

<b>Del B</b>	Uppgift 1-11. Endast svar krävs.
<b>Del C</b>	Uppgift 12-16. Fullständiga lösningar krävs.
<b>Provtid</b>	120 minuter för Del B och Del C tillsammans.
<b>Hjälpmedel</b>	Formelblad och linjal.

**Kravgränser** Provet består av ett muntligt delprov (Del A) och tre skriftliga delprov (Del B, Del C och Del D). Tillsammans kan de ge 66 poäng varav 25 E-, 24 C- och 17 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget

E: 19 poäng

D: 28 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå

C: 36 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå

B: 45 poäng varav 5 poäng på A-nivå

A: 52 poäng varav 9 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där "*Endast svar krävs*" behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

**Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.**

Namn: \_\_\_\_\_

Födelsedatum: \_\_\_\_\_

Gymnasieprogram/Komvux: \_\_\_\_\_

**Del B:** Digitala verktyg är inte tillåtna. *Endast svar krävs.* Skriv dina svar direkt i provhäftet.

1. Bestäm *alla* primitiva funktioner till  $f(x) = x^2$  \_\_\_\_\_ (1/0/0)

2. Förenkla så långt som möjligt

a)  $\frac{3x + 24}{2x + 16}$  \_\_\_\_\_ (1/0/0)

b)  $x(x^8 + 2) + 2x^9 - 2x$  \_\_\_\_\_ (1/0/0)

3. Vilket av alternativen A-E är korrekt?

A.  $|3| = -3$

B.  $|-3| = 3$

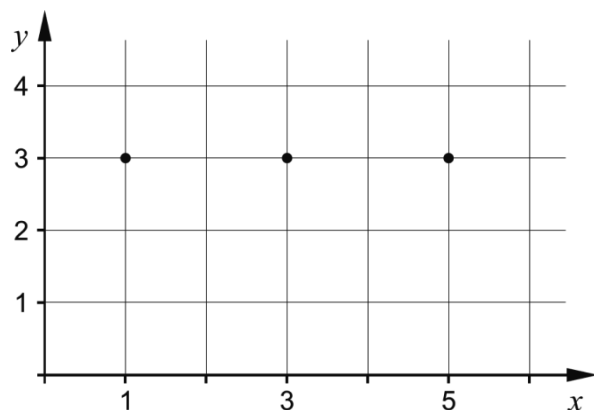
C.  $|-3| = -3$

D.  $-|3| = 3$

E.  $-|-3| = 3$  \_\_\_\_\_ (1/0/0)

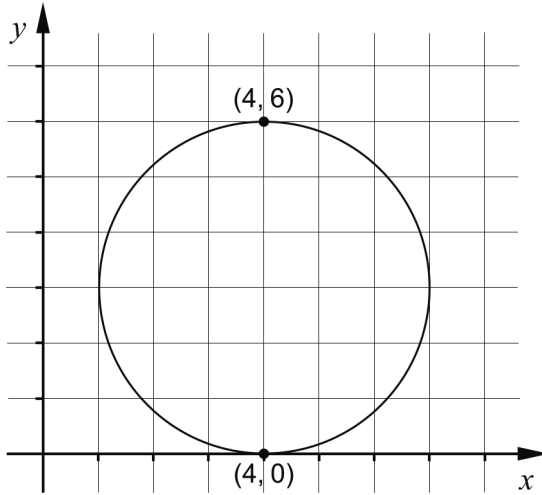
4. Funktionen  $f$  är kontinuerlig. Rita i koordinatsystemet nedan en skiss som visar hur grafen till  $f$  kan se ut om det gäller att:

- Grafen går genom de markerade punkterna  $(1, 3)$ ,  $(3, 3)$  och  $(5, 3)$
- $f'(1) > 0$
- $f'(3) < 0$
- $f'(5) > 0$



(1/0/0)

5. I figuren visas en cirkel som tangerar  $x$ -axeln i punkten  $(4, 0)$ .  
Punkten  $(4, 6)$  ligger på cirkeln. Ange cirkelns ekvation.



\_\_\_\_\_ (1/0/0)

6. Bestäm  $f'(x)$

a)  $f(x) = 3x^4 - 7x + 5$

\_\_\_\_\_ (1/0/0)

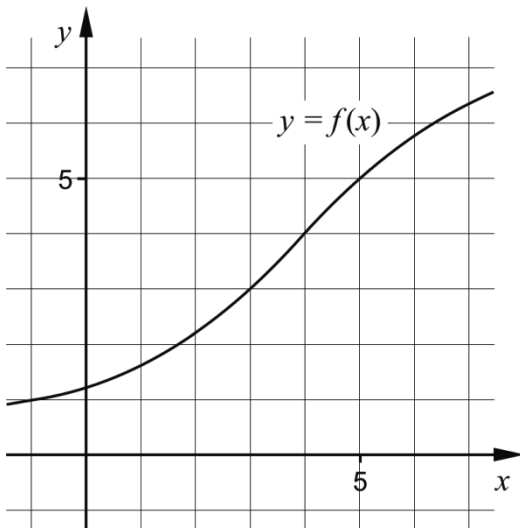
b)  $f(x) = x^k + k$

\_\_\_\_\_ (0/1/0)

c)  $f(x) = \frac{x + 5x^2}{x}$

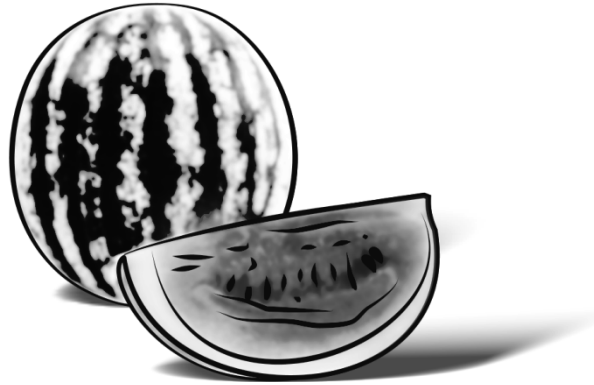
\_\_\_\_\_ (0/1/0)

7. Figuren visar grafen till funktionen  $f$ . Bestäm ett närmevärde till  $\int_0^5 f(x)dx - \int_0^3 f(x)dx$



\_\_\_\_\_ (0/1/0)

8. Funktionen  $f$  beskriver hur en växande vattenmelons vikt  $y$  beror av tiden  $t$ , det vill säga  $y = f(t)$ . Vikten  $y$  anges i hg (hektogram) och tiden  $t$  i veckor.



Vad får du veta genom att bestämma  $f'(3)$ ?

Välj ett av alternativen A-E. \_\_\_\_\_ (0/1/0)

- A. Den vikt i hg som vattenmelonen har vid tiden 3 veckor.
- B. Vattenmelonens viktökning i hg under 3 veckor.
- C. Vattenmelonens genomsnittliga viktökning i hg/vecka under 3 veckor.
- D. Den tid det tar för vattenmelonens vikt att öka till 3 hg.
- E. Vattenmelonens viktökning i hg/vecka vid tiden 3 veckor.

9. a) Ge ett exempel på en polynomfunktion  $f$  av fjärde graden för vilken det gäller att  $f(1) = 4$

\_\_\_\_\_ (0/1/0)

- b) Det finns flera rationella uttryck som uppfyller följande villkor:

- Uttrycket får värdet 0 då  $x = -1$
- Uttrycket är inte definierat för  $x = 3$
- Uttrycket är inte definierat för  $x = -4$

Ge ett exempel på ett rationellt uttryck som uppfyller alla tre villkor.

\_\_\_\_\_ (0/1/1)



10. I en sjö planterar man in fiskar av en art som inte funnits där tidigare. Fiskpopulationen kan beskrivas med sambandet

$$N(t) = \frac{15000}{3 + 2e^{-0,5t}} \quad \text{där } N \text{ är antalet fiskar och } t \text{ är tiden i år efter inplanteringen.}$$



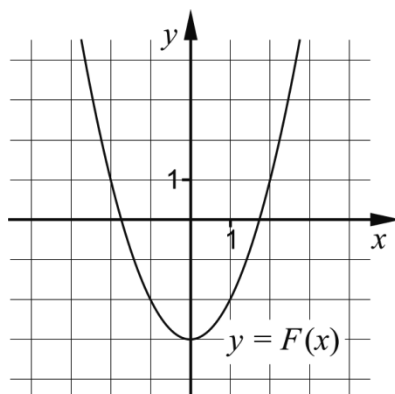
- a) Hur många fiskar planterades in i sjön från början?

\_\_\_\_\_ (0/1/0)

- b) På grund av olika miljöfaktorer kan antalet fiskar inte bli hur stort som helst. Bestäm den övre gränsen för antalet fiskar med hjälp av sambandet.

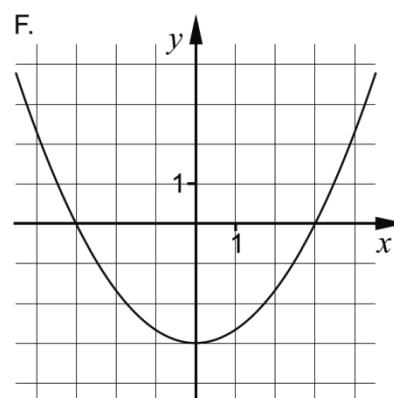
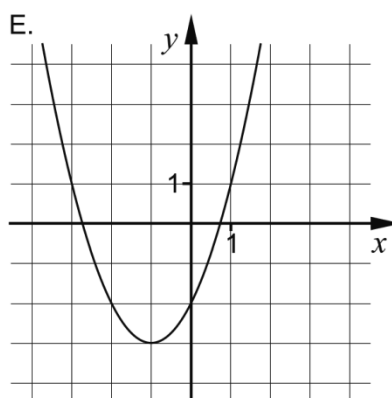
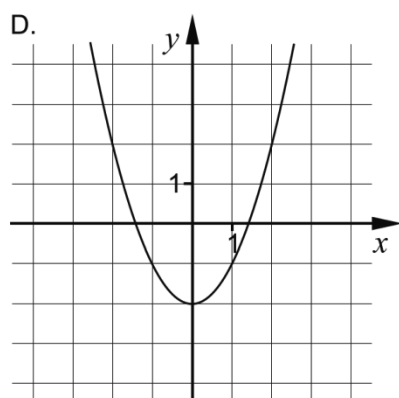
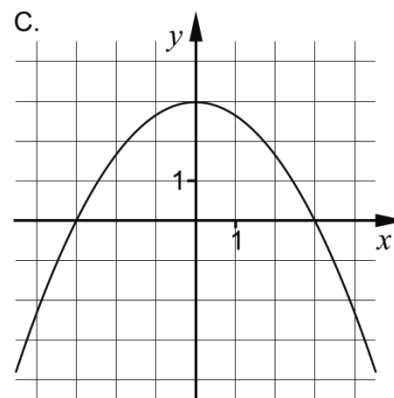
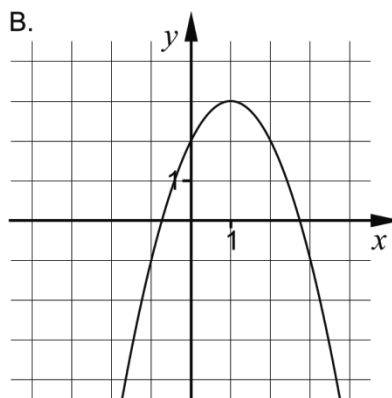
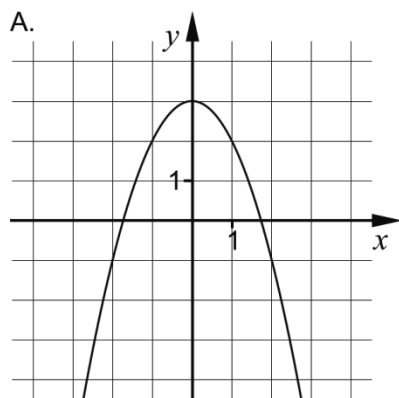
\_\_\_\_\_ (0/0/1)

11. Funktionen  $f$  har en primitiv funktion  $F$ . Grafen till  $F$  visas i figuren nedan.



a) Vilken av graferna A-F visar en annan primitiv funktion till  $f$ ?

