

Övningsprov 2 – Prov 2

(Notera att det finns ett övningsprov med enbart funktioner på mahifi.se)

Del 1 – Utan miniräknare

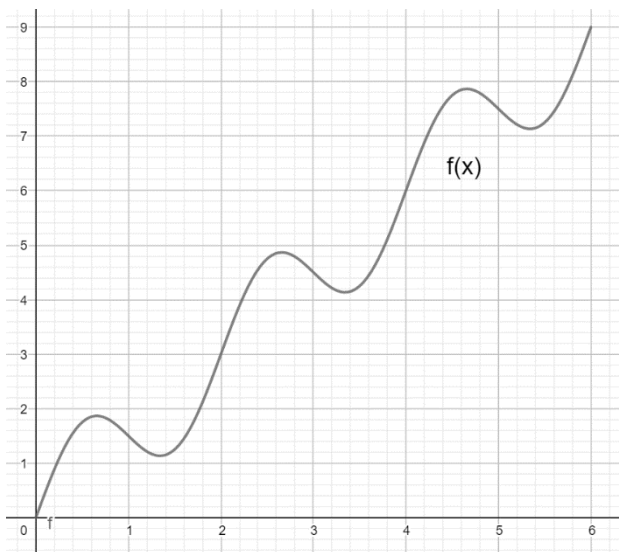
1. Vi definierar $f(x) = 4x + 2$ bestäm följande

- a) $f(6)$
- b) $f(-10)$
- c) $f(x) = -10$

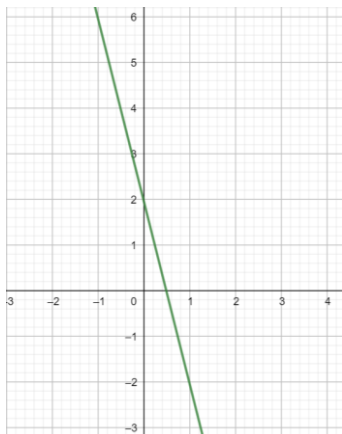
(3/0/0)

2. Nedan ser en funktion $f(x)$. Bestäm följande

- a) $f(4)$
- b) $f(x) = 3$
- c) Funktionens definitionsmängd och värdemängd
- d) För vilka x är $f(x) > 6$

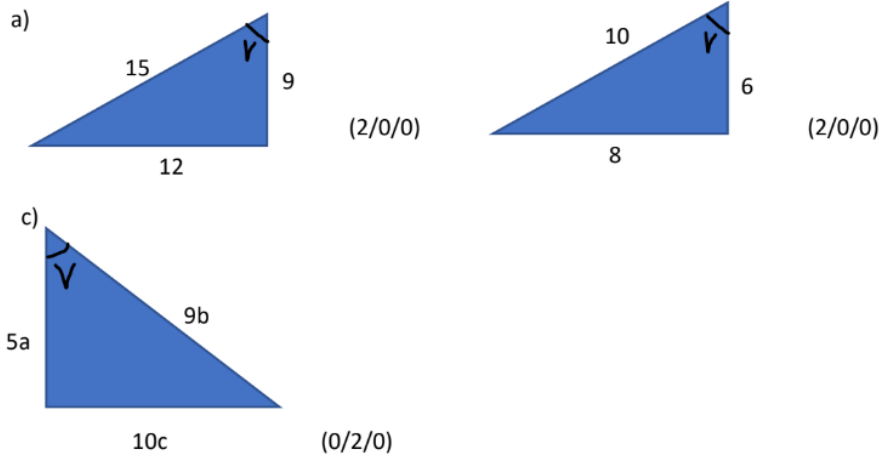


3. Bestäm ekvationen för de räta linjerna som visas i koordinatsystemet



(2/0/0)

4. Bestäm $\sin v$, $\tan v$, $\cos v$ i den enklaste formen för de rätvinkliga triangelarna



5. Vi definierar $f(x) = 3 \cdot 2^x$ och $g(x) = 3 \cdot x^2$, bestäm följande

- a) $f(1) + g(1)$
 b) $f(2) - g(2)$ (2/0/0)

6. Faktorisera följande uttryck

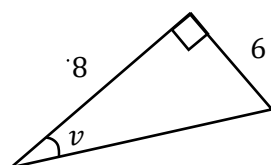
- a) $x^2 + x$
 b) $2x^3 + 4x^2 + 8x$
 c) $2xy + 2y$
 d) $xy + 3xy^2 + 6x^2y^2$ (3/1/0)

