Övningsprov 2 – Ma3c

Uppgifter med en kvadrat kan lösas med digitalt hjälpmedel

1. Derivera följande funktioner algebraiskt, förenkla om möjligt.

a) $f(x) = 2x^3 + 3x + 4$

b) $g(x) = e^x + e^{2x} + e$

c) $g(x) = 5^x + 10$

d) $f(x) = \frac{e^{3x}}{e^x}$

e) $g(x) = \frac{e^5 \cdot e^{2x}}{e^{10} \cdot e^x - 2e^x}$

f) $f(x) = (a + b)e^{ax+bx}$ (3/2/2)

2. Bestäm samtliga primitiva funktioner till följande funktioner

a) $f(x) = 3x^2 - x + 1$

b) $f(x) = e^{3x}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2} + 10$

d) $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$ (2/1/0)

3. Bestäm följande integraler

a) $\int_0^2 3x^2 + 1\, dx$

b) $\int_{-1}^1 e^{2x} dx$

c) $\int_0^3 \frac{3}{e^{2x}} dx$

d) $\int_0^1 \frac{e^x + xe^{x+1}}{1+ex} dx$ (4/2/1)

4. Bestäm talet a

a) $ln(a+4) - ln4 = ln2$

b) Om $f'(0) = 8$ för funktionen $f(x) = 2e^{ax}$

c) $e^{2a} + 10 = 15$

d) $\int_{-1}^{a} x^2 dx = 3$

e) $f(x) = \frac{a}{x}$ och $f''(1) = 8$

f) Om $f(x) = e^{\frac{x}{10}} + ax$ har en extrempunkt i punkten $(0,1)$ (4/4/0)

$\boxed{5.}$ Bestäm $f'(0)$ för följande funktioner med hjälp av geogebra

a) $f(x) = e^x \cdot x^2$

b) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

c) $f(x) = 3^x \cdot x$ (3/0/0)

6.

a) Bestäm för vilka x-värden funktionen $f(x) = x^3 - 12x + 10$ extrempunkter

b) Bestäm extrempunkternas karaktär

(3/1/0)

7. Visa att funktionen $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$ har en terrasspunkt

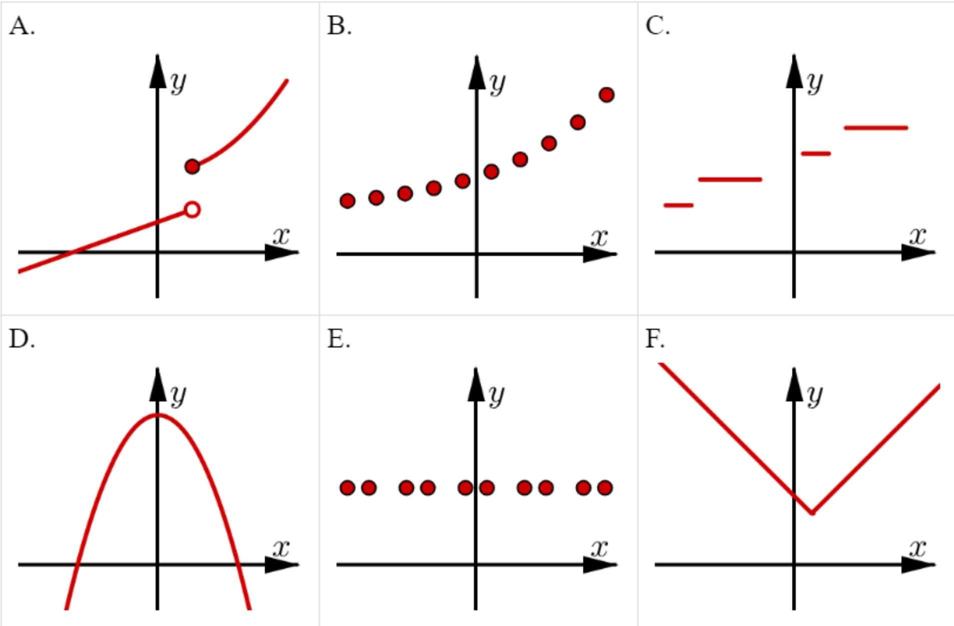
(3/0/0)

8. Nedan ser du grafen till sex olika funktioner. Bestäm följande

a) Bestäm de två funktioner som är kontinuerliga

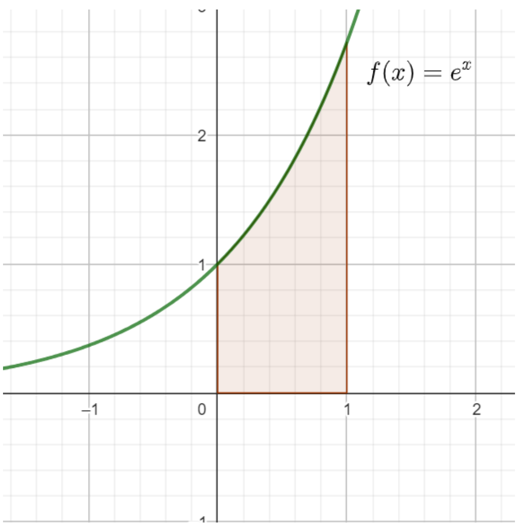
b) Bestäm de två funktioner som är diskreta

c) Bestäm de två funktionerna som varken är diskreta eller kontinuerliga (3/0/0)