\_\_\_\_\_ (0/1/0)



En annan funktion  $g$  har en primitiv funktion  $G$ . En av graferna A-F visar den primitiva funktionen  $G$ .

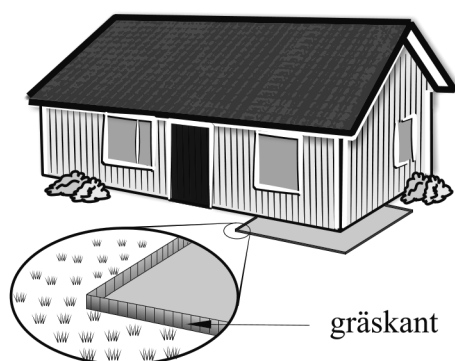
b) Vilken av graferna A-F visar  $G$  om  $\int_0^1 g(x)dx = 3$ ?

\_\_\_\_\_ (0/0/1)

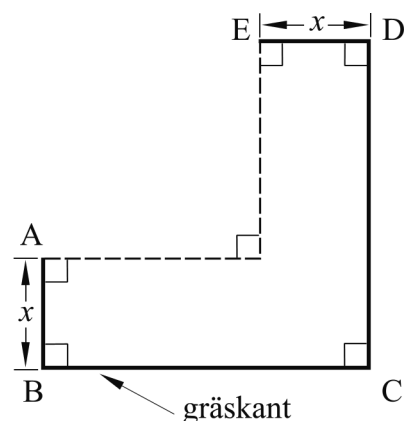
**Del C:** Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

12. Beräkna  $\int_1^2 3x^2 dx$  algebraiskt. (2/0/0)

13. En trädgårdsmästare ska göra en blomrabatt runt hörnet på ett hus. Längs sidorna som inte angränsar mot huset kommer hon att sätta gräskant, se figur 1. Hon vill utforma rabatten så att sidorna BC och CD är lika långa, se figur 2.



figur 1



figur 2

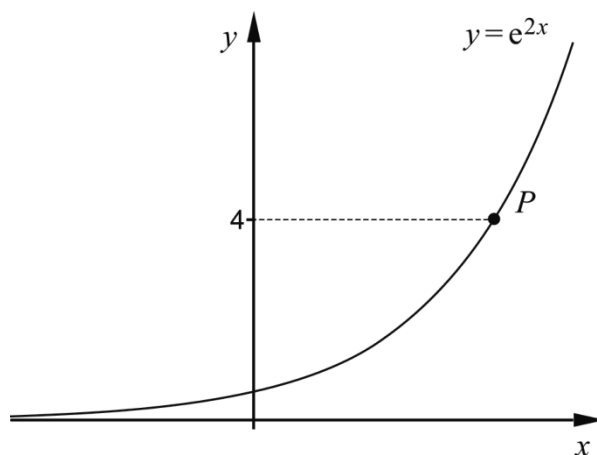
I trädgårdsmästarens förråd finns en rulle med 6 m gräskant och hon tänker använda hela rullen. Arealen för blomrabatten blir då

$$A(x) = 6x - 3x^2$$

där  $x$  är blomrabattens bredd i meter, se figur 2.

- Trädgårdsmästaren vill att blomrabatten ska ha så stor area som möjligt. Beräkna med hjälp av derivata bredden  $x$  så att arean blir maximal. (2/0/0)
  - Vilka värden kan arean  $A$  anta i detta sammanhang? (1/2/0)
  - Visa att arean för blomrabatten i figur 2 kan beskrivas av  $A(x) = 6x - 3x^2$  om trädgårdsmästaren använder 6 m gräskant. (0/1/2)
14. Beräkna  $\frac{(x+8)^6 - (x+8)^5}{(x+8)^5}$  då  $x = 2,7$   
Svara exakt. (0/2/0)

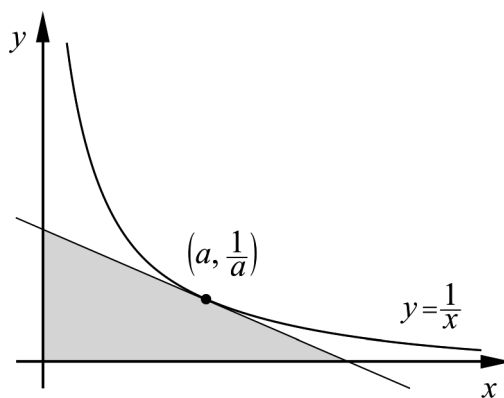
15. Kurvan  $y = e^{2x}$  är ritad i figuren nedan. Punkten  $P$  har  $y$ -koordinaten 4



Bestäm kurvans lutning i punkten  $P$ .  
Svara exakt och på så enkel form som möjligt.

(0/3/0)

16. Bevisa att den triangel som innesluts av de positiva koordinataxlarna och en tangent till kurvan  $y = \frac{1}{x}$  har arean 2 areaenheter oavsett var tangenten tangerar kurvan.



Utgå från att tangeringspunkten har koordinaterna  $\left(a, \frac{1}{a}\right)$

(0/1/3)

<b>Del D</b>	Uppgift 17-24. Fullständiga lösningar krävs.
<b>Provtid</b>	120 minuter.
<b>Hjälpmedel</b>	Digitala verktyg, formelblad och linjal.

**Kravgränser** Provet består av ett muntligt delprov (Del A) och tre skriftliga delprov (Del B, Del C och Del D). Tillsammans kan de ge 66 poäng varav 25 E-, 24 C- och 17 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget

E: 19 poäng

D: 28 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå

C: 36 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå

B: 45 poäng varav 5 poäng på A-nivå

A: 52 poäng varav 9 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där "*Endast svar krävs*" behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

**Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.**

Namn: \_\_\_\_\_

Födelsedatum: \_\_\_\_\_

Gymnasieprogram/Komvux: \_\_\_\_\_

**Del D:** Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

17. Nyfödda barn minskar normalt i vikt under de första dygnen, därefter ökar vikten. Efter tre dygn är vikten som lägst.



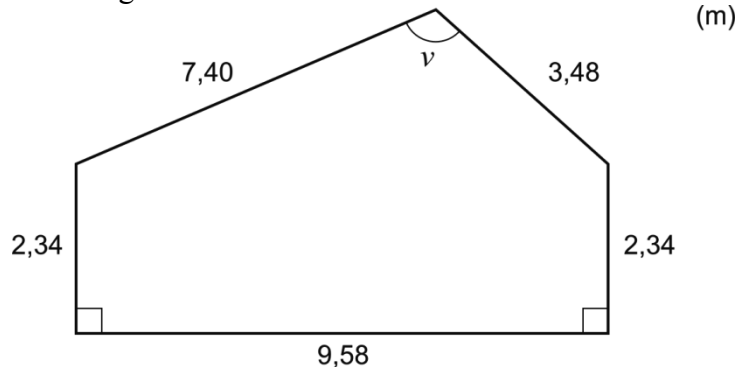
Enligt en förenklad modell kan vikten för ett nyfött barn beskrivas med

$$V(t) = 5t^3 - 135t + 3500$$

där  $V$  är vikten i gram och  $t$  är tiden i dygn efter födseln.

- a) Hur mycket minskar ett barn i genomsnitt i vikt per dygn under de tre första dygnen? (2/0/0)
- b) Utvärdera hur väl modellen stämmer överens med verkligheten när barnet är några veckor gammalt. (2/0/0)
18. För funktionen  $f$  gäller att  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$  och att  $f$  är definierad i intervallet  $0 \leq x \leq 4$ . Bestäm funktionens minsta och största värde. (2/0/0)
19. För en funktion  $f$  där  $y = f(x)$  gäller att  $f(3) = 4$  och  $f'(3) = 2,4$ . Lotta tänker en stund och påstår:  
*–Om det är en rät linje måste  $f(100)$  vara exakt 244*  
 Undersök om Lottas påstående är korrekt. (2/0/0)

20. Beräkna vinkeln  $v$  i figuren. (2/0/0)

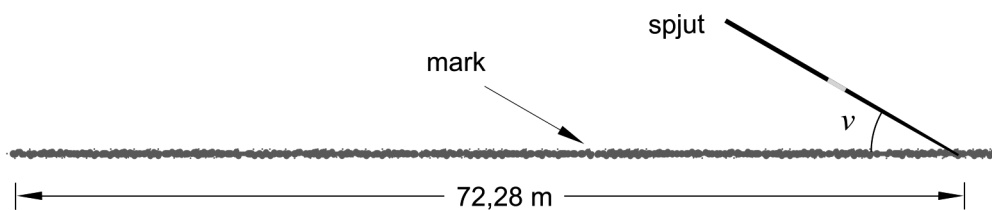


21. Världsrekordet för damer i spjutkastning är 72,28 m och sattes i Stuttgart 2008 av Barbora Špotáková från Tjeckien.



Kastlängden mäts till den punkt där spjutspetsen tar mark. Det finns en regel som säger att kastplanen kan få luta lite (uppåt eller nedåt) men då får lutningen som högst vara 1:1000 i kastriktningen. Det betyder att på 1000 m är höjdskillnaden 1 m.

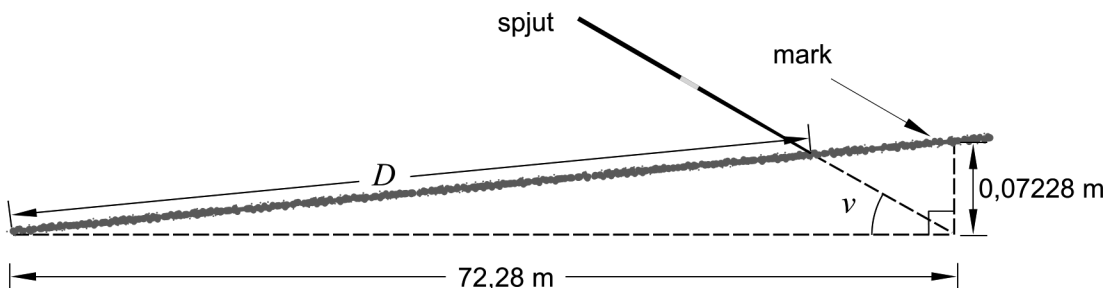
Antag att Špotákovás världsrekord på 72,28 m gjordes på en kastbana utan lutning och att spjutet bildade vinkeln  $\nu = 30,0^\circ$  mot marken vid nedslaget. Se figur 1.



figur 1

När kastplanen lutar uppåt blir kastlängden lite kortare. Vilken kastlängd  $D$  hade Špotákovás kast fått på en bana med maximalt tillåten lutning uppåt? Se figur 2.

Svara i meter med två decimaler.

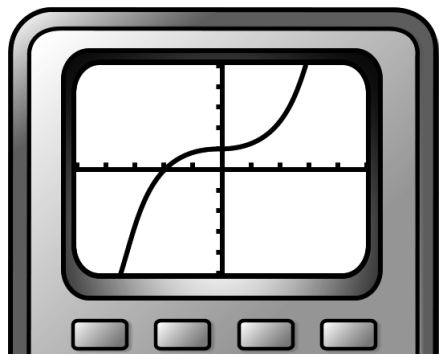


figur 2

(0/4/0)

22. Peder ritat upp grafen till  $f(x) = x^3 + 0,03x + 1$  på sin grafritande räknare och säger:

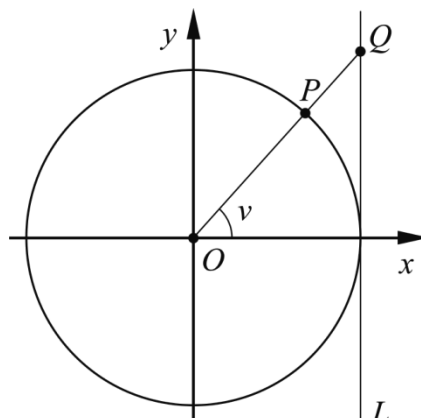
–Jag ser att grafen har en terrasspunkt.



