Övningsprov 1 – Matematik 4

Del 1 – Utan miniräknare

1. Lös de trigonometriska ekvationerna. Ange samtliga lösningar och svara i den enhet som står inom parentes bredvid ekvationen.

a) $2sinx = 1$ (Grader)

b) $\frac{cosx}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ (Radianer)

c) $tanx = 0$ (Radianer)

d) $cos2x = \frac{1}{2}$ (Grader)

e) $\sin(3x - \pi) = -1$ (Radianer)

f) $2cosxsinx = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (Radianer)

g) $\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x = 2$ (Grader) (9/3/0)

2. Bestäm värdet på följande uttryck

a) $\sin^2 x + \cos^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

b) $2 \cdot \sin(\pi) \cdot \cos(\pi) + \sin(\pi + 2\pi)$ (3/0/0)

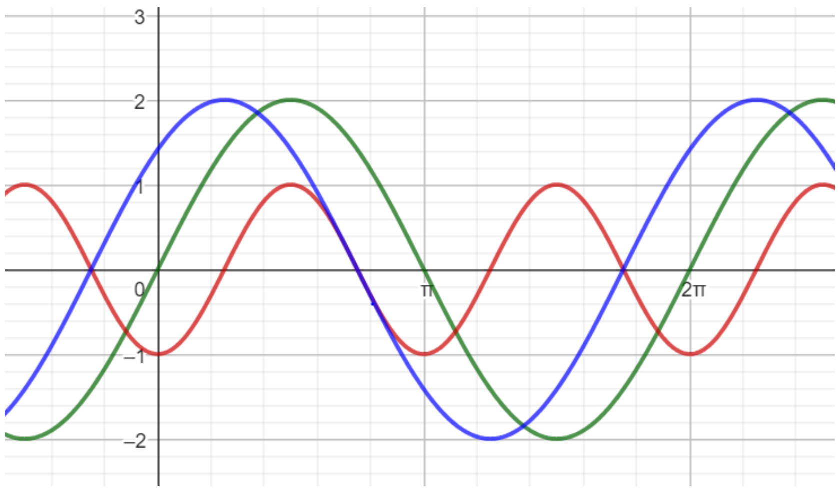
3. Para ihop funktionsekvationerna med rätt graf

A: $f(x) = 2sinx$

B: $g(x) = -cos2x$

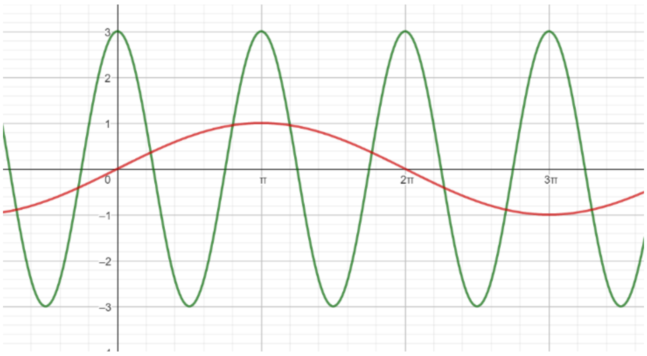
C: $h(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

(3/0/0)



Mahifi.se

4. Observera funktionerna till höger. Bestäm följande



a) Funktionernas amplitud

b) Funktionernas period

c) Funktionernas ekvationer

(6/0/0)

5. Derivera följande funktioner, skriv på enklaste möjliga form.

a) $f(x) = 3sinx$

b) $f(x) = -\frac{cosx}{2}$

c) $f(x) = x \cdot e^{x}$

d) $f(x) = \frac{4x}{x+1}$

e) $f(x) = cos2x$

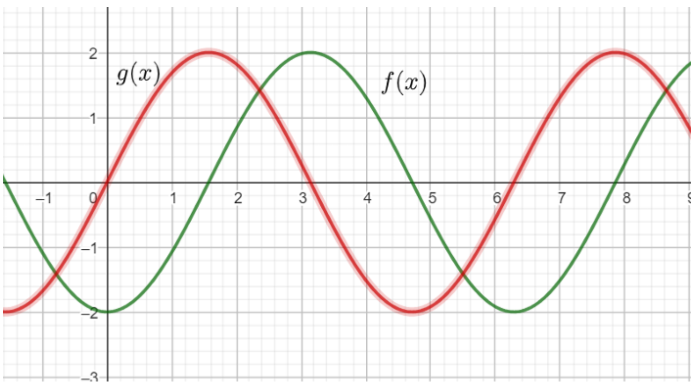
f) $f(x) = (3x + 1)^{6}$

g) $f(x) = ln2x$

h) $f(x) = 2\cos^{2} x - 1$

i) $f(x) = \ln(cosx)$ (7/4/0)