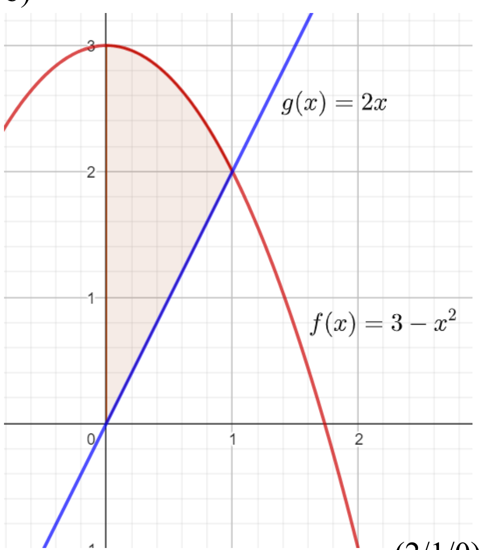


9. Bestäm arean på det markerade området svara exakt

a)



b)

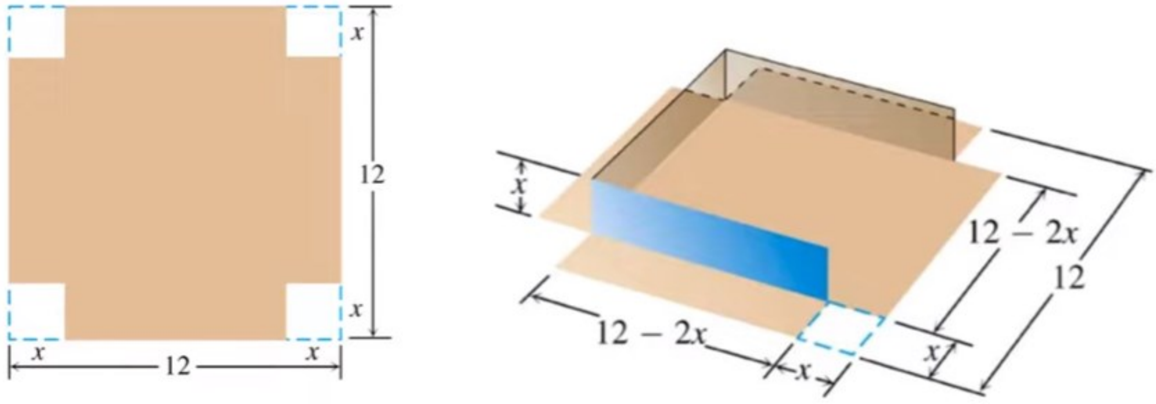


(2/1/0)

10. Visa algebraiskt (utan miniräknare) att funktionen $f(x) = x^3 + 0{,}45^3x + 100000$ saknar extrempunkter

(0/2/0)

11. Joakim ska bygga en låda och vill maximera dess volym. Han har gjort följande skiss där han kommer vika upp sidorna enligt bilden nedan. Bestäm den maximala volymen lådan kan anta och bestäm dess dimensioner.



(0/3/0)

12. En tredjedagsfunktion $f(x)$ saknar extrempunkter. Skissa en tänkbar derivatafunktion till $f(x)$

(0/1/0)

13. Lös ekvationen $ln(x+1) = \sqrt{2}$. Svara exakt och med ett närmevärde (0/1/0)

14. För en funktion vet du att $f''(x) = x$, du vet också att $f'(1) = 2$ samt att $f(1) = 3$

Bestäm $f(x)$ (0/3/0)

15. Visa att integralen $\int_a^b -x^2\,dx$ ger ett värde V som alltid är $V \leq 0$ för alla a och b, $a < b$

(0/3/0)

16. Visa att funktionen $f(x) = \frac{x^3}{3} - ex^2 + e^2x$ aldrig är avtagande (0/2/1)

17. Ett föremål är i fritt fall. Sträckan i meter föremålet har nått efter t sekunder går att beskriva med funktionen $50t - 5e^{\frac{-t}{5}} + 5$. Undersök vad som kommer hända med hastigheten på föremålet över tid?

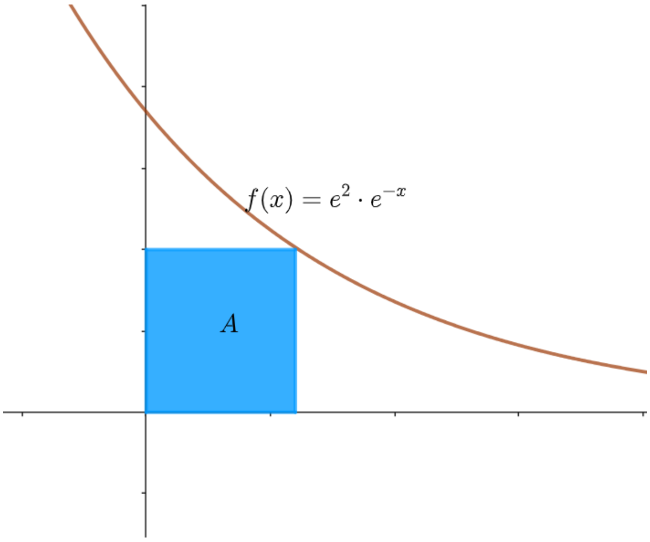
(0/3/0)

18. Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{h \to 0} \frac{(9+h)^{\frac{1}{2}} - 9^{\frac{1}{2}}}{h}$$

(0/0/1)

19. Visa att om du placerar en rektangel under kurvan på $f(x) = e^2 \cdot e^{-x}$ som avgränsas av postiva x- och y-axeln kommer den maximala arean för rektangeln vara e a.e.