Undersök om han har rätt.

(0/2/0)

23. I figuren nedan visas en enhetscirkel som tangeras av en linje  $L$  som är parallell med  $y$ -axeln. För vinkeln  $v$  gäller att  $0^\circ < v < 90^\circ$ . Punkterna  $O$ ,  $P$  och  $Q$  ligger på samma linje. Punkten  $Q$  har  $y$ -koordinaten  $t$ .



Bestäm  $\cos v$  uttryckt i  $t$

(0/0/3)

24.  $S$  är en kontinuerlig funktion som är definierad för alla  $x$ . Bestäm  $S'(4)$  då  $S(x+h) = S(x) + h$

(0/0/3)



### **Till eleven - Information inför det muntliga delprovet**

Du kommer att få en uppgift som du ska lösa skriftligt och sedan ska du presentera din lösning muntligt. Om du behöver får du ta hjälp av dina klasskamrater och din lärare när du löser uppgiften. Din muntliga redovisning börjar med att du presenterar vad uppgiften handlar om och sedan får du beskriva och förklara din lösning. Du ska redovisa alla steg i din lösning. Däremot, om du har gjort samma beräkning flera gånger (till exempel i en värdetabell) så kan det räcka med att du redovisar några av beräkningarna. Din redovisning är tänkt att ta maximalt 5 minuter och ska göras för en mindre grupp klasskamrater och din lärare.

Den uppgift som du får ska i huvudsak lösas för hand, algebraiskt. Det kan hända att du behöver en miniräknare för att göra en del beräkningar men du ska inte hänvisa till grafritande och/eller symbolhanterande funktioner på räknaren (om du har en sådan typ av räknare) när du redovisar din lösning.

Vid bedömningen av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

#### *Hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är*

Din redovisning ska innehålla de delar som behövs för att dina tankar ska gå att följa och förstå. Det du säger bör komma i lämplig ordning och inte innehålla någonting onödigt. Den som lyssnar ska förstå hur beräkningar, beskrivningar, förklaringar och slutsatser hänger ihop med varandra.

#### *Hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning*

Din redovisning bör innehålla både beskrivningar och förklaringar. Man kan enkelt säga att en beskrivning svarar på frågan *hur* och en förklaring svarar på frågan *varför*. Du beskriver något när du till exempel berättar *hur* du har gjort en beräkning. Du förklarar något när du motiverar *varför* du till exempel kunde använda en viss formel.

#### *Hur väl du använder den matematiska terminologin*

När du redovisar bör du använda ett språk som innehåller matematiska termer, uttryckssätt och symboler som är lämpliga utifrån den uppgift du har löst.

Matematiska termer är ord som till exempel ”exponent”, ”funktion” och ”graf”.

Ett exempel på ett matematiskt uttryckssätt är att  $x^2$  utläses ” $x$  upphöjt till 2” eller ” $x$  i kvadrat”.

Några exempel på matematiska symboler är  $\pi$  och  $f(x)$ , vilka utläses ”pi” och ” $f$  av  $x$ ”.

## Uppgift 1. Triangelvarianter

Namn: \_\_\_\_\_

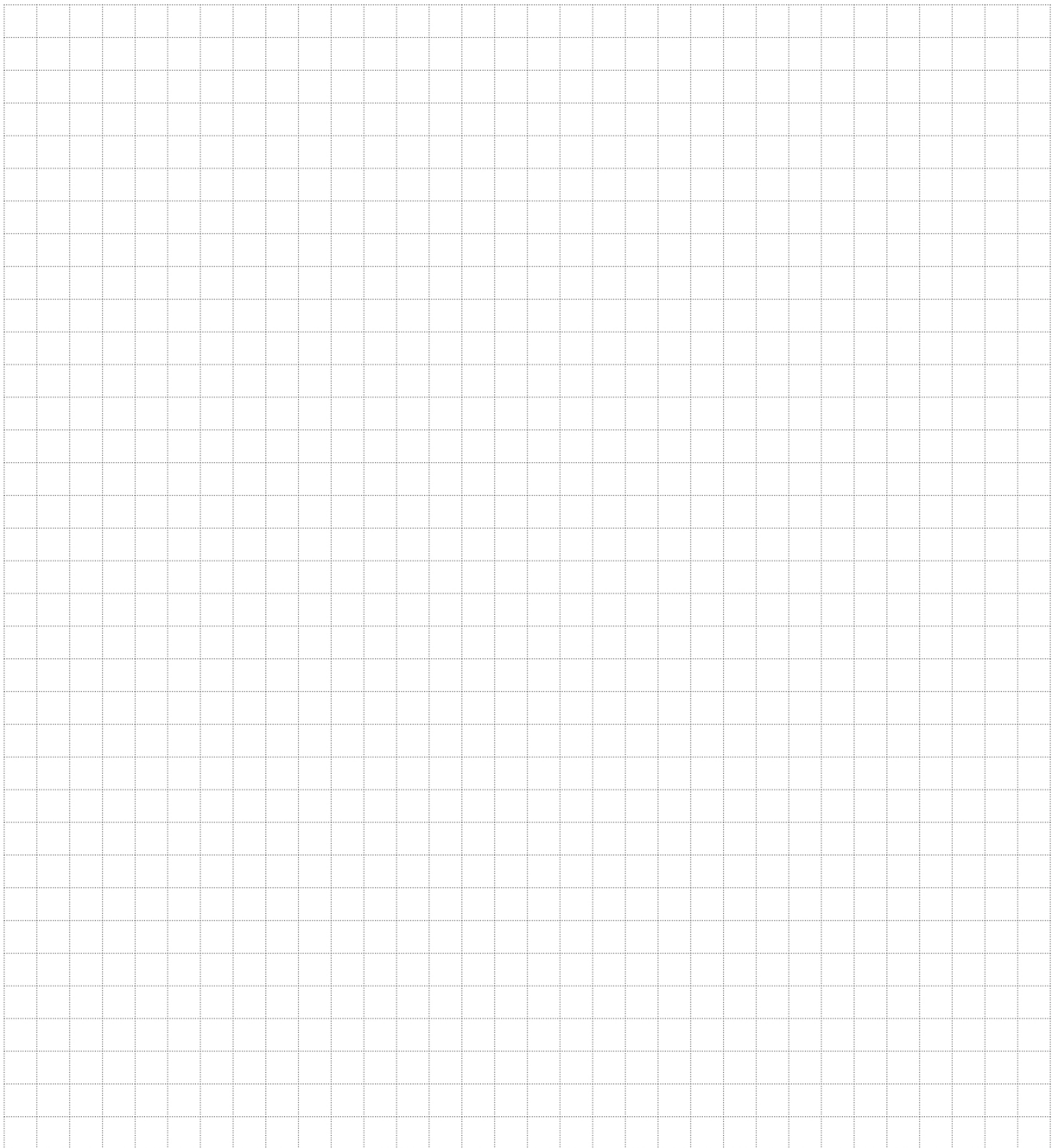
**Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:**

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

I triangeln  $ABC$  är vinkeln  $A = 35^\circ$ , sidan  $a = 5,4\text{ cm}$  och sidan  $b = 8,3\text{ cm}$ .

Triangeln  $ABC$  kan se ut på två olika sätt.

Beräkna längden på den tredje sidan  $c$  så att triangeln  $ABC$  blir trubbvinklig.



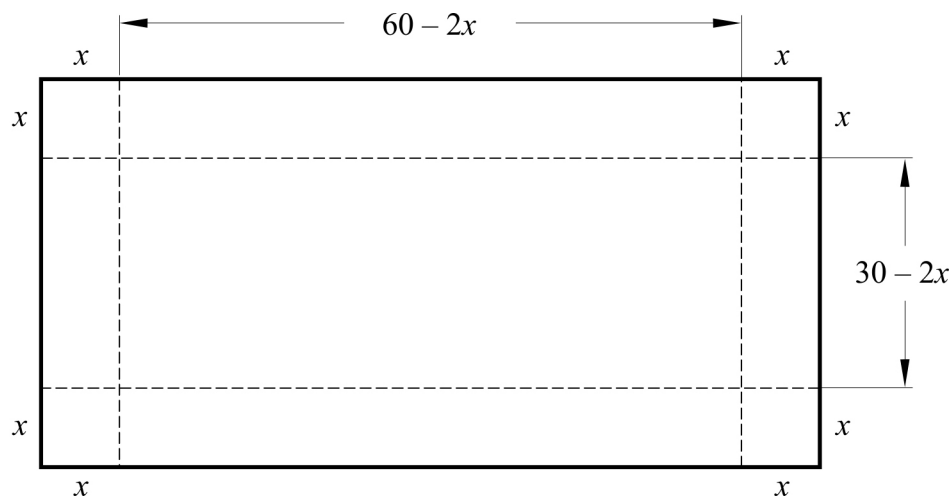
## Uppgift 2. Lådan

Namn: \_\_\_\_\_

**Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:**

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Jonas ska tillverka en låda utan lock av en rektangulär kartongbit med måtten  $60 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$ . Han ska klippa bort lika stora kvadrater i varje hörn och vika upp sidorna. I figuren har kvadraterna sidan  $x$ .



Hjälp Jonas att beräkna sidan  $x$  så att lådans volym blir så stor som möjligt.



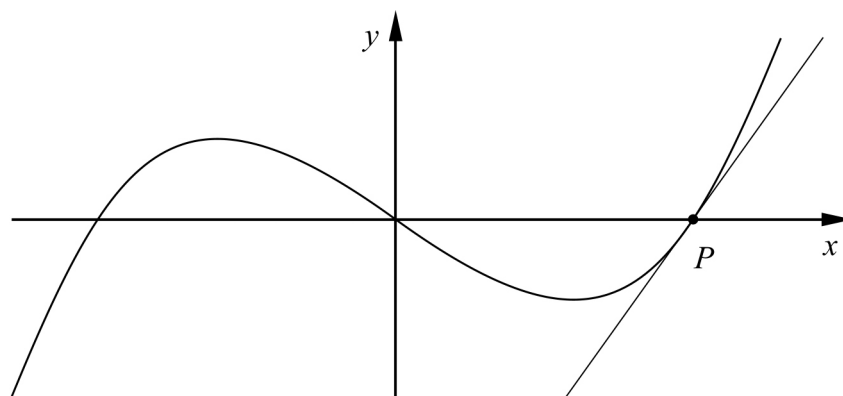
**Uppgift 3. Tangent**

Namn: \_\_\_\_\_

**Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:**

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Figuren nedan visar grafen till funktionen  $f(x) = x(x-3)(x+3)$  och en tangent vars tangeringspunkt  $P$  ligger i ett av funktionens nollställen.



- Bestäm funktionens nollställen.
- Bestäm tangentens ekvation.