6. Bestäm om $f'(x) = g(x)$ eller $g'(x) = f(x)$ för följande funktioner. Motivering krävs



(1/1/0)

7. Bestäm antalet lösningar i intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$ för ekvationen $sin2x = 0$

(2/0/0)

8. Bestäm ekvationen för tangenten som tangerar funktionen $f(x) = 2cosx$ i $x = \frac{\pi}{2}$

(2/1/0)

9. Visa att följande likheter stämmer

a) $\frac{sin2x}{2cosx} = sinx$

b) $1 - \frac{\cos^2 x}{1+sinx} = sinx$

(3/2/0)

10. Visa att funktionen $h(x) = \ln(ax) + x$ alltid har en extrempunkt i $x = -1$ oavsett värde på a där $a \neq 0$

(0/2/0)

11. Vi definierar funktionen $f(x) = \frac{a \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2}+13x\right)+b}{\sin^{13} x}$ du vet att $b > a$. Förklara varför funktionen saknar nollställen.

(0/1/1)

12. Bestäm det exakta värdet för $sin75° \cdot cos285°$ (0/0/2)

13. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}+h\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}{h}$$ (0/0/2)

14. $h(x) > 0$ och $h'(x) > 0$ för alla x inom definitionsmängden. Visa att funktionen $f(x) = \frac{1}{\left(h(x)\right)^2}$ är avtagande för alla x inom definitionsmängden.

(0/0/2)

Del 2:

15. Omvandla 4 grader till radianer

(2/0/0)

16. Bestäm samtliga lösningar till ekvationerna, svara i radianer på a) och grader på b)

a) $4sinx = \sqrt{4}$

b) $cos2x = 0{,}25$ (4/0/0)

17. Bestäm amplitud och period för följande funktioner. Svara perioderna i radianer.

a) $f(x) = 4sin3x$

b) $f(x) = -3\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

c) $f(x) = 1{,}5\cos(2x + \pi) + 2$ (4/2/0)

18. Visa att det minsta värdet funktionen $f(x) = 8sinx + 6cosx$ kan anta är -10

(1/1/0)

19. Funktionen $d(t) = 10 - 8\sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$ beskriver havsdjupet i meter vid en position på stranden i kuststaden Playa Jide. t står för tiden i timmar från 07.00

a) Bestäm och tolka $d(4)$

b) Bestäm och tolka $d(t) = 10$

c) Bestäm och tolka $d'(12)$ (1/3/0)

20. Bestäm koordinaterna för samtliga extrempunkter för funktionen $f(x) = -\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 1$ i intervallet $0 \leq x \leq 4\pi$

(1/1/0)

21. Den trigonometriska funktionen $T(t) = 4\cos\left(\frac{\pi}{12}t + 4\right) + 24$ beskriver temperaturen en fin sommardag i Lund från kl 07.00 där t är tid i timmar.

a) Bestäm vilken tid på dygnet det är som varmast respektive kallast på dagen.

b) Bestäm vilken tid på dygnet temperaturen växer som mest.

(0/3/0)

22. Bestäm det största värdet för funktionen $f(x) = \ln\left(\sqrt{x}\right) - \frac{x}{2}$. Svara exakt

(0/3/0)

23. Temperaturen i en pool varierar under dygnets timmar. Den högsta temperaturen för poolen är 32 °C och den lägsta temperaturen är 24 °C, vilket den är klockan 04.00 på morgonen. Temperaturen under ett dygn kan beskrivas som en sinusfunktion på formen $T(x) = A \cdot \sin\left(B(x + C)\right) + D.$ Där x är antalet timmar från 00.00.