7. Bestäm sträckan mellan punkterna

- a) $(1, 4)$ och $(-2, 10)$
 b) $(-2, -6)$ och $(-5, -2)$
 c) $((a + 1), 3)$ och $((a + 4), 6)$ (2/1/0)

8. Bestäm $\sin v + \cos v$ för den rätvinkliga triangeln

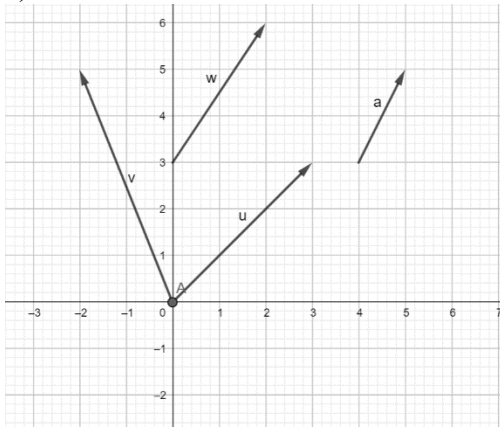
(1.e)



(0/2/0)

9.

- Bestäm vektorena i koordinatform
- Bestäm längden på samtliga vektorer
- Bestäm vektorn $\vec{z}$ i koordinatform om $\vec{z} = \vec{v} + \vec{u}$



(5/3/0)

10. Skriv följande potensuttryck som en potens i en valfri bas

- $4^2 \cdot 2^2$
- $4^4 \cdot 9^2$

(1/2/0)

11. Lös ekvationerna

- $x^2 + 4x = 4x + 16$
- $\frac{2x}{8} = \frac{2}{2x}$
- $(x + 1)(x - 4) = x^2$

(3/1/0)

12. För vilket/vilka x -värden är funktionerna $f(x) = x^2 + 2x - 4$ och $g(x) = 2x$ lika med varandra?

(1/1/0)

13. Den räta linjen $3y = -6x + 15$ har värdemängden $-1 < y < 9$ bestäm den räta linjens definitionsmängd

(0/2/0)

14. Funktionerna $f(x) = 4x + 1$ och $g(x) = -2x - 2$ är definierade. Lös ekvationen $f(g(x)) = 1$

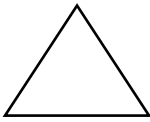
(0/3/0)

15. En vektor $\vec{v} = (a, b)$ har längden 5 l.e och har följande samband $\vec{w} + \vec{v} = (6, 10)$ där $\vec{w} = (3, c)$. Bestäm de möjliga koordinaterna för vektorn $\vec{v}$

(0/1/2)

16. Visa att om två rätta linjer är parallella kommer deras sammansatta funktion $f(g(x))$ alltid vara en rät linje med linjernas k-värde i kvadrat
(0/1/1)

17. Använd den liksidiga triangeln för att bestämma ett exakt värde på $\cos 30^\circ$



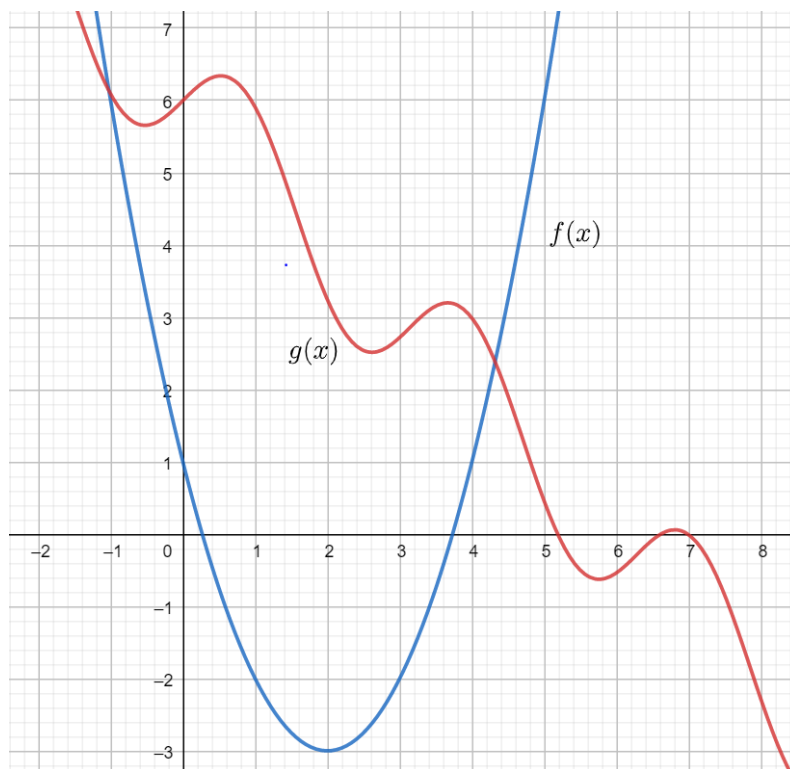
(0/0/2)