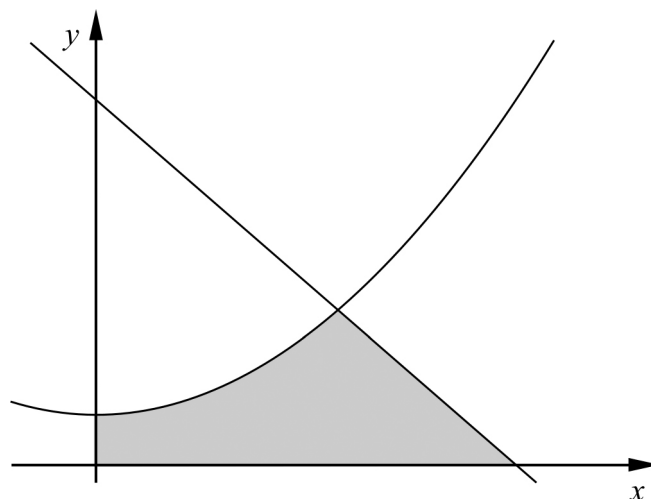
### Uppgift 4. Area

Namn: \_\_\_\_\_

**Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:**

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Ett område begränsas av koordinataxlarna, linjen  $y = 42 - 12x$  och kurvan  $y = 3x^2 + 6$



Beräkna områdets area.



**Bedömningsmatris för bedömning av muntlig kommunikativ förmåga**

<b>Kommunikativ förmåga</b>	<b>E</b>	<b>C</b>	<b>A</b>	<b>Max</b>
<p><b><i>Fullständighet, relevans och struktur</i></b></p> <p>Hur fullständig, relevant och strukturerad elevens redovisning är.</p>	<p>Redovisningen kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande.</p> <p>Det finns en övergripande struktur men redovisningen kan bitvis vara fragmentarisk eller rörig.</p> <p>(1/0/0)</p>		<p>Redovisningen är fullständig och endast relevanta delar ingår.</p> <p>Redovisningen är välstrukturerad.</p> <p>(1/0/1)</p>	(1/0/1)
<p><b><i>Beskrivningar och förklaringar</i></b></p> <p>Förekomst av och utförlighet i beskrivningar och förklaringar.</p>	<p>Någon förklaring förekommer men tyngdpunkten i redovisningen ligger på beskrivningar.</p> <p>Utförligheten i de beskrivningar och de förklaringar som framförs kan vara begränsad.</p> <p>(1/0/0)</p>		<p>Redovisningen innehåller tillräckligt med utförliga beskrivningar och förklaringar.</p> <p>(1/0/1)</p>	(1/0/1)
<p><b><i>Matematisk terminologi</i></b></p> <p>Hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.</p>	<p>Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse vid enstaka tillfällen i redovisningen.</p> <p>(1/0/0)</p>	<p>Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom delar av redovisningen.</p> <p>(1/1/0)</p>	<p>Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom hela redovisningen.</p> <p>(1/1/1)</p>	(1/1/1)
<b>Summa</b>				(3/1/3)

## Innehåll

Allmänna riktlinjer för bedömning .....	3
Bedömningsanvisningar .....	3
Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga .....	4
Provsammanställning - Kunskapskrav .....	5
Provsammanställning - Centralt innehåll .....	6
Kravgränser .....	7
Bedömningsanvisningar .....	8
Del B.....	8
Del C.....	10
Del D.....	12
Bedömda elevlösningar .....	15
Uppgift 4.....	15
Uppgift 13c.....	16
Uppgift 15.....	17
Uppgift 16.....	18
Uppgift 17b.....	20
Uppgift 18.....	21
Uppgift 21.....	22
Uppgift 22.....	24
Uppgift 23.....	25
Uppgift 24.....	26
Ur ämnesplanen för matematik .....	27
Kunskapskrav Matematik kurs 3b och 3c .....	28
Centralt innehåll Matematik kurs 3c .....	29
Bedömningsformulär.....	30
Insamling av provresultat för matematik .....	31
Urvalsinsamlingen .....	31

## Allmänna riktlinjer för bedömning

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges den poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som provas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den *huvudsakliga* som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att  $E_{PL}$  och  $A_R$  ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfejl och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfejl.

### Bedömningsanvisningar

Bedömningsanvisningarna till långsvarsuppgifterna är skrivna enligt olika modeller:

---

Godtagbar ansats, t.ex. ...	+1 $E_P$
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (...)	+1 $E_P$

*Kommentar: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen utfaller först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.*

---

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. ...	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. ...	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. ...
1 $E_R$	1 $E_R$ och 1 $C_R$	1 $E_R$ och 1 $C_R$ och 1 $A_R$

*Kommentar: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).*

---



### **Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga**

Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för betyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

För uppgifter där elevens skriftliga kommunikativa förmåga ska bedömas gäller de allmänna kraven nedan.

Kommunikationspoäng på C-nivå ( $C_K$ ) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.

Dessutom ska

1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan innehålla något ovidkommande eller sakna något steg. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå ( $A_K$ ) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.

Dessutom ska

1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

Förutom den allmänna beskrivningen av kraven kan ibland mer utförliga beskrivningar ges i samband med de bedömda elevlösningar där kommunikationspoäng förekommer.



## Provsammanställning - Centralt innehåll

**Tabell 2** Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 3c i förhållande till nivå och centralt innehåll. En lista över det centrala innehållet återfinns i slutet av detta häfte.

Uppg.	Nivå	Centralt innehåll Kurs Ma3c																		
		Aritmetik, algebra och geometri				Samband och förändring												Problem-lösning		
		E	C	A	A1	A3	A4	A5	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15	F16	P1	P3
Del A		3	1	3																
Del B	1	1	0	0												X				
	2a	1	0	0	X															
	2b	1	0	0	X															
	3	1	0	0		X														
	4	1	0	0					X	X	X				X					
	5	1	0	0			X											X		
	6a	1	0	0							X	X								
	6b	0	1	0							X	X								
	6c	0	1	0	X						X	X								
	7	0	1	0												X	X			
	8	0	1	0							X									
	9a	0	1	0	X															
	9b	0	1	1	X															
	10a	0	1	0									X							
	10b	0	0	1					X				X							
11a	0	1	0												X					
11b	0	0	1												X	X				
Del C	12	2	0	0											X	X				
	13a	2	0	0						X	X		X	X	X					
	13b	1	2	0										X						
	13c	0	1	2	X									X						
	14	0	2	0	X															
	15	0	3	0						X	X	X	X		X			X		
	16	0	1	3						X	X		X		X					
Del D	17a	2	0	0	X				X	X								X	X	
	17b	2	0	0	X				X	X	X		X							
	18	2	0	0					X	X	X			X	X					
	19	2	0	0						X					X					
	20	2	0	0				X										X		
	21	0	4	0				X										X	X	
	22	0	2	0					X	X	X		X	X	X					
	23	0	0	3			X											X		
	24	0	0	3				X		X	X		X		X			X		
Total		25	24	17																

## Kravgränser

Provet består av ett muntligt delprov (Del A) och tre skriftliga delprov (Del B, Del C och Del D). Tillsammans kan de ge 66 poäng varav 25 E-, 24 C- och 17 A-poäng. Observera att kravgränserna förutsätter att eleven deltagit i alla fyra delprov.

Kravgräns för provbetyget

E: 19 poäng

D: 28 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå

C: 36 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå

B: 45 poäng varav 5 poäng på A-nivå

A: 52 poäng varav 9 poäng på A-nivå

## Bedömningsanvisningar

*Exempel* på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en symbol.

### Del B

**1.** **Max 1/0/0**

Korrekt svar ( $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ ) +1 E<sub>B</sub>

**2.** **Max 2/0/0**

a) Korrekt svar (1,5) +1 E<sub>P</sub>

b) Korrekt svar ( $3x^9$ ) +1 E<sub>P</sub>

**3.** **Max 1/0/0**

Korrekt svar (alternativ B:  $|-3| = 3$ ) +1 E<sub>B</sub>

**4.** **Max 1/0/0**

Godtagbart ritad graf +1 E<sub>B</sub>

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*



**5.** **Max 1/0/0**

Korrekt svar ( $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$ ) +1 E<sub>PL</sub>

**6.** **Max 1/2/0**


a) Korrekt svar ( $f'(x) = 12x^3 - 7$ ) +1 E<sub>P</sub>

b) Korrekt svar ( $f'(x) = kx^{k-1}$ ) +1 C<sub>P</sub>

c) Korrekt svar ( $f'(x) = 5$ ) +1 C<sub>P</sub>

7. **Max 0/1/0**  
 Godtagbart svar (8) +1 C<sub>B</sub>
8. **Max 0/1/0**  
 Korrekt svar (Alternativ E: ”Vattenmelonens viktökning i hg/vecka vid tiden 3 veckor.”) +1 C<sub>B</sub>
9. **Max 0/2/1**
- a) Korrekt svar (t.ex.  $f(x) = x^4 + 3x$ ) +1 C<sub>B</sub>
- b) Godtagbar ansats, anger ett rationellt uttryck som uppfyller det första *eller* det andra och det tredje villkoret, t.ex.  $\frac{x}{2(x+4)(x-3)}$  +1 C<sub>B</sub>  
 med alla tre villkor uppfyllda,  $\left( \text{t.ex. } \frac{x+1}{(x+4)(x-3)} \right)$  +1 A<sub>B</sub>
10. **Max 0/1/1**
- a) Korrekt svar (3000) +1 C<sub>M</sub>
- b) Korrekt svar (5000) +1 A<sub>M</sub>
11. **Max 0/1/1**
- a) Korrekt svar (D) +1 C<sub>B</sub>
- b) Korrekt svar (E) +1 A<sub>B</sub>

## Del C

- 12.** **Max 2/0/0**
- Korrekt bestämning av primitiv funktion +1 E<sub>P</sub>  
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (7) +1 E<sub>P</sub>
- 13.** **Max 3/3/2**
- a) Korrekt bestämning av derivatans nollställe,  $x = 1$  +1 E<sub>P</sub>  
 med godtagbar verifiering av maximum +1 E<sub>P</sub>
- b) Korrekt beräkning av maximal area,  $3 \text{ m}^2$  +1 E<sub>P</sub>  
 med korrekt angiven värdemängd, t.ex. i ord, där det framgår att arean är större än  $0 \text{ m}^2$  och mindre än eller lika med  $3 \text{ m}^2$  +1 C<sub>M</sub>  
 där svaret uttrycks med korrekt använda olikhetstecken ( $0 < A \leq 3$ ) +1 C<sub>K</sub>
- Kommentar:* Ett svar som inkluderar arean noll (t.ex.  $0 \leq A \leq 3$ ) bedöms vara godtagbart eftersom både arean noll och väldigt små areor är lika orimliga i detta sammanhang.
- c) Godtagbar ansats, tecknar sidan  $BC$  (eller  $CD$ ) uttryckt i  $x$  eller arean uttryckt i två variabler, t.ex.  $BC = 3 - x$  eller  $A = xy + x(y - x)$  +1 C<sub>M</sub>  
 med korrekt slutförd härledning av uttrycket för arean +1 A<sub>M</sub>
- Lösningen (deluppgift c) kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara =, parenteser, bråkstreck,  $A(x)$ ,  $x$  och  $y$ , index, figur med införda beteckningar, termer såsom area, sida samt angivna enheter etc. +1 A<sub>K</sub>
- Se avsnittet Bedömda elevlösningar.* 
- 14.** **Max 0/2/0**
- Godtagbar ansats, korrekt faktorisering t.ex.  $\frac{10,7^5(10,7-1)}{10,7^5}$  +1 C<sub>P</sub>  
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (9,7) +1 C<sub>P</sub>

15.

Max 0/3/0

Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer  $x$ -koordinaten för punkten  $P$ ,  $x = \frac{\ln 4}{2}$  +1 C<sub>PL</sub>

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar på enklaste form (8) +1 C<sub>PL</sub>

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4)

vara =,  $f(x)$ ,  $f'(x)$ ,  $f(x) = 4$  och  $f'(\frac{\ln 4}{2})$  samt termer såsom derivata, punkt,

$x$ -koordinat,  $y$ -koordinat, tangent, riktningskoefficient, lutning etc. +1 C<sub>K</sub>

***Se avsnittet Bedömda elevlösningar.***



16.