Bestäm konstanterna A, B, C och D

(1/1/1)

24. Visa att oavsett vilket positivt heltal $a > 1$ är kommer ekvationen $f'(x) = 0$ för funktionen $f(x) = \sin^a x$ ha minst en lösning som är på formen $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n$

(0/0/2)

25. Bestäm $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ algebraiskt för funktionen $f(x) = \frac{sinx \cdot cosx}{x}$. Svara exakt

(0/1/1)

26. För en funktion på formen $h(x) = \sin\left(g(x)\right)$ som är definierad i intervallet $0 \leq x \leq \pi$ vet du att

- $h(\pi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $g'(\pi) = 2$

Bestäm samtliga möjliga värden på $h'(\pi)$ (0/0/3)

Løsningsforslag øvingsprøv 1

1. a) $2\sin x = 1$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$x = 30° + 360° \cdot n$

eller $x = 180° - 30° + 360° \cdot n$

$= 150° + 360° \cdot n$

b) $\frac{\cos x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot n$

c) $\tan x = 0$ $\quad x = 0 + \pi \cdot n$

d) $\cos 2x = \frac{1}{2}$

$2x = \pm 60° + 360° \cdot n$

$x = \pm 30° + 180° \cdot n$

e) $\sin(3x - \pi) = -1$

$3x - \pi = \frac{3\pi}{2} + 2\pi \cdot n$

$3x = \frac{5\pi}{2} + 2\pi \cdot n$

$x = \frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi \cdot n}{3}$

f) $\underbrace{2\cos x \sin x}_{=\sin 2x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$2x = \frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot n$

$x = \frac{\pi}{8} + \pi \cdot n$

eller $2x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot n$

$2x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi \cdot n$

$x = \frac{3\pi}{8} + \pi \cdot n$

g) $\underbrace{\cos^2 x - \sin^2 x}_{=\cos 2x} + \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=\text{trig } 1} = 2$

$\cos 2x + 1 = 2$

$\cos 2x = 1$

$2x = 0 + 2\pi \cdot n$

$x = \pi \cdot n$

2. a) $\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1} + \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} = 2$

b) $\underbrace{2\underbrace{\sin(\pi)}_{=0} \cdot \cos(\pi)}_{=0} + \sin(\pi + 2\pi) = 0 + \underbrace{\sin(3\pi)}_{=0} = 0 + 0 = 0$

3. Grön - $f(x)$ Röd - $g(x)$ Blå - $h(x)$

4. Grön: Amplitud 3, Period: π, $f(x) = 3\cos 2x$

Röd: Amplitud: 1 Period 4π $f(x) = \sin \frac{x}{2}$

5. a) $f(x) = 3\sin x$

$f'(x) = 3\cos x$

b) $f(x) = -\frac{\cos x}{2}$

$f'(x) = \frac{\sin x}{2}$

c) $f(x) = x \cdot e^x$

$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x$

d) $f(x) = \frac{4x}{x+1}$

$f'(x) = \frac{4(x+1) - 4x}{(x+1)^2}$

$= \frac{4}{(x+1)^2}$

e) $f(x) = \cos 2x$

$f'(x) = 2\sin 2x$

f) $f(x) = (3x+1)^6$

$f'(x) = 6 \cdot 3(3x+1)^5 = 18(3x+1)^5$

g) $f(x) = \ln 2x$

$f'(x) = \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x}$

h) $f(x) = 2\cos^2 x - 1$

$f'(x) = -4 \cdot \cos x \cdot \sin x$

i) $f(x) = \ln(\cos x)$

$f'(x) = \frac{1}{\cos x} \cdot -\sin x$

$= \frac{-\sin x}{\cos x}$

6. $f'(x) = g(x)$

7. $\sin 2x = 0$

$2x = 0 + 2\pi \cdot n$

$x = \pi \cdot n$

eller $2x = \pi + 2\pi \cdot n$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot n$