18. Skriv följande trigonometriska uttryck i storleksordning (med någon motivering)

$$\tan 5^\circ, \sin 5^\circ, \cos 5^\circ$$

(0/0/1)

19. Funktionen $h(x)$ definieras som $h(x) = g(x) + f(x)$. Bestäm $h(4)$



(0/0/1)

20. En bakteriekultur i ett labb ökar exponentiellt. 1 januari planterades bakteriekulturen och man kunde notera att det fanns 10 000 bakterier den 3 januari. Den 5 januari valde man att avsluta projektet eftersom antalet bakterier hade ökat till 1 000 000. Hur många bakterier hade man planterat den 1 januari?

(0/0/2)

Del 2 – Med miniräknare och geogebra

21. $f(x) = 1500 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$ bestäm följande

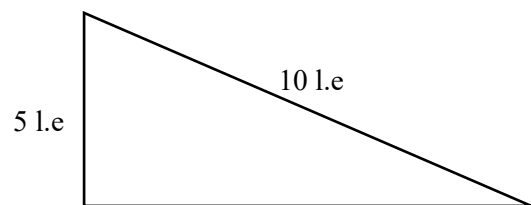
a) $f(3)$

b) $f(-4)$

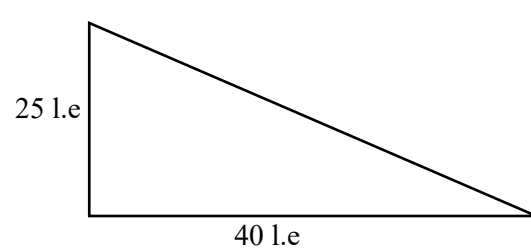
(2/0/0)

22. Bestäm samtliga vinklar på följande rätvinkliga trianglar

a)



b)



(4/0/0)

23. Undersök om funktionen $f(x) = 2x^2 + 4x$ går igenom följande punkter

a) $(4, 42)$

b) $(100, 24000)$

24. Lös ekvationerna

a) $4x^7 = 30$

b) $\frac{x^3}{10} = \frac{32}{x^7}$

c) $x^3 - 4x = -3x$

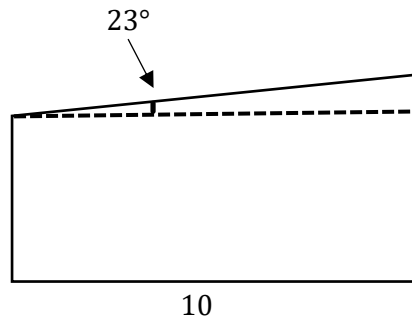
25. Bestäm funktionerna $f(x)$ och $g(x)$ utifrån tabellerna

x	$f(x)$
0	4
2	10
4	16

x	$g(x)$
0	243
1	81
2	27
3	9

(2/2/0)

26.



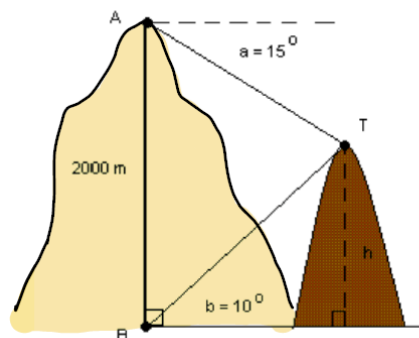
Bestäm samtliga sidor på fyrhörningen om arean för figuren är 100 areaenheter

(0/1/1)

27. Punkterna $(1, 3)$, $(-2, 6)$ och $(0, -2)$ skapar en triangel. Bestäm samtliga sträckor och vinklar i den triangeln.