20. En epidemi sprids i ett isolerat land. Det oerhört framgångsrika företaget Joakimton har gjort en modell för att beskriva antalet smittade.

$$S(t) = \frac{A}{9e^{-0,0564t} + 3} + 2e^{-0,0021t}$$

Där t är antal dagar från den 1 januari 2023.

Byn innehåller 6000 personer. Man antar att efter tid alla kommer bli smittade av sjukan. Bestäm konstanten A så att modellen blir realistisk.

(0/1/1)

21. Joakim vill undersöka hur lång tid det tar innan hans bil gör slut på bensin. Han vet utifrån bruksanvisningen att bensinen förbrukas med en hastighet liter/mil med funktionen $f(x) = e^{-0,054x} + 0,73$. Joakim fyller på med 50 liter. Hur lång tid kommer det ta innan Joakim har förbrukat hela tanken utifrån modellen?

(0/0/2)

22.

a) Visa att följande samband gäller för funktioner som är kontinuerliga i intervallet $a \leq x \leq c$

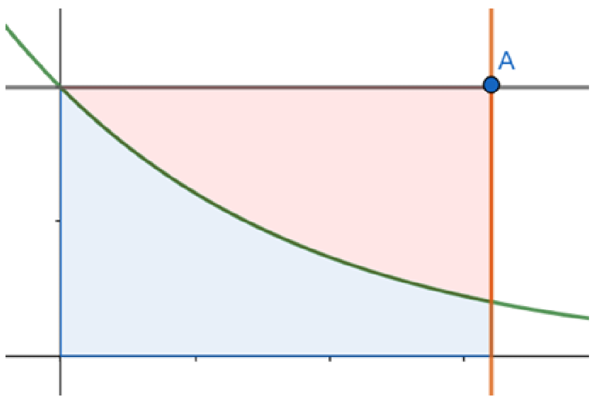
$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

b) Visa att följande samband gäller för funktioner som är kontinuerliga i intervallet $a \leq x \leq b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

(0/2/2)

$\boxed{23}$. Nedan visas $f(x) = e^{-x}$ och linjen $y = 1$ som tillsammans avgränsar två areaområden. För vilken koordinat på punkten A är den röda och den blå arean lika stora?



(0/0/2)

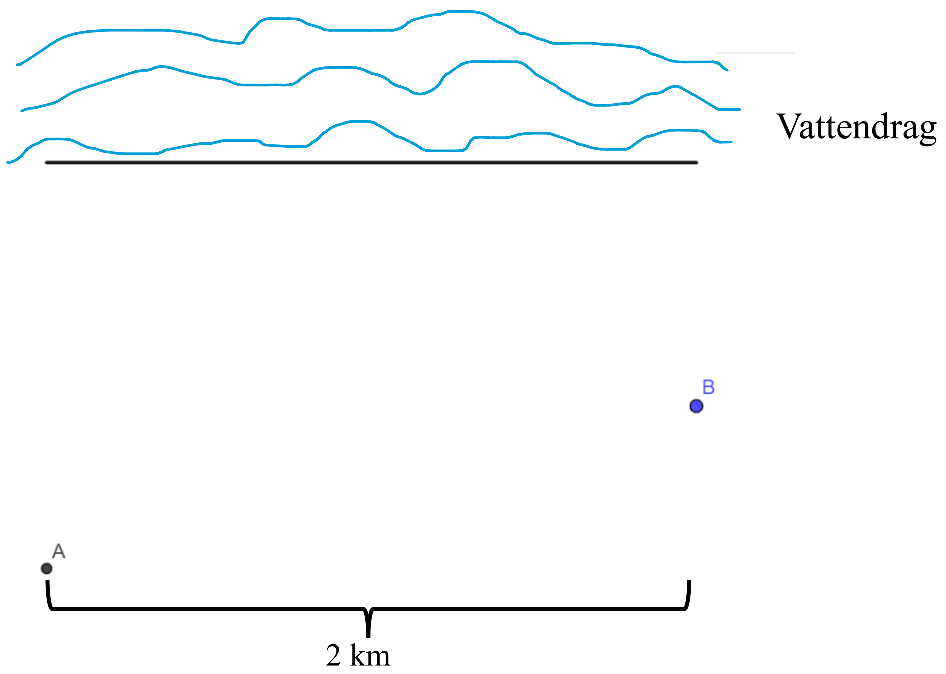
24. För vilket/vilka värden på x är uttrycket odefinierat?

a) $\frac{1}{e^{2x}-10e^{x}}$

b) $\frac{1}{e^{2x}-4e^{x}+4}$

(0/2/2)

$\boxed{25.}$ Joakim ska hämta vatten i ett vattendrag. Han börjar på punkten A som är 1 km (vinkelrätt) från vattendraget ska hämta vatten och sedan gå till punkt B som är 0,75 km (vinkelrätt) från vattendraget. När Joakim går utan vatten går han med en hastighet V. När han går med vattnet minskar hastigheten med 50%. Hur ska Joakim gå för att minimera tiden det tar för honom att hämta vatten?



