 \pi x^4 dx = \left[\frac{\pi x^5}{5} \right]_0^2 = \frac{\pi \cdot 32}{5} = \frac{32\pi}{5} \text{ v.c}$$

b) Läs ut x ur funktionen $y = x^2$

$$\int_1^3 \pi x^2 dy = \int_1^3 \pi (\sqrt{y})^2 dy = \int_1^3 \pi y dy = \left[\frac{\pi y^2}{2} \right]_1^3 \quad \sqrt{y} = x$$

$$= \frac{\pi 3^2}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{8\pi}{2} = 4\pi \text{ v.e}$$

Ex) Arean för funktionen $y = x^2 - 4x$ som avgränsas över x -axeln rotors kring x -axeln

Läs ekvationen $x^2 - 4x = 0$
 $x(x-4) = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 4$

$$\int_0^4 \pi y^2 dx = \int_0^4 \pi (x^2 - 4x)^2 dx = \int_0^4 \pi (x^4 - 8x^3 + 16x^2) dx = \int_0^4 \pi x^4 - 8\pi x^3 + 16\pi x^2 dx$$

$$= \left[\frac{\pi x^5}{5} - 2\pi x^4 + \frac{16\pi x^3}{3} \right]_0^4 = \frac{\pi 4^5}{5} - 2\pi \cdot 4^4 + \frac{16\pi 4^3}{3} \approx 107,23 \text{ v.e}$$

Ex) Funktionen $y = \sin x + \cos x$ rotor runt x -axeln

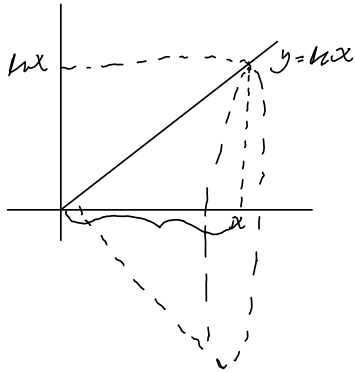
i intervallet $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Bestäm Volymen.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi y^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi (\sin x + \cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi (\sin^2 x + 2\cos x \sin x + \cos^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi (1 + \sin 2x) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi + \pi \sin 2x dx = \left[\pi x - \frac{\pi \cos 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi \cos \pi}{2} - \left(0 - \frac{\pi \cos(0)}{2} \right)$$

$$= \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2} + \pi \text{ v.e}$$

Ex) Visa att volymen för en kon är $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$



$$\int_0^x \pi (kx)^2 dx = \int_0^x \pi k^2 x^2 dx = \left[\frac{\pi k^2 x^3}{3} \right]_0^x = \frac{\pi k^2 x^3}{3}$$

$$= \frac{\pi k^2 \cdot \underbrace{x^2}_{r^2} \cdot \underbrace{x}_h}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$