Antal lösningar: $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ och 2π

8. $f(x) = 2\cos x$

$f'(x) = -2\sin x$

$f'(\frac{\pi}{2}) = -2$

$y = kx + m$ sök m

$= -2x + m$

$f(\frac{\pi}{2}) = 2 \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

$0 = -2 \cdot \frac{\pi}{2} + m$

$m = \pi$ svar: $y = -2x + \pi$

9. a) $\frac{\sin 2x}{2\cos x} = \sin x$

$VL = \frac{\sin 2x}{2\cos x}$

$= \frac{2\sin x \cos x}{2\cos x}$

$= \sin x$

$VL = HL$

b) $1 - \frac{\cos^2 x}{1+\sin x} = \sin x$

$VL = 1 - \frac{\cos^2 x}{1+\sin x}$

$= \frac{1+\sin x}{1+\sin x} - \frac{\cos^2 x}{1+\sin x} = \frac{1+\sin x - \cos^2 x}{1+\sin x}$

$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x - \cos^2 x}{1+\sin x} = \frac{\sin^2 x + \sin x}{1+\sin x}$

$= \frac{\sin x(\sin x + 1)}{1+\sin x} = \sin x$ $VL = HL$

10. $h(x) = \ln(ax) + x$

$h'(x) = \frac{1}{ax} \cdot a + 1 = \frac{1}{x} + 1$

$h'(x) = 0$ $\quad \frac{1}{x} + 1 = 0$

$\frac{1}{x} = -1$

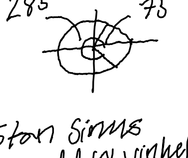
$x = -1$

11. $f(x) = \frac{a \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 13x\right) + b}{\sin^{13} x}$

nollstället då $f(x)=0$, det gäller enbart då täljaren är lika med noll.

$a \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 13x\right) + b = 0$ vi vet att $b > a$
Det gör att förskjutningen i y är större än amplituden. Det gör att den aldrig skär x-axeln

12. $\sin 75° \cdot \cos 285°$
finns inga exakta värden för dessa, hitta annan metod.



$\cos 285° = \cos 75°$

$\sin 75° \cdot \cos 75°$ (nästan sinus för dubbla vinkeln)

$\sin 2x = 2\cos x \cdot \sin x$

$\sin 75° \cdot \cos 75° = \frac{\sin(75 \cdot 2)}{2}$

$\frac{\sin(150°)}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$ Svar: $\frac{1}{4}$

13. Ser ut som derivatans definition är derivatans definition.

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + h\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h}$

för $f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$ $\quad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

14. $f(x) = \frac{1}{(h(x))^2} = (h(x))^{-2}$ $f'(x) = -2 \cdot (h(x))^{-3} \cdot h'(x)$

$= -2 \cdot \frac{h'(x)}{(h(x))^3}$ Vi vet att $h'(x) > 0$ och $h(x) > 0$ för alla x. Det innebär att $\frac{h'(x)}{(h(x))^3} > 0$ för alla x

$-2 \cdot \frac{h'(x)}{(h(x))^3} < 0$ för alla x, alltså avtagande.

15. 1 grad i radianer $= \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$ 4 grader blir då $4 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{45} \approx 0{,}0698$

16. a) $4\sin x = \sqrt{4}$

$\sin x = \frac{\sqrt{4}}{4}$

$x = 0{,}524 + 2\pi \cdot n$

eller $x = \pi - 0{,}524 + 2\pi \cdot n$

$\approx 2{,}62 + 2\pi \cdot n$

b) $\cos 2x = 0{,}25$

$2x = \pm 75{,}5° + 360° \cdot n$

$x = \pm \frac{75{,}5°}{2} + 180° \cdot n$

17. a) Amplitud: 4 Period: $\frac{2\pi}{3}$ c) Amplitud: 1,5 Period: π

b) Amplitud: 3 Period: 4π

18. $8\sin x + 6\cos x$ skriv om till en sinusfunktion

$a\sin x + b\cos x = c \cdot \sin(x+v)$ där $c = \sqrt{a^2+b^2}$ och $\tan v = \frac{b}{a}$

Vi är bara intresserade av c för största och minsta värde

$c = \sqrt{8^2+6^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$ $8\sin x + 6\cos x = 10\sin(x+v)$

Amplitud: 10 minsta värdet är således -10

19. $d(t) = 10 - 8\sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$

a) $d(4) = 10 - 8\sin\left(\frac{\pi \cdot 4}{6}\right)$

$\approx 3{,}07$. kl 11.00 är havsdjupet ungefär 3 meter.