Max 0/1/3

Godtagbar ansats, korrekt bestämning av  $f'(a)$ ,  $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$  +1 C<sub>P</sub>

med godtagbar fortsättning som inkluderar konstruktiv användning av tangeringspunktens koordinater, t.ex. korrekt bestämning av tangentens

ekvation  $y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$  +1 A<sub>R</sub>

med ett i övrigt godtagbart genomfört bevis +1 A<sub>R</sub>

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara

=,  $f(x)$ ,  $f'(x)$ ,  $f'(a)$ , bråkstreck, figur med införda beteckningar, termer såsom

koordinater, tangent, lutning, riktningskoefficient, derivata,  $x$ -axel,  $y$ -axel, triangel, höjd, bas, areaenheter samt hänvisning till tangentens ekvation etc. +1 A<sub>K</sub>

***Se avsnittet Bedömda elevlösningar.***





**Del D****17. Max 4/0/0**a) Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer  $V(0)$  och  $V(3)$  +1 E<sub>PL</sub>med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (90 g/dygn) +1 E<sub>PL</sub>*Kommentar:* Även svaret  $-90$  g/dygn bedöms som godtagbart.b) Godtagbar ansats till utvärdering av modellen, t.ex. beräknar  $V(17)$  +1 E<sub>M</sub>med godtagbar kommentar, som utgående från beräkning av t.ex.  $V(17)$  med korrekt enhet, visar insikt om att vikten eller viktökningen är orimligt hög +1 E<sub>M</sub>*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.***18. Max 2/0/0**Godtagbar ansats, visar insikt om vilka  $x$ -värden som ska undersökas: $x = 0$ ,  $x = 2$  och  $x = 4$  (vid algebraisk lösning) eller $x = 2$  och  $x = 4$  (vid grafisk lösning) +1 E<sub>B</sub>med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (Minsta värdet är  $-2$  och största värdet är 18) +1 E<sub>B</sub>*Kommentar:* Om svaren anges i koordinatform alternativt både i korrekt form och koordinatform (t.ex. "Största värdet är 18 eller (4, 18)") utdelas inte den andra E<sub>B</sub>-poängen.*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.***19. Max 2/0/0**Godtagbar ansats, inleder ett enkelt resonemang genom att t.ex. undersöka linjens lutning utifrån de givna punkterna (3, 4) och (100, 244) +1 E<sub>R</sub>med godtagbart slutfört resonemang med korrekt slutsats (t.ex. "Linjens lutning blev 2,47 så hon har fel.") +1 E<sub>R</sub>

- 20.** **Max 2/0/0**
- Godtagbar ansats, t.ex. tecknar en korrekt ekvation med hjälp av cosinussatsen +1 E<sub>PL</sub>  
 med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (119°) +1 E<sub>PL</sub>

- 21.** **Max 0/4/0**
- Godtagbar ansats, t.ex. beräknar en relevant vinkel, t.ex. 0,05730° +1 C<sub>PL</sub>  
 med i övrigt godtagbar fortsättning, t.ex. tecknar sambandet
- $$\frac{D}{\sin 30^\circ} = \frac{72,28}{\sin 149,94^\circ} \quad +1 \text{ C}_{PL}$$
- med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (72,16 m) +1 C<sub>PL</sub>
- Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4) vara =, ≈,  $\tan u = 0,001$ ,  $\arctan(0,001)$ ,  $u \approx 0,057^\circ$ , symbol för rät vinkel, symbol för vinkel, termer såsom sträcka, vinkel, triangel, figur med införda beteckningar, hänvisning till cosinussatsen, sinussatsen, vinkelsumma i en triangel, Pythagoras sats samt angivna enheter etc. +1 C<sub>K</sub>

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*



- 22.** **Max 0/2/0**
- Godtagbar ansats, inleder ett välgrundat resonemang genom att använda en undersökningsmetod som kan ge väl underbyggda slutsatser, t.ex. undersöker på sin grafräknare om derivatans graf har några nollställen +1 C<sub>R</sub>  
 med godtagbart slutfört resonemang med korrekt slutsats (t.ex. ”Grafen till derivatan blir aldrig noll, så det är ingen terrasspunkt”) +1 C<sub>R</sub>

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*



23.

Max 0/0/3

Godtagbar ansats, t.ex. tecknar med hjälp av Pythagoras sats ett samband där kateterna är 1 och  $t$ , t.ex.  $z^2 = 1^2 + t^2$

+1 A<sub>PL</sub>

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar  $\left( \cos v = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right)$

+1 A<sub>PL</sub>

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4)

vara =,  $\pm$ ,  $<$ ,  $\sqrt{\quad}$ , symbol för rät vinkel, symbol för vinkel,  $t$ ,  $v$ ,  $\cos v$ ,  $Q = (1, t)$ ,

figur med införda beteckningar, termer såsom cirkel, radie,  $x$ -koordinat,

$y$ -koordinat, punkt, rät linje, linjens ekvation, tangen, hänvisning till

definitionen för cosinus, likformighet, Pythagoras sats samt angivna enheter etc. +1 A<sub>K</sub>

*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*



24.

Max 0/0/3

Godtagbar ansats, t.ex. tecknar  $S'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(4+h) - S(4)}{h}$

+1 A<sub>PL</sub>

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (1)

+1 A<sub>PL</sub>

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. För denna uppgift kan matematiska symboler och representationer (se punkt 2 sidan 4)

vara =, bråkstreck,  $S'(x)$ ,  $S'(4)$ ,  $S(x+h)$ ,  $S(4+h)$ ,  $S(4)$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0}$ , figur med

införda beteckningar, termer såsom rät linje,  $x$ -led,  $y$ -led, ändringskvot, punkt, lutning, avstånd samt hänvisning till derivatans definition etc.

+1 A<sub>K</sub>

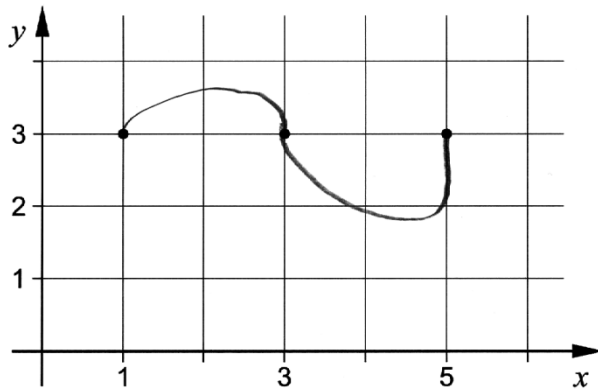
*Se avsnittet Bedömda elevlösningar.*



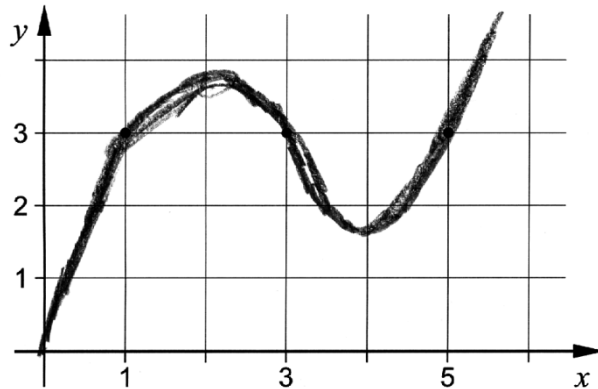
## Bedömda elevlösningar

### Uppgift 4

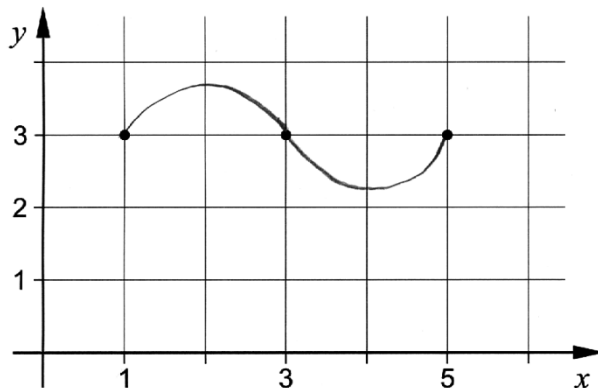
#### Elevlösning 1 (0 poäng)



#### Elevlösning 2 (1 E<sub>B</sub>)



#### Elevlösning 3 (1 E<sub>B</sub>)



*Kommentar:* Eftersom det inte går att avgöra om derivatan är positiv eller negativ i punkterna  $(3, 3)$  och  $(5, 3)$  ges elevlösning 1 noll poäng. Elevlösning 2 och 3 visar godtagbara grafer men ges nätt och jämnt en begrepps-poäng på E-nivå. Det beror på att graf 2 ser ut att bestå av flera grafer och graf 3 är inte ritad för  $x < 1$  och  $x > 5$ .

## Uppgift 13c

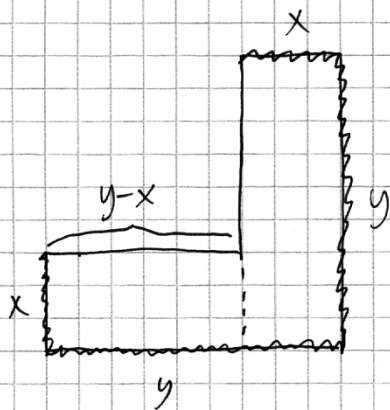
Elevlösning 1 (1 C<sub>M</sub> och 1 A<sub>M</sub>)

$$\text{VGA } A(x) = 6x - 3x^2$$

$$A(x) = (BC - x)x \cdot 2 + x^2 = \left(\frac{6 - 2x - x}{2}\right)x \cdot 2 + x^2$$

$$= (3 - 2x)x \cdot 2 + x^2 = 6x - 3x^2$$

*Kommentar:* Eftersom elevlösningen inte innehåller någon figur med införda beteckningar och motivering till varför  $BC = \frac{6-2x}{2}$ , blir lösningen svår att följa och förstå. Sammantaget ges elevlösningen modelleringspoängen på både C- och A-nivå, men inte kommunikationspoängen på A-nivå.

Elevlösning 2 (1 C<sub>M</sub>, 1 A<sub>M</sub> och 1 A<sub>K</sub>)

De långa sidorna är  $y$

Då ska 6m gräskant räcka

till  $2x$  och  $2y$

$$2x + 2y = 6 \quad \text{så} \quad y = 3 - x$$

Arean blir  $xy + x(y-x)$

$$A = xy + xy - x^2 = 2xy - x^2$$

$$\text{Då blir } A(x) = 2x(3-x) - x^2 = 6x - 2x^2 - x^2$$

$$A(x) = 6x - 3x^2$$

*Kommentar:* Lösningen är lätt att följa och förstå eftersom variabler är definierade, det finns en tydlig figur och ekvationen  $2x + 2y = 6$  motiveras på ett tydligt sätt. Sammantaget motsvarar lösningen både modelleringspoängen på C- och på A-nivå samt kommunikationspoängen på A-nivå.

## Uppgift 15

Elevlösning 1 (1 C<sub>PL</sub>)

$$\begin{array}{ll}
 y = e^{2x} & 4 = e^{2x} \\
 y'(x) = 2e^{2x} & \ln 4 = \ln e^{2x} \\
 & \ln 4 = 2x \cdot \ln e \\
 & x = \frac{\ln 4}{2 \ln e} \\
 y'\left(\frac{\ln 4}{2 \ln e}\right) = 2e^{\frac{2 \cdot \ln 4}{2 \ln e}} & \text{Svar: } 2e^{\frac{\ln 4}{\ln e}} \\
 = 2e^{\frac{\ln 4}{\ln e}} & 
 \end{array}$$

*Kommentar:* Det korrekta svaret är inte uttryckt på enklaste form, därmed uppfylls inte kravet för den andra problemlösningsspoängen på C-nivå.

