Derivatan av en produkt och kvot

Regler:

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \qquad h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Bevis för produktregeln

$$h'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h)}{h} + \frac{f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot f(x)$$

$$= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad \square$$

Ex, Derivera funktionerna

a) $f(x) = e^x \cdot x \qquad f'(x) = e^x \cdot x + e^x$

b) $f(x) = \frac{x}{x+1} \qquad f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$

c) $f(x) = \sin x \cdot \cos x \qquad f'(x) = \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot -(\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

Ex) För vilket/vilka x har funktionen

$f(x) = \frac{x}{x+1} - x$ har extrempunkter

Sök: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} - 1 = \frac{1}{(x+1)^2} - 1$$

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1}{(x+1)^2} - 1 = 0$$

$$\frac{1}{(x+1)^2} = 1$$

$$(x+1)^2 = 1$$

$$x+1 = \pm 1$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -2$$