b) $d(t) = 10$

$10 - 8\sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) = 10$

$-8\sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) = 0$

$\sin\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) = 0$

$\frac{\pi \cdot t}{6} = 0 + 2\pi \cdot n$

$t = 12 \cdot n$

eller $\frac{\pi \cdot t}{6} = \pi + 2\pi \cdot n$

$t = 6 + 12 \cdot n$

Var sjätte timme är havsdjupet 10 meter

c) $d'(t) = -\frac{\pi}{6} \cdot 8\cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right)$

$d'(12) = \frac{-\pi}{6} \cdot 8 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 12}{6}\right) \approx -4{,}19$

Vid klockan 19.00 minskar havsdjupet med $-4{,}19$ meter/h

20. $f(x) = -\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 1$

$f'(x) = -\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2}$

$f'(x) = 0$

$\frac{-\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2} = 0$

$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0$

$\frac{x}{2} = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n$

$x = \pm\pi + 4\pi \cdot n$

$x = \pi$ och 3π

Sätt in i ursprungsfunktionen

$f(\pi) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 = 0$

$(\pi, 0)$

$f(3\pi) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 1 = 1 + 1 = 2$

$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\right)$

21. a) kallast: ungefär 3.30 på natten

varmast: 15.30 på dagen

b) Växer som snabbast

vid 9.30

22. $f(x) = \ln(\sqrt{x}) - \frac{x}{2}$ sök extrempunkt

$= \ln(x^{\frac{1}{2}}) - \frac{x}{2}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}$

$f'(x) = 0$

$\frac{1}{2x} - \frac{1}{2} = 0$

$\frac{1}{2x} = \frac{1}{2}$ $\quad x = 1$

undersök karaktär! $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-1}$

$f''(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^{-2}$

$f''(1) = -\frac{1}{2}$ maximipunkt då $x = 1$

$f(1) = \ln(\sqrt{1}) - \frac{1}{2} = \underbrace{\ln(1)}_{=0} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

23. Amplituden $= \frac{\text{största} - \text{minsta}}{2} = \frac{32-24}{2} = 4$

$A = 4$ $\quad D = 28$ (förskjutning i x) $\quad B$ är perioden

$P = \frac{2\pi}{B}$ $\quad P = 24$

$24 = \frac{2\pi}{B}$

$B = \frac{\pi}{12}$

förskjutningen i x

minimipunkt då $x = 4$

C är antalet timmar

Vi vill förskjuta $C = -10$

eller $C = 14$

Svar: $4\sin\left(\frac{\pi}{12}(x-10)\right) + 28$

24. $f(x) = \sin^a x$ $\quad f'(x) = \cos x \cdot a \cdot \sin^{a-1} x$ $\quad$ Använd kedjeregeln

(inre derivata $\sin x$, yttre x^n)

$f'(x) = 0$

$\cos x \cdot a \sin^{a-1} x = 0$ $\quad$ Då kan $\cos x = 0$

och det är det då $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n$

vilket är på formen $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n$ V.S.V

25. $f(x) = \frac{\sin x \cos x}{x} = \frac{\frac{\sin 2x}{2}}{x} = \frac{\sin 2x}{2x}$

$f'(x) = \frac{2\cos 2x \cdot 2x - \sin 2x \cdot 2}{(2x)^2} = \frac{4x \cdot \cos 2x - 2\sin 2x}{4x^2}$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi \cdot \cos(\pi) - 2\sin(\pi)}{4 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{-2\pi}{\pi^2} = \frac{-2}{\pi}$

Svar: $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-2}{\pi}$

26. $h(x) = \sin(g(x))$ $\quad h'(x) = \cos(g(x)) \cdot g'(x)$

$h(\pi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad g'(\pi) = 2$ $\quad h'(\pi) = \cos(g(\pi)) \cdot \underbrace{g'(x)}_{=2} = 2\cos(g(\pi))$

Sök $g(\pi)$ $\quad h(\pi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin(g(\pi)) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ eller $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$g(\pi) = \frac{\pi}{3}$ eller $\frac{2\pi}{3}$

$h'(\pi) = 2\cos(g(\pi)) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ eller $2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 \cdot \frac{-1}{2} = -1$

Svar: $h'(\pi)$ är 1 eller -1