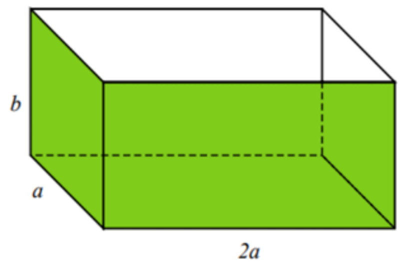
(0/0/3)

26. Du har följande funktion $f(x) = ax^6$. Du vet att den räta linjen $y = 12x - 20$ tangerar grafen till funktionen i ett okänt x-värde

Bestäm talet heltalet a

(0/0/2)

27. Ett rätblock utan lock har volymen $36m^3$. För vilka sidlängder på $2a$, a *och* b har rätblockets sammanlagda sidor den minsta arean men fortfarande den bestämda volymen på $36m^3$. Bestäm också den arean.

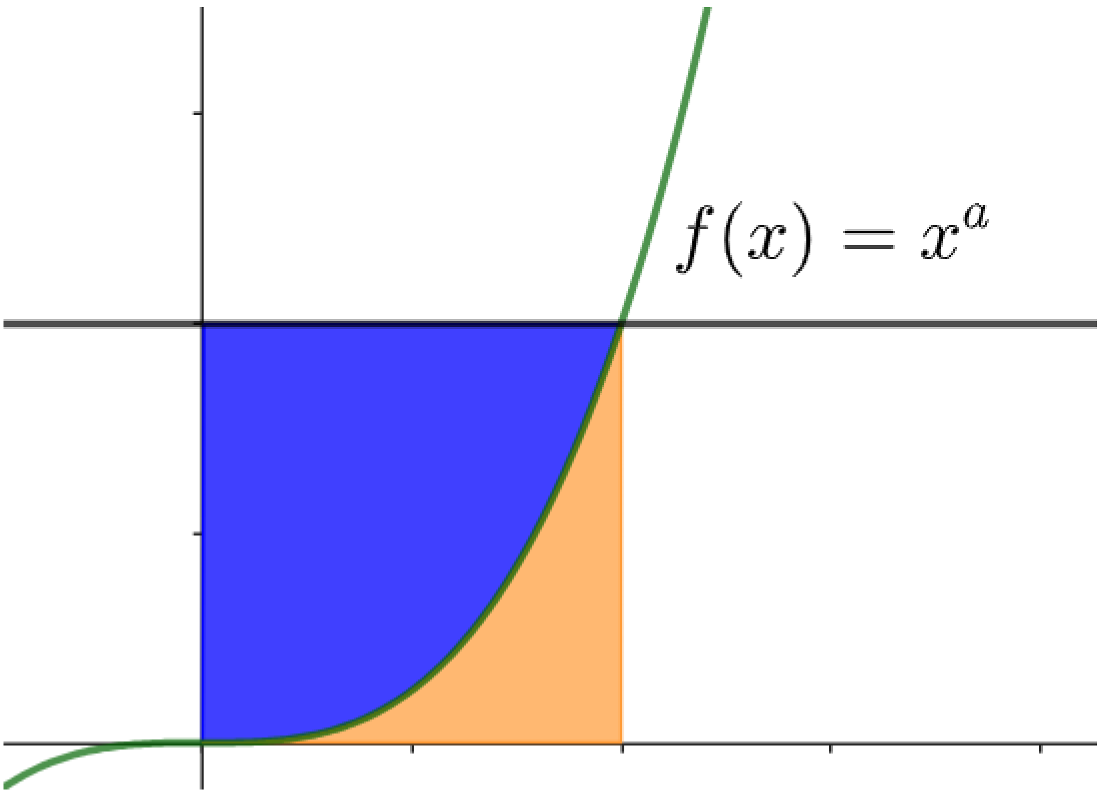


(0/0/3)

28. Visa att om man placerar en rektangel i en godtycklig rätvinklig triangel kommer den största möjliga rektangeln i triangeln alltid täcka $\frac{1}{2}$ av triangeln area. **Tips:** Använd koordinatsystem

(0/0/3)

29. Nedan ser du två markerade areor. Den orange-markerade arean är arean under grafen till funktionen $f(x) = x^a$ där a är ett positivt heltal. Visa att den blåa arean alltid är a gånger större än den orangea arean.