Elevlösning 2 (2 C<sub>PL</sub> och 1 C<sub>K</sub>)

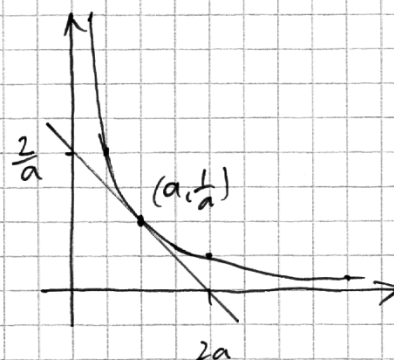
$$\begin{array}{ll}
 y = e^{2x} & \\
 \text{Bestäm } x\text{-koordinaten} & \text{Bestäm } f'(\ln 4/2) \\
 4 = e^{2x} & \\
 \ln 4 = \ln e^{2x} & y = e^{2x} \\
 2x = \ln 4 & y'(x) = 2e^{2x} \\
 x = \ln 4/2 & y'(\ln 4/2) = 2 \cdot e^{2 \cdot \ln 4/2} \\
 & = 2e^{\ln 4} = 2 \cdot 4 \\
 & = 8 \\
 & \text{Svar: } 8
 \end{array}$$

*Kommentar:* Elevlösningen är korrekt och svaret uttrycks på enklaste form. Kommunikationen bedöms motsvara kraven för en kommunikationspoäng på C-nivå trots att det förekommer olika beteckningssätt för derivatan.

## Uppgift 16

## Elevlösning 1 (0 poäng)

Eftersom kurvans funktion är  $y = \frac{1}{x}$  kommer tangenten till kurvan vid punkten  $(a, \frac{1}{a})$  alltid att skära y-axeln vid  $2 \cdot \frac{1}{a}$  och x-axeln vid  $2a$



$$y = \frac{1}{x}$$

$$A = \frac{2a \cdot \frac{2}{a}}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ A.E.}$$

Kommentar: Elevlösningen innehåller korrekt angiven skärning med x- och y-axeln, men redovisning för dessa saknas. Elevlösningen ges noll poäng.

## Elevlösning 2 (0 poäng)

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} \quad \text{Tangentens ekvation } y = kx + m$$

Tang. punkt (1,1)

$$k = y'(1) = -1$$

$$1 = -1 \cdot 1 + m$$

$$m = 2, \quad y = -1 \cdot x + 2$$

$x=0$  ger höjd: 2

$y=0$  ger bas: 2

$$A = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$$

Tang. punkt (0.5,2)

$$k = y'(0.5) = -4$$

$$2 = -4 \cdot 0.5 + m$$

$$m = 4, \quad y = -4x + 4$$

$x=0$  ger höjd: 4

$y=0$  ger bas: 1

$$A = \frac{4 \cdot 1}{2} = 2$$

Tang. punkt (2,0.5)

$$k = y'(2) = -0.25$$

$$0.5 = -0.25 \cdot 2 + m$$

$$m = 1, \quad y = -0.25x + 1$$

$x=0$  ger höjd: 1

$y=0$  ger bas: 4

$$A = \frac{1 \cdot 4}{2} = 2$$

Area blir alltså 2

Kommentar: Eftersom slutsatsen baseras på specialfall och inte en generell behandling, ges elevlösningen noll poäng.

Elevlösning 3 (1 C<sub>P</sub> och 2 A<sub>R</sub>)

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$= -\frac{1}{x^2}$$

$$f'(a) = -\frac{1}{a^2}$$

$$y = kx + m$$

$$\frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2} \cdot a + m$$

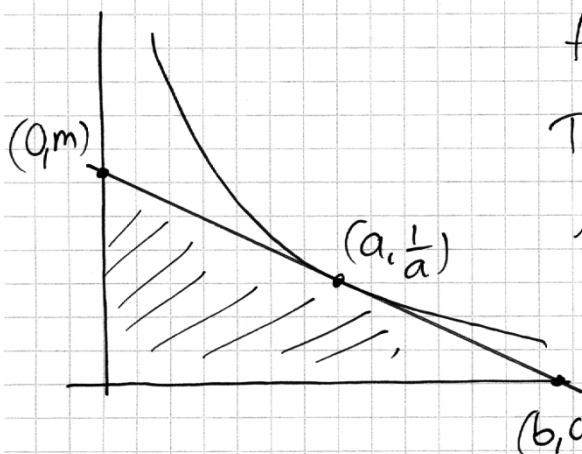
$$m = \frac{2}{a}$$

x-axeln :  $0 = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$   $x = \frac{2}{a} \cdot a^2 = 2a$

$$\frac{2a \cdot \frac{2}{a}}{2} = 2$$

Area är alltid 2 areaneter

*Kommentar:* Elevlösningen är korrekt och ger därför en procedurpoäng på C-nivå och två resonemangspoäng på A-nivå. Lösningen är inte välstrukturerad. Symbolhanteringen är bristfällig på andra raden där symbolen  $f'(x)$  saknas. Det framgår inte heller med tydlighet hur basen och höjden i triangeln bestäms. Därmed bedöms inte lösningen uppfylla kraven för kommunikationspoäng på A-nivå.

Elevlösning 4 (1 C<sub>P</sub>, 2 A<sub>R</sub> och 1 A<sub>K</sub>)

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Tangentens lutning  $f'(a) = -\frac{1}{a^2} = k$

$$A = \frac{b \cdot m}{2}$$

$$k = \frac{m - 1/a}{0 - a} = -\frac{1}{a^2}$$

$$m - 1/a = 1/a \Rightarrow m = 2/a$$

$$k = \frac{1/a - 0}{a - b} = -\frac{1}{a^2}$$

$$-a^2 \cdot \frac{1}{a} = a - b$$

$$b - a = a \Rightarrow b = 2a$$

$$A = \frac{b \cdot m}{2} = \frac{2a \cdot 2/a}{2} = 2$$

Det. area är alltid 2.

*Kommentar:* Elevlösningen är korrekt och lätt att följa och förstå. Sammantaget ges lösningen alla de poäng som uppgiften kan ge, inklusive kommunikationspoängen på A-nivå.



## Elevlösning 5 (1 Cp, 2 Ar och 1 Ak)

$$\text{Tangentens punkten} = (a, \frac{1}{a})$$

$$\text{lutningen } y' = -x^{-2} \quad \text{och } y'(a) = -a^{-2}$$

$$\text{Tangentens funktion } y - y_1 = k(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{a} = -a^{-2}(x - a)$$

$$y - \frac{1}{a} = -a^{-2}x + a^{-1}$$

$$y = -a^{-2}x + \frac{1}{a} + \frac{1}{a}$$

$$y = -a^{-2}x + \frac{2}{a}$$

Triangelns höjd

$$y = -a^{-2} \cdot 0 + \frac{2}{a} = \frac{2}{a}$$

Triangelns bas

$$0 = -a^{-2} \cdot x + \frac{2}{a}$$

$$a^{-2}x = \frac{2}{a}$$

$$a^{-1}x = 2$$

$$\frac{1}{a} \cdot x = 2$$

$$x = 2a$$

Triangelns area

$$\frac{2a \cdot \frac{2}{a}}{2} = \frac{2a \cdot 2}{2} = \frac{4a}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Triangelns area är alltid 2.

*Kommentar:* Elevlösningen är korrekt och lätt att följa och förstå. Trots att termen "tangentens funktion" används uppfyller lösningen kraven för alla de poäng som uppgiften kan ge.

## Uppgift 17b

## Elevlösning 1 (1 Em)

$$V(t) = 5t^3 - 135t + 3500$$

$$V'(t) = 15t^2 - 135$$

$$V'(14) = 2805 \quad \text{Det är inte möjligt!}$$

*Kommentar:* I elevlösningen visas hur derivatan kan användas för att konstatera en orimlig viktökning dag 14. I slutsatsen framgår dock inte vad som är orimligt eftersom  $V'(14)$  inte är tolkat (en viktökning på 2,8 kg/dag då  $t = 14$ ). Sammantaget ges därför denna elevlösning en modelleringspoäng på E-nivå.

**Elevlösning 2 (2 E<sub>M</sub>)**

DET ÄR INTE ENS I NÄRHETEN AV  
VERKLIGHETEN DÅ ETT BARN SOM ÄR  
21 DAR GAMMAL SKULLE VÄGA 4697 KG.  
( $5 \cdot 21^3 - 135 \cdot 21 + 3500 = 46970$ )

*Kommentar:* I elevlösningen konstateras en orimlig vikt dag 21. Lösningen ges de två modelleringspoängen på E-nivå.

**Uppgift 18****Elevlösning 1 (1 E<sub>B</sub>)**

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x - 2) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 = 2$$

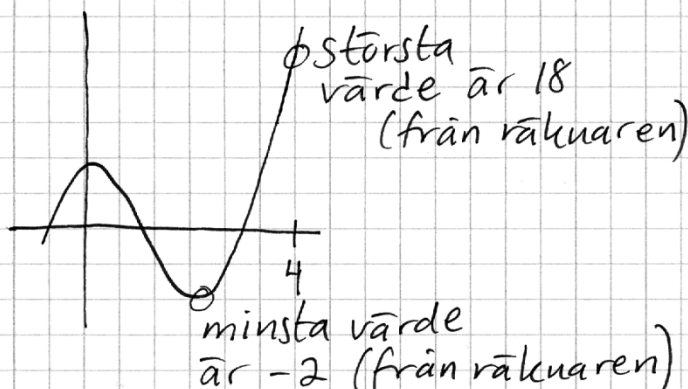
$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 = -2$$

$$f(4) = 4^3 - 3 \cdot 4^2 + 2 = 18$$

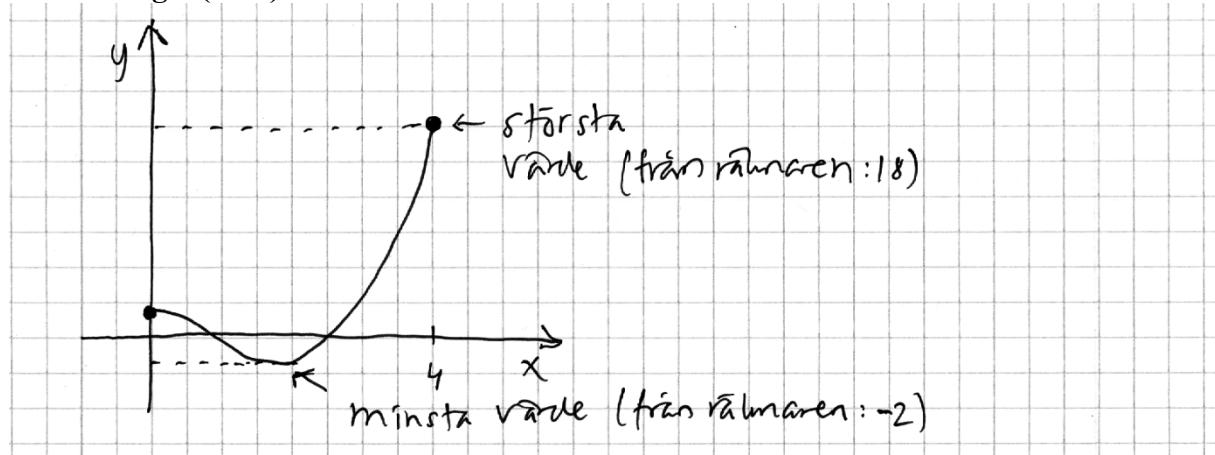
minsta värde : (2, -2)

störst värde : (4, 18)

*Kommentar:* I elevlösningen framgår vilka funktionsvärden som behöver undersökas men svaren är angivna i koordinatform. Sammantaget motsvarar detta en begreppspoäng på E-nivå.