(0/1/2)

28. Från 2000 m höjd ses toppen på ett närliggande berg under vinkeln 15 grader enligt bild. När du kommit ner så ser du istället bergstoppen under 10 grader enligt bild. Bestäm grannbergets höjd.



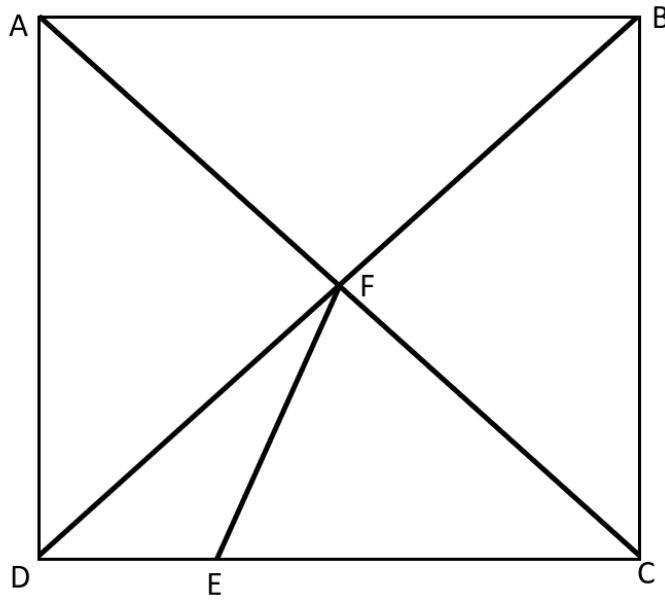
(0/1/2)

29. 1820 levde 90% av jordens befolkning i extrem fattigdom. Idag är det ungefär 10% av befolkningen som lever i extrem fattigdom. Organisationen Joakim-aid vill få fram modeller som beskriver hur den extrema fattigdomen har förändrats och kommer förändras framöver.

- Skapa två olika modeller som beskriver förändringen i fattigdom från 1820 till idag
- Bestäm vilket år den extrema fattigdomen kommer vara på 1% av befolkningen enligt respektive modell.

(0/1/2)

30. Nedan ser du en kvadrat ABCD. Sträckorna AC och BD är diagonaler i kvadraten. Sträckan DE utgör 35% av sidlängden DC. Bestäm samtliga vinklar i triangeln FEC.



(0/2/1)

Lösningförslag övningsprov 2.

1. $f(x) = 4x + 2$

a) $f(6) = 4 \cdot 6 + 2 = 26$

b) $f(-10) = 4 \cdot (-10) + 2 = -38$

c) $f(x) = -10$ $4x + 2 = -10$
 $4x = -12$
 $x = -3$

2. $f(4) = 6$

c) definition: $0 \leq x \leq 6$

b) $x = 2$

värdemängd $0 \leq y \leq 9$

d) $4 \leq x \leq 6$

4. a) $\sin v = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ $\cos v = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$
 $\tan v = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

3. $y = -4x + 2$

b) $\sin v = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ $\cos v = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$
 $\tan v = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

5. $f(x) = 3 \cdot 2^x$
 $g(x) = 3 \cdot x^2$

c) $\sin v = \frac{96}{100}$ $\cos v = \frac{50}{96}$ $\tan v = \frac{100}{50} = \frac{20}{9}$

a) $f(1) + g(1) = 3 \cdot 2^1 + 3 \cdot 1^2 = 6 + 3 = 9$

6. a) $x^2 + x = x(x+1)$

b) $f(2) - g(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2^2 = 0$

b) $2x^3 + 4x^2 + 8x = 2x(x^2 + 2x + 4)$

c) $2xy + 2y = 2y(x+1)$

7. $d = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$

d) $xy + 3xy^2 + 6x^2y^2 = xy(1 + 3y + 6xy)$

a) $(1, 4)$ och $(-2, 10)$
 $x_1 \ y_1 \quad x_2 \ y_2$

$d = \sqrt{(10 - 4)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{6^2 + (-3)^2} = \sqrt{45}$

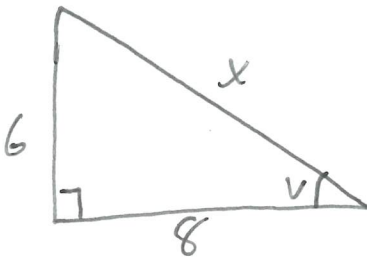
b) $(-2, -6)$ och $(-5, -2)$
 $x_1 \ y_1 \quad x_2 \ y_2$