(0/0/3)

Lösningsförslag övningsprov 2

1. a) $f(x)=2x^3+3x+4 \qquad f'(x)=6x^2+3$

b) $f(x)=e^x+e^{2x}+e \qquad f'(x)=e^x+2e^{2x}$

c) $g(x)=5^x+10 \qquad g'(x)=\ln 5\cdot 5^x$

d) $f(x)=\dfrac{e^{3x}}{e^x}= \qquad f'(x)=2e^{2x}$

$=e^{3x-x}=e^{2x}$

$g(x)=\dfrac{e^5\cdot e^{2x}}{e^{10}\cdot e^x-2e^x}= \qquad g'(x)=\dfrac{e^x\cdot e^5}{e^{10}-2}$

$=\dfrac{e^5\cdot e^{2x}}{e^x(e^{10}-2)}=\dfrac{e^{2x-x}\cdot e^5}{e^{10}-2}$

$=\dfrac{e^x\cdot e^5}{e^{10}-2}$

f) $f(x)=(a+b)e^{ax+bx} \qquad f'(x)=(a+b)^2e^{ax+bx}$

$=(a+b)e^{x(a+b)}$

2. a) $f(x)=3x^2-x+1 \qquad F(x)=x^3-\dfrac{x^2}{2}+x+C$

b) $f(x)=e^{3x} \qquad F(x)=\dfrac{e^{3x}}{3}+C$

c) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+10=x^{-2}+10 \qquad F(x)=\dfrac{-1}{x}+10x+C$

d) $f(x)=x\cdot\sqrt{x}=x\cdot x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{3}{2}} \qquad F(x)=\dfrac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}+C$

3. a) $\int_0^2 3x^2+1\,dx = \left[x^3+x\right]_0^2 = (2^3+2)-(0^3+0) = 10$

b) $\int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{e^2}{2} - \frac{e^{-2}}{2} = \frac{e^2-e^{-2}}{2}$

c) $\int_0^3 \frac{3}{e^{2x}}\,dx = \int_0^3 3e^{-2x}\,dx = \left[\frac{-3e^{-2x}}{2}\right]_0^3 = \frac{-3e^{-6}}{2} - \left(\frac{-3e^0}{2}\right) = \frac{-3e^{-6}+3}{2}$

d) $\int_0^1 \frac{e^x+xe^{x+1}}{1+xe}\,dx = \int_0^1 \frac{e^x+xee^x}{1+ex}\,dx = \int_0^1 \frac{e^x(1+xe)}{1+xe}\,dx = \int_0^1 e^x\,dx$

$= \left[e^x\right]_0^1 = e-1$

4. a) $\ln(a+4)-\ln 4 = \ln 2$

$\ln\left(\frac{a+4}{4}\right) = \ln 2$

$\frac{a+4}{4} = 2$

$a+4 = 8$

$a = 4$

b) $f(x) = 2e^{ax}$ $\quad f'(x) = 2ae^{ax}$

$f'(0) = 8$ $\quad 2ae^0 = 8$

$2a = 8$

$a = 4$

c) $e^{2a}+10 = 15$

$e^{2a} = 5$

$\ln e^{2a} = \ln 5$

$2a = \ln 5$

$a = \frac{\ln 5}{2}$

d) $\int_{-1}^{a} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{a} = \frac{a^3}{3} - \left(\frac{-1^3}{3}\right) = 3$

$\frac{a^3}{3}+\frac{1}{3} = 3$

$\frac{a^3+1}{3} = 3$

$a^3+1 = 9$

$a^3 = 8$

$a = 2$

4. e) $f(x) = \frac{a}{x} = ax^{-1}$ $f'(x) = -ax^{-2}$ $f''(x) = 2ax^{-3}$

$f''(x) = \frac{2a}{x^3}$

$f''(1) = 8$

$\frac{2a}{1^3} = 8$

$a = 4$

f) $f(x) = e^{\frac{x}{10}} + ax$

Undersök derivatan!

$f'(x) = \frac{e^{\frac{x}{10}}}{10} + a$

$f'(0) = 0$ eftersom det ska vara en extrempunkt där!

$f'(0) = 0$

$\frac{e^0}{10} + a = 0$ $a = \frac{-1}{10}$

5. Använd geogebras deriveringskommando!

a) $f'(0) = 0$

b) $f'(0) = 1$

c) $f'(0) = 1$

6. a) $f(x) = x^3 - 12x + 10$

$f'(x) = 3x^2 - 12$

$f'(x) = 0$ $3x^2 - 12 = 0$

$3x^2 = 12$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

Svar: Då $x = \pm 2$

b) Undersök andraderivatan eller teckentabell!

$f''(x) = 6x$ $f''(2) = 12$ minimipunkt eftersom $f''(x) > 0$

$f''(-2) = -12$ maximipunkt!

7. a) $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$ $\quad f'(x) = x^2 + 2x + 1$

$f'(x) = 0$ Undersök derivatan innan och efter!