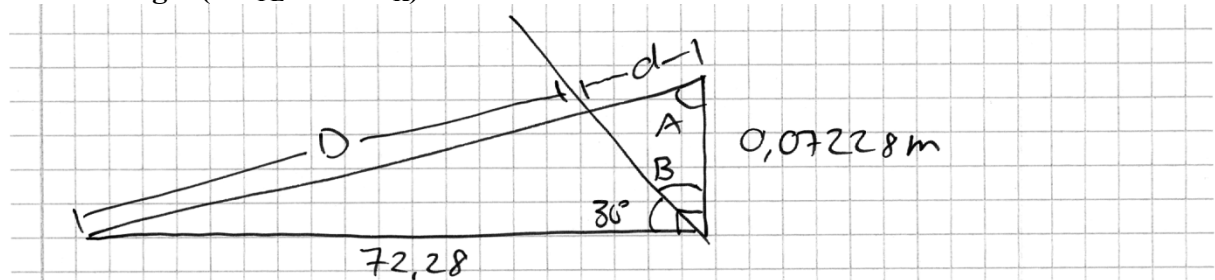
**Elevlösning 2 (2 E<sub>B</sub>)**

*Kommentar:* I elevlösningen framgår att största värdet är 18 och minsta värdet är  $-2$ . Dessa värden har bestämts med hjälp av grafräknare. Grafen är inte begränsad till det aktuella intervallet men skissen visar insikt om vilka värden som ska undersökas eftersom de relevanta punkterna är markerade. Sammantaget motsvarar denna elevlösning nätt och jämnt två begreppspoäng på E-nivå.

Elevlösning 3 (2 E<sub>B</sub>)

*Kommentar:* Grafen är begränsad till det aktuella intervallet och visar insikt om vilka värden som ska undersökas. Det största och minsta värdet har bestämts med hjälp av grafräknare. Elevlösningen ges två begreppsöping på E-nivå.

## Uppgift 21

Elevlösning 1 (3 C<sub>PL</sub> och 1 C<sub>K</sub>)

Eftersom marken lutar så lite (ca.  $0,06^\circ$ ) kommer vinkel  $A \approx 90^\circ$  (eg.  $90^\circ - \arctan(0,001) \approx 89,94^\circ$ ) och  $D + d \approx 72,28\text{ m}$  eftersom triangeln blir nästan likbent,  $B = 60^\circ$  eftersom  $30^\circ + B = 90^\circ$

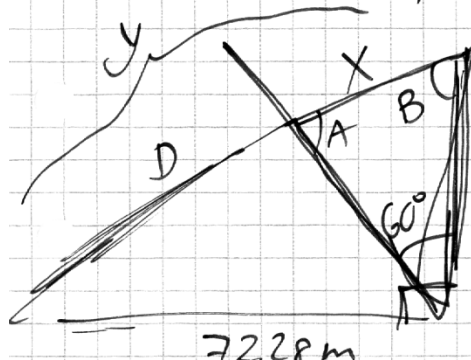
$$\tan 60^\circ = d / 0,07228$$

$$d = 0,12579\text{ m} \quad \text{och} \quad D = (72,28 - 0,12579)\text{ m} = \underline{\underline{72,15\text{ m}}}$$

*Kommentar:* Elevlösningen bygger på att triangeln approximativt sett är likbent med vinkeln  $A \approx 90^\circ$ . Approximationen ger ett godtagbart närmevärde och därmed anses problemet vara löst i sin helhet. Lösningen uppfyller dessutom alla krav för att en kommunikationsöping på C-nivå ska erhållas.

Elevlösning 2 (3 C<sub>PL</sub> och 1 C<sub>K</sub>)

$X =$  hur mycket kortare kastet blir



Pythagoras sats  
 $0,07228 \quad 72,28^2 + 0,07228^2 = y^2$   
 $y = 72,28003614 \text{ m}$

Sinussatsen ger:  
 $\frac{\sin B}{72,28} = \frac{\sin 90^\circ}{72,28003614} \quad B = 89,94^\circ$

$A = 180 - 60 - 89,94 = 30,06^\circ$

Sinussatsen ger  $\frac{X}{\sin 60} = \frac{0,07228}{\sin 30,06} \quad X = 0,12$

Kastet blir alltså 0,12 m kortare än y och  
 därmed  $72,28 - 0,12 = 72,16 \text{ m}$

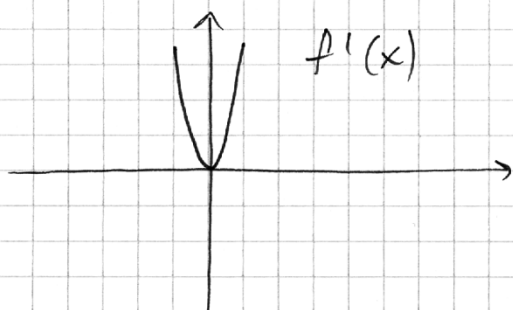
*Kommentar:* Elevlösningen bedöms som godtagbar, trots att den inte innehåller någon kommentar om det andra fallet vid bestämningen av vinkel  $B$ , och ges därmed tre problemlösningspoäng på C-nivå. När det gäller kommunikation så är hänvisning till använda satser tydlig och i figuren visas de beteckningar som används i beräkningarna men figuren är inte så noggrant ritad och enheter (grader och meter) saknas på några ställen. Sammantaget bedöms lösningen nätt och jämnt uppfylla kraven för kommunikationspoäng på C-nivå.

## Uppgift 22

## Elevlösning 1 (1 CR)

$$f(x) = x^3 + 0,03x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 0,03$$



från grafräknaren

Derivataus graf är alltid positiv utom då  $x=0$  för då är derivatan 0.

Teckenväxling  $+0+$  alltså är det en terrasspunkt.

Peder har rätt!

*Kommentar:* I lösningen studeras derivatans graf på grafräknaren. Undersökningsmetoden kan leda till välgrundade slutsatser, men eftersom fönsterinställningen är för grov framgår inte att derivatan saknar nollställe och en felaktig slutsats dras. Lösningen motsvarar därför sammantaget en resonemangspoäng på C-nivå.

## Elevlösning 2 (1 CR)

$$f(x) = x^3 + 0,03x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 0,03$$

$$3x^2 + 0,03 = 0$$

$$x^2 + 0,01 = 0$$

$$x^2 = -0,01$$

$$x = \pm\sqrt{-0,01} \quad \text{ERROR}$$

$$x = 0,1 \quad ?$$

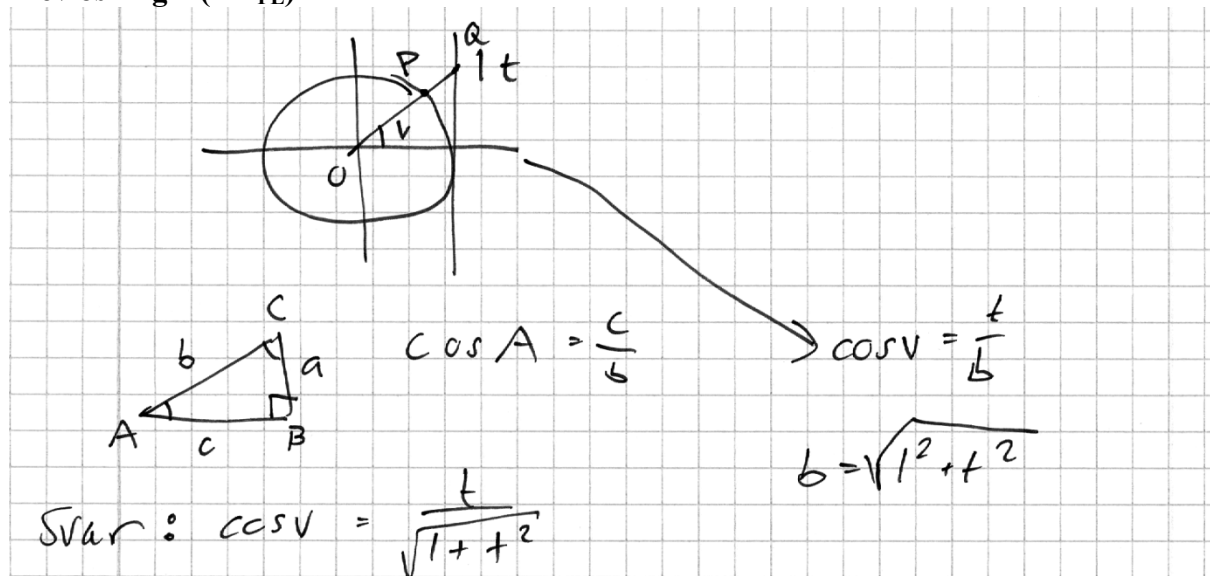
x	0	0,1	0,2
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	Terrass	↗

Han har rätt !!!  
o o o

*Kommentar:* Undersökningsmetoden (söka derivatans nollställe) är godtagbar eftersom den kan leda till välgrundade slutsatser, men eftersom beräkningen av derivatans nollställe inte är korrekt dras en felaktig slutsats. Sammantaget ges lösningen den första resonemangspoängen på C-nivå.

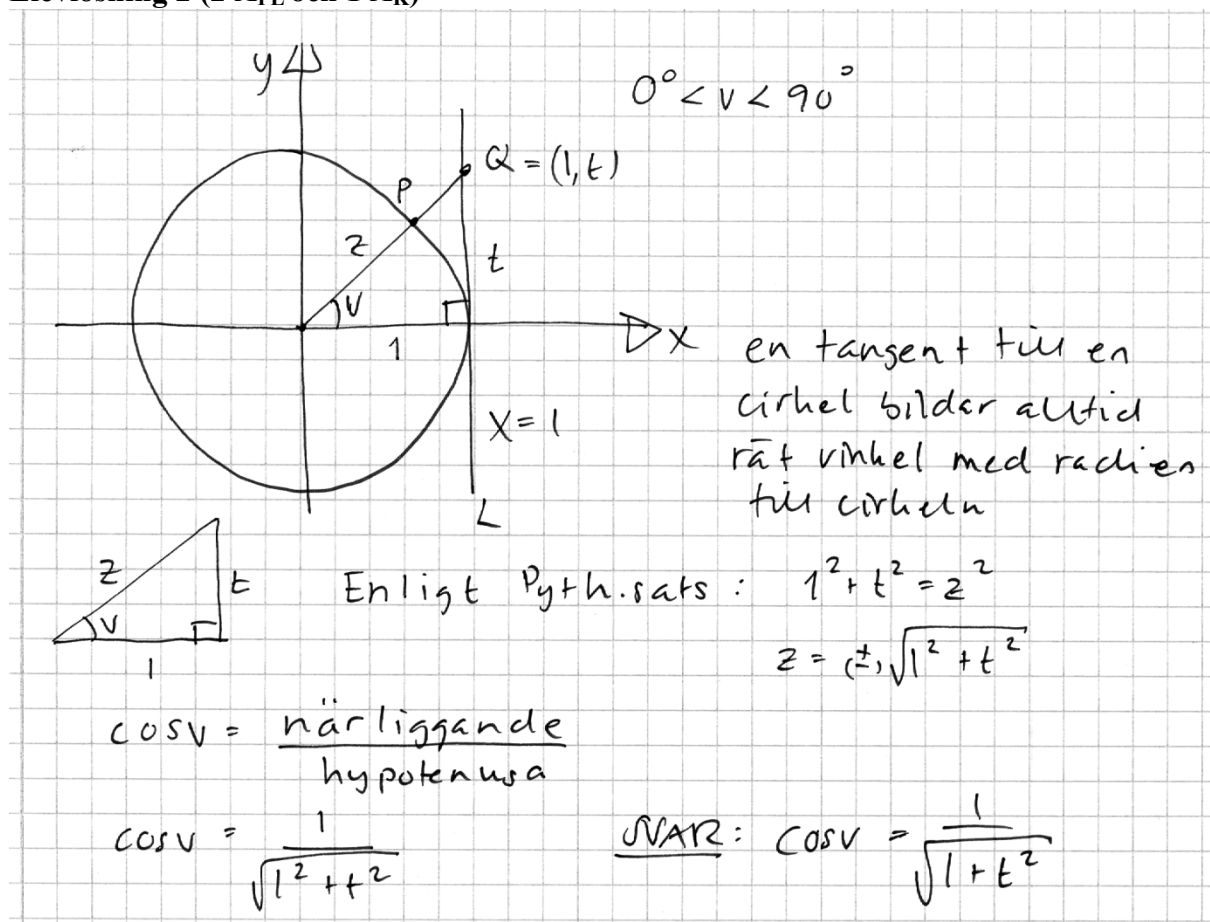
Uppgift 23

Elevlösning 1 (1 A<sub>PL</sub>)



*Kommentar:* Elevlösningen är inte helt korrekt eftersom täljaren ska bli 1 och inte  $t$ . I övrigt är lösningen något ostrukturerad och inte så lätt att följa och förstå. Bland annat hänvisas inte till Pythagoras sats. Sammantaget motsvarar denna lösning en problemlösningspoäng på A-nivå.