$d = \sqrt{(-2 - (-6))^2 + (-5 - (-2))^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2}$
 $= \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$

$$c) \begin{pmatrix} a+1 \\ x_1 \end{pmatrix}, 3 \text{ och } \begin{pmatrix} a+4 \\ x_2 \end{pmatrix}, 6 \quad d = \sqrt{(a+4)-(a+1))^2 + (6-3)^2} =$$

$$= \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$$

8.



$$x^2 = 6^2 + 8^2$$

$$x = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

$$\sin v = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\cos v = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\sin v + \cos v = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$$

9. a) $\vec{u} = (3, 3)$ $\vec{v} = (-2, 5)$ $\vec{w} = [\text{start i origo}] = (2, 3)$

$$\vec{a} = [\text{start i origo}] = (1, 2)$$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} \text{ l.e.}$, $|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29} \text{ l.e.}$

$$|\vec{w}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \text{ l.e.}$$
 $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{ l.e.}$

c) $\vec{z} = \vec{v} + \vec{u} = (-2+3, 5+3) = (1, 8)$ $\vec{z} = (1, 8)$

10. a) $4^2 \cdot 2^2 = (2^2)^2 \cdot 2^2 = 2^4 \cdot 2^2 = 2^6$ b) $4^4 \cdot 9^2 = 4^4 \cdot (3^2)^2 = 4^4 \cdot 3^4 = (4 \cdot 3)^4 = 12^4$

11. a) $x^2 + 4x = 4x + 16$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

b) $\frac{2x}{8} = \frac{2}{2x}$

$$\frac{x}{4} = \frac{1}{x}$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

c) $(x+1)(x-4) = x^2$

$$x^2 - 4x + x - 4 = x^2$$

$$x^2 - 3x - 4 = x^2$$

$$-3x = 4$$

$$x = -\frac{4}{3}$$

$$12. f(x) = x^2 + 2x - 4 : g(x) = 2x$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 + 2x - 4 = 2x$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

funktionerna är lika med
varandra då $x = \pm 2$

$$13. 3y = -6x + 15$$

$$y = -2x + 5 \quad \text{Värdomängd: } -1 < y < 9$$

Sök def.mängd: Titra på ytterkanterna av värdomängden för vilka x stämmer det med funktionen?

$$y = -1 \Rightarrow -1 = -2x + 5$$

$$-6 = -2x$$

$$x = 3$$

$$y = 9 \Rightarrow 9 = -2x + 5$$

$$4 = -2x$$

$$x = -2$$

$$\text{Def.mängd: } -2 < x < 3$$

$$14. f(x) = 4x + 1 \text{ och } g(x) = -2x + 2$$

$$f(g(x)) = 4(-2x + 2) + 1 = -8x - 8 + 1 = -8x - 7$$

$$f(g(x)) = 1 \Rightarrow -8x - 7 = 1$$

$$-8x = 8$$

$$x = -1$$

$$15. \vec{V} = (a, b) \quad \vec{W} = (3, 4) \quad \vec{W} + \vec{V} = (a+3, b+4) = (6, 10)$$

$$a = 3$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{3^2 + b^2} = 5$$

$$3^2 + b^2 = 25$$

$$b^2 = 16$$

$$b = \pm 4$$

$$\vec{V} = (3, \pm 4)$$

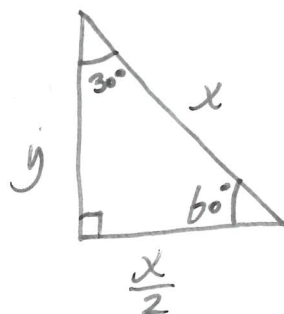
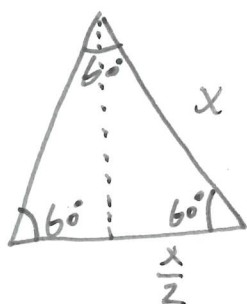
16. $f(x) = kx + m_1$ $g(x) = kx + m_2$

$$f(g(x)) = k(kx + m_2) + m_1 = k^2x + km_2 + m_1$$

$f(g(x)) = k^2x + km_2 + m_1$ är en rät linje där
 k -värdet är k^2 och m -värdet $km_2 + m_1$

□

17.



Sök y uttryckt i x

$$y^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2$$

$$y^2 + \frac{x^2}{4} = x^2$$

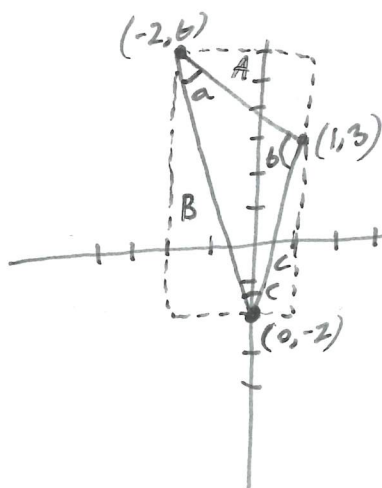
$$y^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4}$$

$$y^2 = \frac{3x^2}{4} \quad y = \frac{\sqrt{3} \cdot x}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}x}{2}}{\frac{x}{1}} = \frac{\sqrt{3} \cdot x}{2 \cdot x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Svar: $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

27. — Notera!!!



Sträckan $ab = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$

Sträckan $ac = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{66}$

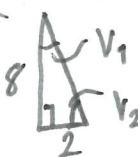
Sträckan $bc = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$

Triangel A - vinklar:



45° och 45°

Triangel B - vinklar



$v_1 = \tan^{-1}\left(\frac{2}{8}\right) = 14,03^\circ$

$v_2 = \tan^{-1}\left(\frac{8}{2}\right) = 75,96^\circ$

Triangel C - vinklar



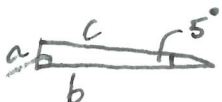
$v_3 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) = 11,30^\circ$

$v_4 = \tan^{-1}(5) = 78,69^\circ$

Vinkel $a = 90^\circ - 45^\circ - 14,03^\circ = 30,97^\circ$

Vinkel $b = 180^\circ - 45^\circ - 11,30^\circ = 123,7^\circ$

Vinkel $c = 180^\circ - 75,96^\circ - 78,69^\circ = 25,35^\circ$

18.  $\tan 5^\circ = \frac{a}{b}$ $\sin 5^\circ = \frac{a}{c}$ $\cos 5^\circ = \frac{b}{c}$
 $a < b < c$ $\frac{a}{c} < \frac{a}{b} < \frac{b}{c}$ $\sin 5^\circ < \tan 5^\circ < \cos 5^\circ$

19. $h(x) = f(x) + g(x)$

$h(4) = f(4) + g(4) = 1 + 3 = 4$ $h(4) = 4$

20. $f(x) = C \cdot a^x$ eftersom det är en exponentiell förändring 2 metoder att lösa problemet

metod 1. Sätt $x=0$ vid 3 januari och räkna bakkårens

till 1 januari $f(0) = 10000$ $C = 10000$ $f(2) = 10000 \cdot a^2 = 1000000$

$10000 a^2 = 1000000$

$a^2 = 100$

$a = 10$

$f(x) = 10000 \cdot 10^x$

$f(-2) = 10000 \cdot 10^{-2} = 10000 \cdot \frac{1}{100}$

$f(-2) = 100$ Svar: 100 st.

metod 2. Hitta C med 2 ekvationer

$f(x) = C \cdot a^x$ $f(2) = C \cdot a^2 = 10000$ $f(4) = C \cdot a^4 = 1000000$

5 januari

$\frac{10000}{a^2} \cdot a^4 = 1000000$

$10000 a^2 = 1000000$

$a^2 = 100$

$a = 10$

$C \cdot a^2 = 10000$

$C \cdot a^4 = 1000000$

$C \cdot 10^2 = 10000$

$C = 100$

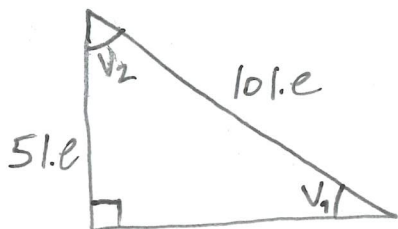
Svar: 100 st

21. $f(x) = 1500 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$

a) $f(3) = 1500 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 55,555$

b) $f(-4) = 1500 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = 121500$

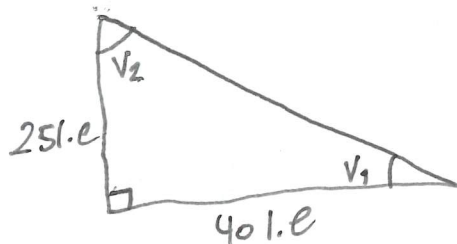
22. a)



$$V_1 = \sin^{-1}\left(\frac{5}{10}\right) = 30^\circ$$

$$V_2 = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

b)



$$V_1 = \tan^{-1}\left(\frac{25}{40}\right) = 32,00^\circ$$

$$V_2 = 180^\circ - 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$$

23. $f(x) = 2x^2 + 4x$

a) Undersök $f(4) = 2 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 = 48$ Går ej igenom (4,42)

b) Undersök $f(100) = 2 \cdot 100^2 + 4 \cdot 100 = 20400$ Går ej igenom (100, 20400)

24. a) $4x^7 = 30$
 $x^7 = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$
 $(x^7)^{\frac{1}{7}} = \left(\frac{15}{2}\right)^{\frac{1}{7}}$
 $x = 1,333$

b) $\frac{x^3}{10} \neq \frac{32}{x^7}$
 $x^{10} = 320$
 $(x^{10})^{\frac{1}{10}} = 320^{\frac{1}{10}}$
 $x = 1,78$

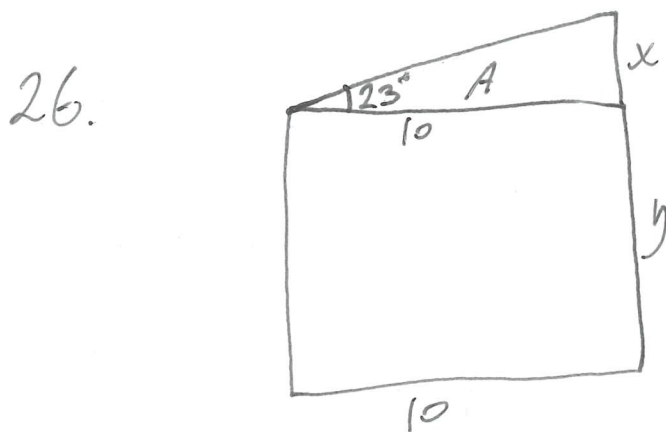
c)

$f(x) = g(x)$ då $x = 1,764$

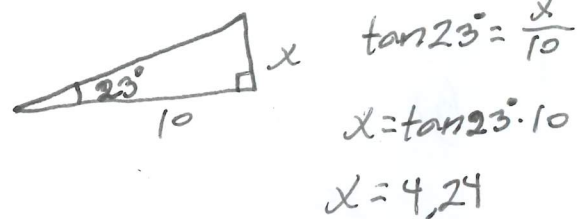
d) Skriv in $f(x) = x^3 - 4x$ och $g(x) = -3x$ i GeoGebra och undersök där $f(x) = g(x)$ $x_1 = -1$ $x_2 = 0$ $x_3 = 1$

25. $f(x)$ är ett linjärt samband $f(x) = kx + m$ där
 $m = 4$ $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10 - 4}{2 - 0} = \frac{6}{2} = 3$ $f(x) = 3x + 4$

$g(x)$ är en exponentiell förändring $g(x) = C \cdot a^x$
 $C = 243$ $g(1) = 81$ $81 = 243 \cdot a$
 $a = \frac{1}{3}$ $g(x) = 243 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$



Area triangeln



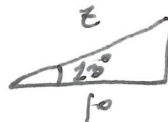
$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{10 \cdot 4,24}{2} = 21,22 \text{ a.e.}$$

Area kvadrat: $10 \cdot y$

$$\text{Area kvadrat} + \text{triangel} = 10 \cdot y + 21,22 = 100$$

$$y = 7,878 \text{ l.e.}$$

Höjden för triangeln:

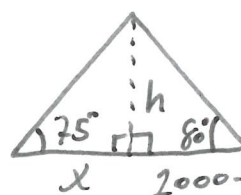
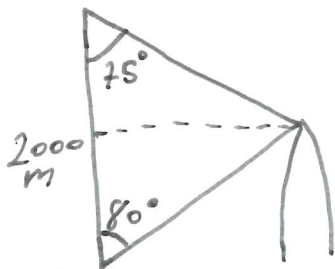


$$\cos 23^\circ = \frac{10}{z} \Rightarrow z = \frac{10}{\cos 23^\circ} = 10,86 \text{ l.e.}$$

Sidoror: 10, 10, 10,86, 12,118

27. finns på tidigare sidor !!

28.



$$\tan 75^\circ = \frac{h}{x}, h = x \cdot \tan 75^\circ$$

$$\tan 80^\circ = \frac{h}{2000 - x} = \frac{x \cdot \tan 75^\circ}{2000 - x}$$

$$\tan 80^\circ = \frac{x \cdot \tan 75^\circ}{2000 - x}$$

$$x \cdot \tan 75^\circ = 2000 \cdot \tan 80^\circ - x \cdot \tan 80^\circ$$

$$x \cdot \tan 75^\circ + x \cdot \tan 80^\circ = 2000 \cdot \tan 80^\circ$$

$$x (\tan 75^\circ + \tan 80^\circ) = 2000 \cdot \tan 80^\circ$$

$$x = \frac{2000 \cdot \tan 80^\circ}{\tan 75^\circ + \tan 80^\circ} \approx 1206 \text{ m}$$

höjden är då $2000 - 1206 = 794 \text{ m}$ Svar: 794 m

29. a) Modell 1: en rät linje $f(x) = kx + m$

$$f(0) = 90 \quad (\text{motorer 90\% av befolkningen år 1820})$$

$$f(202) = 10 \quad (\text{motorer 10\% av befolkningen år 2022})$$

2022

$$m = 90 \quad k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{90 - 10}{0 - 202} \approx -0,4$$

$$f(x) = -0,4x + 90$$

Modell 2: en exponentiell funktion

$$g(x) = C \cdot a^x \quad C = 90 \quad g(202) = 10 \quad 10 = 90 \cdot a^{202}$$

$$g(x) = 90 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x}{202}} = 90 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x}{202}}$$

$$\frac{1}{9} = a^{202}$$

$$a = \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{202}}$$

b) När är fattigdomen på 1% enligt modellerna?

$$f(x) = 1 \quad 1 = -0,4x + 90$$

$$-89 = -0,4x$$

$$x = 222,5$$

år 2042 är fattigdomen
1% enligt modellen

$$g(x) = 1 \quad 90 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x}{202}} = 1$$

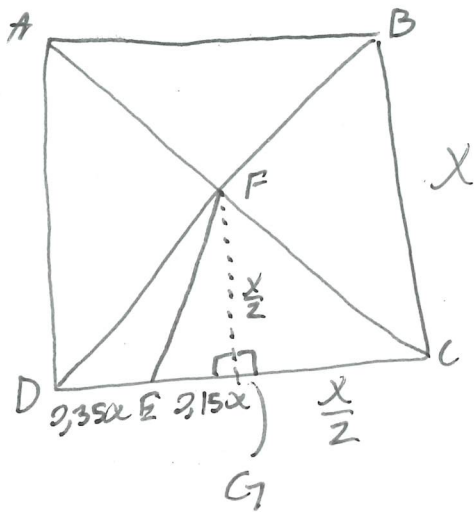
Undersök på geometra!

$$x \approx 413,686 \text{ då } g(x) = 1$$

Titta på skärmen mellan
 $g(x)$ och $y = 1$

år 223,3 är fattigdomen 1%
enligt modellen

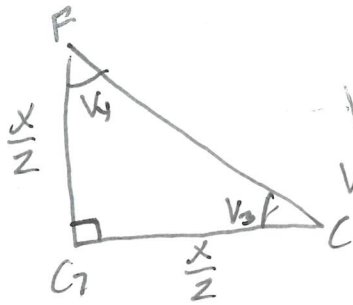
30.



$\tan V_1 = \frac{\frac{x}{2}}{0,15x} = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{0,15x} = \frac{1}{0,3}$

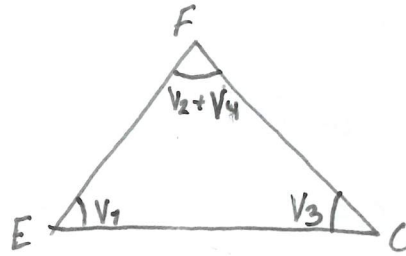
$V_1 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{0,3}\right) = 73,3^\circ$

$V_2 = \tan^{-1}\left(\frac{0,3}{1}\right) = 16,7^\circ$



$V_3 = 45^\circ$

$V_4 = 45^\circ$



$V_1 = 73,3^\circ \quad V_2 + V_4 = 16,7 + 45 = 61,69^\circ$

$V_3 = 45^\circ$