$x^2 + 2x + 1 = 0$ $\quad f'(-2) = 4 - 4 + 1 = 1$ Positiv

$x = -1 \pm \sqrt{1-1}$ $\quad f'(0) = 0 + 0 + 1 = 1$ Positiv

$= -1 \pm 0$ Terrasspunkt då $x = -1$

$x = -1$

8. a) D och F b) B och E c) A och C

9. a) $\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1$ Svar: $e-1$ a.e

b) Arean mellan grafer: $\int f(x)dx - \int g(x)dx$

$\int_0^1 3 - x^2 dx - \int_0^1 2x\, dx = \left[3x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \left[x^2\right]_0^1 = 3 - \frac{1}{3} - (0 - 0) - (1 - 0)$

$= 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ Svar: $\frac{5}{3}$ a.e

10. $f(x) = x^3 + 0{,}45^3 x + 100000$

$f'(x) = 3x^2 + 0{,}45^3$ $\quad f'(x) = 0$

$3x^2 + 0{,}45^3 = 0$

$3x^2 = -0{,}45^3$

$x^2 = \frac{-0{,}45^3}{3}$

$x = \pm\sqrt{\frac{-0{,}45^3}{3}}$ saknar reella lösningar! Ingen extrempunkter $\square$

11. Volymen beskrivs av: $V(x) = (12-2x)^2 \cdot x$

$= (144 - 48x + 4x^2)x = 144x - 48x^2 + 4x^3$

Undersök extrempunkt!

$V'(x) = 144 - 96x + 12x^2 \quad V'(x) = 0$

$144 - 96x + 12x^2 = 0$

$12 - 8x + x^2 = 0$

$x = 4 \pm \sqrt{16-12}$

$= 4 \pm \sqrt{4}$

$= 4 \pm 2$

$x_1 = 6$

$x_2 = 2$

Verifiera! Andraderivata!

$V''(x) = -96 + 24x$

$V''(2) = -96 + 48 = -48$ maximipunkt

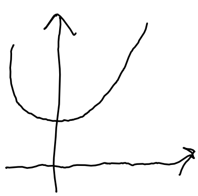
$V''(6) = -96 + 24 \cdot 6 > 0$ minimipunkt!

Basen ska vara: $12 - 2 \cdot 2 = 8$ l.e

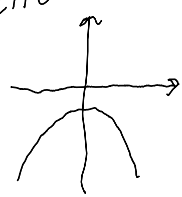
Höjden ska vara 2 l.e

Total volym: $V(2) = 144 - 96 + 16 = 64$ V.e

12. Typ



eller



13. $\ln(x+2) = \sqrt{2}$

$x + 2 = e^{\sqrt{2}}$

$x = e^{\sqrt{2}} - 2 \approx 2,113$

14. $f''(x) = x$

$f'(x) = \frac{x^2}{2} + C$

$f(x) = \frac{x^3}{6} + Cx + D$

$f'(1) = 2$

$\frac{1}{2} + C = 2$

$C = \frac{3}{2}$

$f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{2} + D$

$f(1) = 3$

$\frac{1}{6} + \frac{3}{2} + D = 3$

$\frac{10}{6} + D = 3$

$D = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

Svar: $f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{2} + \frac{4}{3}$

15 $\int_a^b -x^2\,dx = \left[\frac{-x^3}{3}\right]_a^b = \frac{-b^3}{3} - \left(-\frac{a^3}{3}\right) = \frac{-b^3}{3} + \frac{a^3}{3}$

$a<b$ Eftersom $a<b$ blir $\frac{b^3}{3}$ alltid större än $\frac{a^3}{3}$ det resulterar i att $-\frac{b^3}{3} + \frac{a^3}{3}$ blir <0 $\square$

16. $f(x) = \frac{x^3}{3} - ex^2 + e^2x$

$f'(x) = x^2 - 2ex + e^2$ kom ihåg att e är ett tal!

undersök extrempunkter: $f'(x)=0$

$x^2 - 2ex + e^2 = 0$

$x = e \pm \sqrt{e^2 - e^2}$

$= e \pm \sqrt{0}$

$x = e$ extrempunkt i $x = e$

undersök derivatan innan och efter extrempunkten

$f'(0) = 0 - 0 + e^2$ positiv

$f'(2e) = 4e^2 - 4e^2 + e^2$ positivt

funktionen har en terasspunkt vid $x=e$ och är växande innan och efter $f(x)$ är aldrig avtagande

$\square$

17. $S(t) = 50t - e^{-\frac{t}{5}} + 5$

Vi är intresserad av en hastighet sök derivatan

$S'(t) = 50 + \frac{e^{-\frac{t}{5}}}{5}$

Vad händer med $S'(t)$ över tid då $t \to \infty$

$\lim_{t\to\infty} 50 + \frac{e^{-\frac{t}{5}}}{5} = \lim_{t\to\infty} 50 + \frac{1}{5e^{\frac{t}{5}}}$

termen $\frac{1}{5e^{\frac{t}{5}}}$ kommer försummas då $t \to \infty$

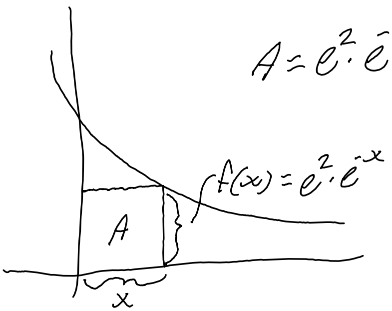
Svar: Hastigheten närmar sig 50 m/s

18. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(9+h)^{\frac{1}{2}} - 9^{\frac{1}{2}}}{h}$ Derivatans definition för funktionen $f(x)=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ i $x=9$

$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ $f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(9)=\frac{1}{2\sqrt{9}}=\frac{1}{6}$ $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(9+h)^{\frac{1}{2}} - 9^{\frac{1}{2}}}{h}=\frac{1}{6}$

19.



$A=e^2\cdot e^{-x}\cdot x$ När är A som störst?

Jobb för geogebra

Jag skriver in $f(x)=e^2 e^{-x}\cdot x$ i geogebra och undersöker dess maximipunkt. Den uppkommer då $x=1$

$A(1)=e^2\cdot e^{-1}\cdot 1=e^1=e$

vilket visar att den maximala arean är e a.e

$\square$

20. $S(t)=\frac{A}{9e^{-0,0564t}+3}+2e^{-0,0021t}$

Över tid ska alla smittas

$\lim\limits_{t\to\infty} S(t)=6000$

$\lim\limits_{t\to\infty} \frac{A}{9e^{-0,0564t}+3}+2e^{-0,0021t}=6000$

$9e^{-0,0564t}$ och $2e^{-0,0021t}$ försummas då $t\to\infty$

$\frac{A}{3}=6000$

$A=18000$ Svar: $A=18000$

21. $f(x)=e^{-0,054x}+0,73$ f(x) är en hastighet

Vi vill veta en mängd

$$F(x)=\frac{e^{-0,054x}}{-0,054}+0,73x+C$$

x är nu mil och F(x) är liter

$F(0)=0$

Eftersom man inte förbrukat något efter 0 mil

$$\frac{1}{-0,054}+0+C=0$$

$C=18,518$ $\quad F(x)=\frac{e^{-0,054}}{-0,054}+0,73x+18,518$

$F(x)=50$

$$50=\frac{e^{-0,054x}}{-0,054}+0,73x+18,518$$

den ekvationen löser vi med geogebra!

$x=45,32$

Svar: Han kan färdas 45,32 mil innan tanken är slut.

22. a) $\int_a^c f(x)\,dx=[F(x)]_a^c=F(c)-F(a)$

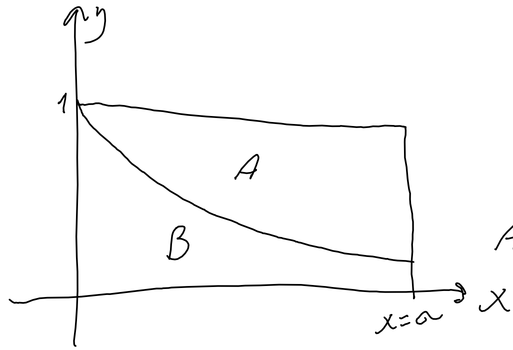
$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=[F(x)]_a^b+[F(x)]_b^c=F(b)-F(a)+F(c)-F(b)$$

$$=-F(a)+F(c)=F(c)-F(a)$$

b) $\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

$$-\int_b^a f(x)\,dx=-[F(x)]_b^a=-(F(a)-F(b))=-F(a)+F(b)=F(b)-F(a)$$

23.



$B = \int_0^a e^{-x}\,dx$ Arean av hela rektangeln

$A = a - \int_0^a e^{-x}\,dx$

$B = A$

$\int_0^a e^{-x}\,dx = a - \int_0^a e^{-x}\,dx$

$\int_0^a e^{-x}\,dx \left[-e^{-x}\right]_0^a = -e^{-a}+1$

$-e^{-a}+1 = a + e^{-a} - 1$

$2e^{-a}+a-2=0$ ← Lös med geogebra

$(a=0)$ eller $a=1{,}59$ koordinaten: $(1{,}59;1)$

24. a) $\frac{1}{e^{2x}-10e^{x}}$ odef. då nämnaren $=0$

$e^{2x}-10e^{x}=0$

$\underbrace{e^{x}}_{\text{aldrig noll}}\underbrace{(e^{x}-10)}_{=0}=0$

$e^{x}=10$

$x=\ln 10$

b) $\frac{1}{e^{2x}-4e^{x}+4}$ odef. då nämnaren $=0$

$e^{2a}-4e^{x}+4=0$

farligt likt en kvadrering!

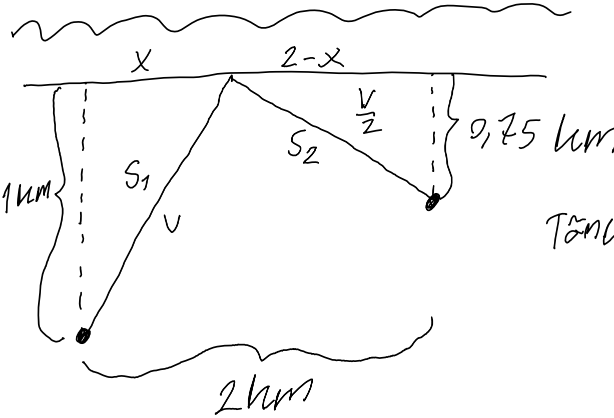
$e^{2x}-4e^{x}+4=0$

$(e^{x}-2)^2=0$

$e^{x}-2=0$

$x=\ln 2$

25.



Tänk trianglar

$S_1 = \sqrt{1 + x^2}$ Pythagoras

$S_2 = \sqrt{0{,}75^2 + (2-x)^2}$

$t_1 = \frac{S_1}{V}$

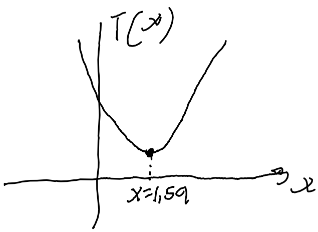
$t_2 = \frac{S_2}{\frac{V}{2}} = \frac{2S_2}{V}$

Total tid: $\frac{S_1}{V} + \frac{2S_2}{V}$

$T(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{V} + \frac{2\sqrt{0{,}75+(2-x)^2}}{V}$

Vi vill minimera detta och eftersom V är en konstant är täljaren det som är intressant

Jag skriver in funktionen i geogebra och funktionen visar en minimipunkt då $x=1{,}59$



Svar: Utifrån skissen ska han gå 1,59 km längst med vattnet för att minimera tiden

26. $f(x) = ax^6$ den räta linjen $y = 12x - 20$

tangerar $f(x)$ i något x-värde

$f'(x) = 6ax^5$

x-värdet den tangerar i

$f'(h) = 12$

$12 = 6ah^5$

$a = \frac{2}{h^5}$

funktionerna ska vara samma i $x = h$

$12h - 20 = ah^6$

$12h - 20 = \frac{2}{h^5} \cdot h^6 = 2h$

$12h - 20 = 2h$

$10h = 20$

$h = 2$

$a = \frac{2}{2^5} = \frac{1}{16}$ Svar: $a = \frac{1}{16}$

27. Volymen är $2a \cdot a \cdot b = 36$

$2a^2 \cdot b = 36$

$b = \frac{36}{2a^2} = \frac{18}{a^2}$

Arean: $2a^2 + ab + ab + 2ab + 2ab = 2a^2 + 2ab + 4ab = 2a^2 + 6ab$

$= 2a^2 + \frac{6 \cdot a \cdot 18}{a^2} = 2a^2 + \frac{108}{a} = 2a^2 + 108a^{-1}$

$A(a) = 2a^2 + 108a^{-1}$

$A'(a) = 4a - 108a^{-2}$

$A'(a) = 0$

$4a - \frac{108}{a^2} = 0$

$4a = \frac{108}{a^2}$

$4a^3 = 108$

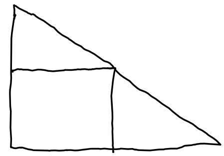
$a^3 = 27$

$a = 3$

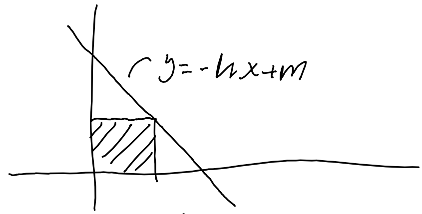
$b = \frac{18}{3^2} = 2$

Svar: $a = 3$ och $b = 2$

28. Vi vill undersöka att den största arean för en rektangel i en rätvinklig triangel alltid utgör $\frac{1}{2}$ av den totala arean



Använd koordinatsystem



Arean för rektangeln: $x\cdot(-kx+m)$

$A(x)=-kx^2+xm$

Sök extrempunkt

$A'(x)=-2kx+m$

$A'(x)=0 \quad -2kx+m=0$

$-2kx=-m$

$x=\frac{m}{2k}$

Area då $x=\frac{m}{2k}$

$-k\cdot\frac{m^2}{4k^2}+\frac{m^2}{2k}=\frac{-m^2}{4k}+\frac{m^2}{2k}=\frac{m^2}{4k}$

Arean för den rätvinkliga triangeln

$\frac{b\cdot h}{2}$ $h=m$ b ges av lösningen till

$0=-kx+m$

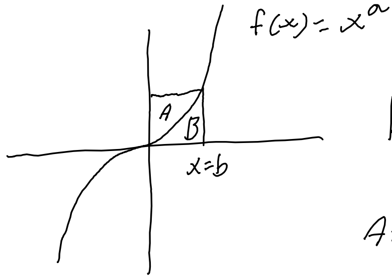
$x=\frac{m}{k}$ $\quad \frac{b\cdot h}{2}=\frac{\frac{m}{k}\cdot m}{2}=\frac{m^2}{2k}$

$\frac{m^2}{2k}$ är dubbelt så stort som $\frac{m^2}{4k}$ eftersom $\frac{m^2}{4k}=$

$=\frac{m^2}{2k}\cdot\frac{1}{2}$

$\square$

29.



$$B=\int_0^b x^a\,dx=\left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_0^b=\frac{b^{a+1}}{a+1}$$

$$A=b\cdot b^a-\int_0^b x^a\,dx=b^{a+1}-\frac{b^{a+1}}{a+1}$$

$$=\frac{(a+1)(b^{a+1})}{a+1}-\frac{b^{a+1}}{a+1}=\frac{ab^{a+1}+b^{a+1}-b^{a+1}}{a+1}$$

$$=\frac{ab^{a+1}}{a+1}=a\cdot\frac{b^{a+1}}{a+1}$$

A är alltså a större än b

$\square$