Elevlösning 2 (2 A<sub>PL</sub> och 1 A<sub>K</sub>)



*Kommentar:* Hänvisning till använda satser och trigonometriska definitioner i kombination med bra struktur, en tydlig figur och korrekt matematiskt språk gör lösningen lätt att följa och förstå. Sammantaget motsvarar detta alla poäng som uppgiften kan ge.

## Uppgift 24

Elevlösning 1 (2 A<sub>PL</sub> och 1 A<sub>K</sub>)

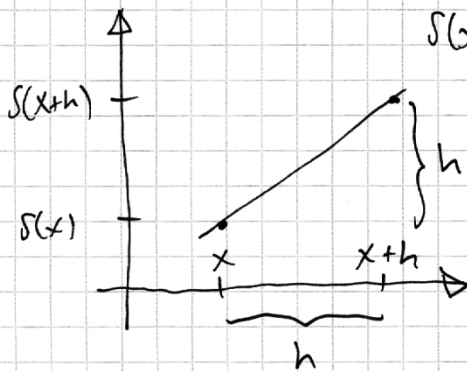
$$S(x+h) = S(x) + h$$

$$S(x+h) - S(x) = h$$

$$S'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$S'(4) = 1$$

*Kommentar:* Elevlösningen visar en korrekt algebraisk lösning som sammantaget ger två problemlösningspoäng och en kommunikationspoäng på A-nivå.

Elevlösning 2 (2 A<sub>PL</sub> och 1 A<sub>K</sub>)

$$S(x+h) = S(x) + h$$

$$h = S(x+h) - S(x)$$

Avståndet i x-led = h

Avståndet i y-led = h

Da är  $S(x)$  en linje med  $k=1$

Da är ju  $S'(4)$  också 1

$$\text{SVAR: } S'(4) = 1$$

*Kommentar:* Elevlösningen visar en korrekt grafisk lösning som är lätt att följa och förstå. Sammantaget motsvarar lösningen två problemlösningspoäng och en kommunikationspoäng på A-nivå.

## Ur ämnesplanen för matematik

Matematiken har en flertusenårig historia med bidrag från många kulturer. Den utvecklas såväl ur praktiska behov som ur människans nyfikenhet och lust att utforska matematiken som sådan. Kommunikation med hjälp av matematikens språk är likartad över hela världen. I takt med att informationstekniken utvecklas används matematiken i alltmer komplexa situationer. Matematik är även ett verktyg inom vetenskap och för olika yrken. Ytterst handlar matematiken om att upptäcka mönster och formulera generella samband.

### Ämnets syfte

Undervisningen i ämnet matematik ska syfta till att eleverna utvecklar förmåga att arbeta matematiskt. Det innefattar att utveckla förståelse av matematikens begrepp och metoder samt att utveckla olika strategier för att kunna lösa matematiska problem och använda matematik i samhälls- och yrkesrelaterade situationer. I undervisningen ska eleverna ges möjlighet att utmana, fördjupa och bredda sin kreativitet och sitt matematikkunnande. Vidare ska den bidra till att eleverna utvecklar förmåga att sätta in matematiken i olika sammanhang och se dess betydelse för individ och samhälle.

Undervisningen ska innehålla varierade arbetsformer och arbetssätt, där undersökande aktiviteter utgör en del. När så är lämpligt ska undervisningen ske i relevant praxisnära miljö. Undervisningen ska ge eleverna möjlighet att kommunicera med olika uttrycksformer. Vidare ska den ge eleverna utmaningar samt erfarenhet av matematikens logik, generaliserbarhet, kreativa kvaliteter och mångfacetterade karaktär. Undervisningen ska stärka elevernas tilltro till sin förmåga att använda matematik i olika sammanhang samt ge utrymme åt problemlösning som både mål och medel. I undervisningen ska eleverna dessutom ges möjlighet att utveckla sin förmåga att använda digital teknik, digitala medier och även andra verktyg som kan förekomma inom karaktärsämnen.

### Undervisningen i ämnet matematik ska ge eleverna förutsättningar att utveckla förmåga att:

1. använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen.
2. hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg.
3. formulera, analysera och lösa matematiska problem samt värdera valda strategier, metoder och resultat.
4. tolka en realistisk situation och utforma en matematisk modell samt använda och utvärdera en modells egenskaper och begränsningar.
5. följa, föra och bedöma matematiska resonemang.
6. kommunicera matematiska tankegångar muntligt, skriftligt och i handling.
7. relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang.



## Kunskapskrav Matematik kurs 3b och 3c

**Betyget E** – Eleven kan **översiktligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **några** representationer samt **översiktligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnen i **bekanta situationer**. I arbetet hanterar eleven **några enkla** procedurer och löser uppgifter av standardkaraktär **med viss säkerhet**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem **av enkel karaktär**. Dessa problem inkluderar **ett fåtal** begrepp och kräver **enkla** tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att tillämpa **givna** matematiska modeller. Eleven kan med **enkla** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier och metoder.

Eleven kan föra **enkla** matematiska resonemang och värdera med **enkla** omdömen egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal och skrift **med inslag av** matematiska symboler och andra representationer.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **kursens innehåll** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **enkla** resonemang om exemplens relevans.

**Betyget D** – Betyget D innebär att kunskapskraven för E och till övervägande del för C är uppfyllda.

**Betyget C** – Eleven kan **utförligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **några** representationer samt **utförligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnen. I arbetet hanterar eleven **flera** procedurer, **inklusive avancerade och algebraiska uttryck**, och löser uppgifter av standardkaraktär **med säkerhet**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att **välja och** tillämpa matematiska modeller. Eleven kan med **enkla** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem**. omdömen egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. **Vidare kan eleven genomföra enkla matematiska bevis**. Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal och skrift **samt använder** matematiska symboler och andra representationer **med viss anpassning till syfte och situation**.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **några av kursens delområden** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **välgrundade** resonemang om exemplens relevans.

**Betyget B** – Betyget B innebär att kunskapskraven för C och till övervägande del för A är uppfyllda.

**Betyget A** – Eleven kan **definiera och utförligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **flera** representationer samt **utförligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa **komplexa** matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnen. I arbetet hanterar eleven **flera** procedurer, **inklusive avancerade och algebraiska uttryck**, och löser uppgifter av standardkaraktär **med säkerhet och på ett effektivt sätt**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem **av komplex karaktär**. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar. **I problemlösning upptäcker eleven generella samband som presenteras med symbolisk algebra**. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att **välja**, tillämpa **och anpassa** matematiska modeller. Eleven kan med **nyanserade** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem**.

Eleven kan föra **välgrundade och nyanserade** matematiska resonemang, värdera med **nyanserade** omdömen **och vidareutveckla** egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. **Vidare kan eleven genomföra matematiska bevis**. Dessutom uttrycker sig eleven **med säkerhet** i tal och skrift **samt använder** matematiska symboler och andra representationer **med god anpassning till syfte och situation**.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **några av kursens delområden** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **välgrundade och nyanserade** resonemang om exemplens relevans.

## Centralt innehåll Matematik kurs 3c

*Undervisningen i kursen ska behandla följande centrala innehåll:*

### Aritmetik, algebra och geometri

- A1** Begreppen polynom och rationella uttryck samt generalisering av aritmetikens lagar för hantering av dessa begrepp.
- A3** Begreppet absolutbelopp.
- A4** Egenskaper hos cirkelns ekvation och enhetscirkeln för att definiera trigonometriska begrepp.
- A5** Bevis och användning av cosinus-, sinus- och areasatsen för en godtycklig triangel.

### Samband och förändring

- F7** Orientering kring kontinuerlig och diskret funktion samt begreppet gränsvärde.
- F8** Egenskaper hos polynomfunktioner av högre grad.
- F9** Begreppen sekant, tangent, ändringskvot och derivata för en funktion.
- F10** Härledning och användning av deriveringsregler för potens- och exponentialfunktioner samt summor av funktioner.
- F11** Introduktion av talet  $e$  och dess egenskaper.
- F12** Algebraiska och grafiska metoder för bestämning av derivatans värde för en funktion.
- F13** Algebraiska och grafiska metoder för lösning av extremvärdesproblem inklusive teckenstudium och andraderivatan.
- F14** Samband mellan en funktions graf och funktionens första- och andraderivata.
- F15** Begreppen primitiv funktion och bestämd integral samt sambandet mellan integral och derivata.
- F16** Bestämning av enkla integraler i tillämpningar som är relevanta för karaktärsämnena.

### Problemlösning

- P1** Strategier för matematisk problemlösning inklusive användning av digitala medier och verktyg.
- P3** Matematiska problem av betydelse för samhällsliv och tillämpningar i andra ämnen.
- P4** Matematiska problem med anknytning till matematikens kulturhistoria.

# Bedömningsformulär

Elev: \_\_\_\_\_ Klass: \_\_\_\_\_ Provbetyg: \_\_\_\_\_

Del	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
Del A	M_1												
	M_2												
	M_3												
	M_4												
	M_5												
	M_6												
	M_7												
Del B	1												
	2a												
	2b												
	3												
	4												
	5												
	6a												
	6b												
	6c												
	7												
	8												
	9a												
	9b_1												
	9b_2												
	10a												
	10b												
	11a												
11b													
Del C	12_1												
	12_2												
	13a_1												
	13a_2												
	13b_1												
	13b_2												
	13b_3												
	13c_1												
	13c_2												
	13c_3												
	14_1												
	14_2												
	15_1												
	15_2												
	15_3												

Del	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
Del C	16_1												
	16_2												
	16_3												
	16_4												
Del D	17a_1												
	17a_2												
	17b_1												
	17b_2												
	18_1												
	18_2												
	19_1												
	19_2												
	20_1												
	20_2												
	21_1												
	21_2												
	21_3												
	21_4												
	22_1												
	22_2												
	23_1												
	23_2												
	23_3												
	24_1												
24_2													
24_3													
<b>Total</b>													
<b>Σ</b>													

	<b>Total</b>	<b>5</b>	<b>8</b>	<b>7</b>	<b>5</b>	<b>5</b>	<b>5</b>	<b>8</b>	<b>6</b>	<b>2</b>	<b>0</b>	<b>6</b>	<b>9</b>
<b>Σ</b>	<b>66</b>	<b>25</b>			<b>24</b>			<b>17</b>					

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation