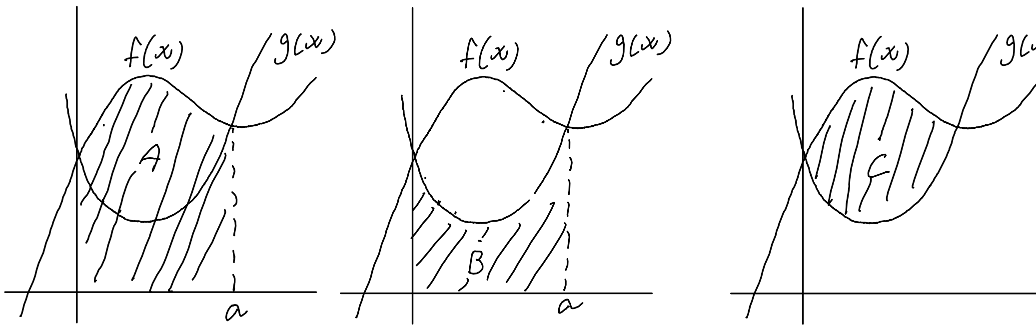
Arean mellan två kurvor

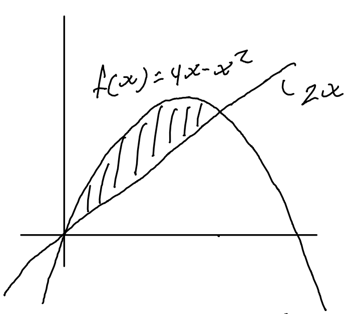
Vi söker arean



$A = \int_0^a f(x)\,dx$ $\quad B = \int_0^a g(x)$ $\quad A - B = C = \int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a g(x)$

Arean mellan två kurvor $f(x), g(x)$ går att beskriva med $\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$ där $f(x)$ är den övre funktionen och $g(x)$ den nedre.

Ex) Bestäm den markerade arean



$\int_0^2 f(x) - g(x)\,dx = \int_0^2 4x - x^2 - 2x\,dx = \int_0^2 2x - x^2\,dx$

$= \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{12}{3} - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$

Hitta skärning:

$4x - x^2 = 2x$

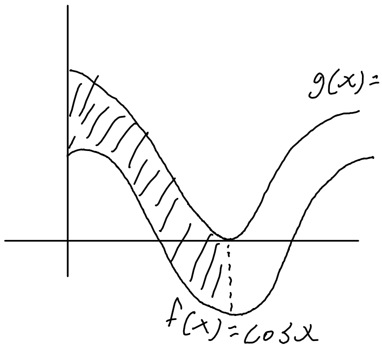
$2x - x^2 = 0$

$x(2 - x) = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = 2$

Ex) Bestäm den markerade arean

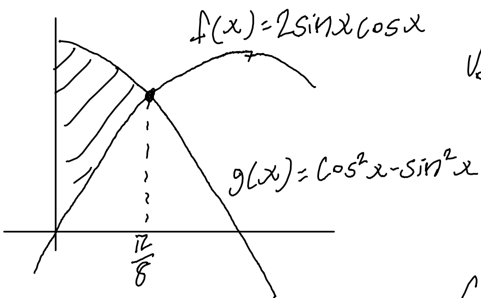


då $\cos x=-1$ för första gången då $x>0$

$$\int_0^{\pi} \cos x+1\,dx-\int_0^{\pi}\cos x\,dx=\int_0^{\pi}\cos x+1-\cos x\,dx$$

$$=\int_0^{\pi}1\,dx=\left[x\right]_0^{\pi}=\pi$$ Svar: π

Ex) Bestäm arean på det markerade området



$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} g(x)-f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\cos^2x-\sin^2x-2\sin x\cos x\,dx$$

Förenkla $\underbrace{\cos^2x-\sin^2x}_{\cos 2x}-\underbrace{2\sin x\cos x}_{\sin 2x}$

$$=\cos 2x-\sin 2x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}}\cos 2x-\sin 2x\,dx=\left[\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{8}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{2}+\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{2}-\frac{\sin 0}{2}-\frac{\cos 0}{2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{2}{2\sqrt{2}}-1=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\text{ a.e}$$