Övningsprov 1 - Ma3c

1. Derivera funktionerna och förenkla om möjligt

a) $f(x) = x^3 + 1$

b) $y = 2x + x^2$

c) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + x$

d) $y = \frac{3}{x} + 4$

e) $f(x) = x^{\frac{4}{5}} + 2\sqrt{x}$

f) $f(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}}$

g) $f(x) = ax^{a+1} + \frac{1}{x^b}$

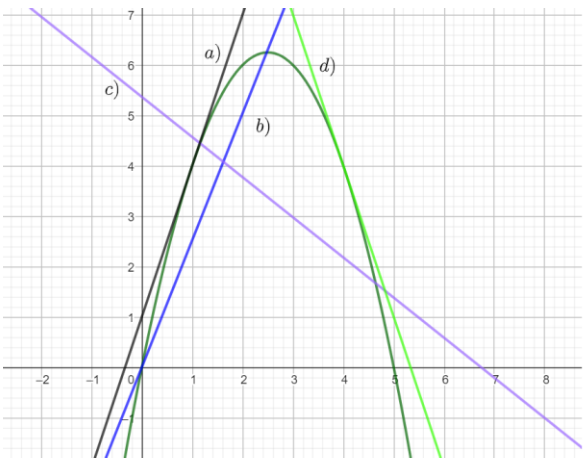
2. Bestäm om $f'(x)$ är större, lika med eller mindre än noll för funktionen $f(x) = x^2 - x$ för följande x-värden

   a) $x = 1$

   b) $x = -3$

   c) $x = \frac{1}{2}$

3. Bestäm vilka räta linjer som är sekanter respektive tangenter för följande bild



4. Lös ekvationerna

a) $x^2 - 6x + 5 = 0$

b) $x^3 - 10x^2 + 16x = 0$

c) $(x^2 - 4)(x + 1) = 0$

d) $|y| = 7$

e) $|y - 3| = -1$

f) $|2x - 5| = x + 1$

g) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

h) $\left(\sqrt{x + 1}\right)^3 - 2\left(\sqrt{x + 1}\right)^2 + \sqrt{x + 1} = 0$

5. Skriv följande uttryck i faktorform

a) $x^2 - 16$

b) $x^2 - 2x - 8$

c) $x^2 + x - 6$

d) $x^3 - 4x^2 + 4x$

6. Bestäm gränsvärdet

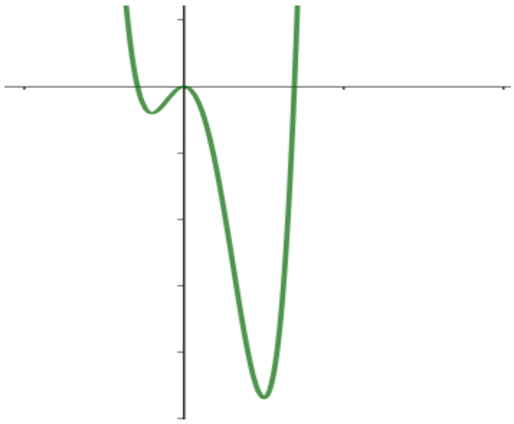
a) $\lim_{x \to -2} 3x + 6$

b) $\lim_{x \to 10} \frac{x^2 - 20x + 100}{x^2 - 100}$

c) $\lim_{\mathrm{h} \to \infty} 3 + \frac{h}{h^2} + h^{-3}$

d) $\lim_{t \to \infty} \frac{7t - 12}{3t + 120}$

7. Nedan ser du funktionen $f(x)$ hur många lösningar har ekvationen $f'(x) = 0$ och $f(x) = 0$



8. För vilka värden är det rationella uttrycket odefinierat?

a) $\frac{2x+1}{x^2-16}$

b) $\frac{x+143}{(x+1)(x-10)}$

c) $\frac{1}{(x-6)^{10}-(x-6)^9}$

9. Förenkla de rationella uttrycken

a) $\frac{2x^2+4x}{x}$

b) $\frac{2x^2+4x+2}{5x+5}$

c) $\frac{x^3-9x}{x^2-3x}$

d) $\frac{x^2+2x-15}{x^2-25}$

10. Ställ upp vilket gränsvärde du ska lösa för att bestämma derivatan för funktionen med hjälp av derivatans definition. *Notera du behöver inte lösa gränsvärdet* ***bara*** *ställa upp gränsvärdet*

a) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

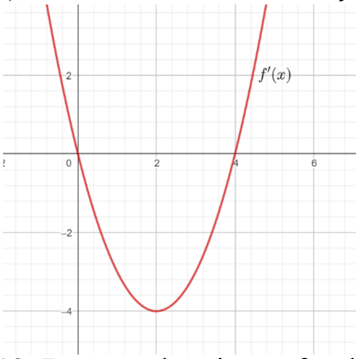
b) $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

11. Nedan ser du derivata-funktionen $f'(x)$ för någon funktion $f(x)$

a) Vilken grad har funktionen $f(x)$?

b) Hur många extrempunkter har $f(x)$

c) För vilka x-värden har $f(x)$ en maximipunkt eller minimipunkt



12. Bestäm ekvationen för den tangent som tangerar funktionerna i $x = 4$

a) $f(x) = x^2 + x + 1$

b) $f(x) = \sqrt{x} + x$

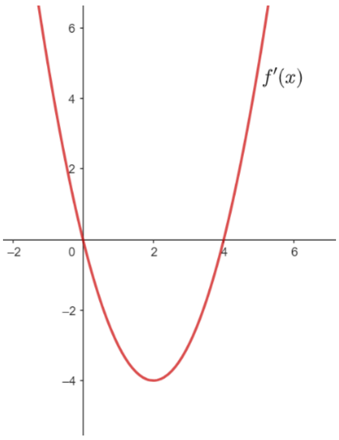
13. Visa med hjälp av derivata att funktionen $f(x) = x^3 + 3x$ bara skär x-axeln en gång.

14. Lös ekvationen $f'(x) = -4$ för funktionen $f(x) = \frac{2}{x}$

15. Bestäm derivatan för funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$ med hjälp av derivatans definition

16. Visa med hjälp av derivatans definition att funktionen $f(x) = \frac{1}{x+1}$ har derivatan $\frac{-1}{(x+1)^2}$

17. Nedan ser du grafen till derivatafunktionen för $f(x)$. Du vet att $f(0) = 12$. Undersök om $f(0) > f(4)$. Motivering krävs för fullständig poäng.



18. Undersök vilka värden som är möjliga för konstanterna a och b för att en funktion på formen $f(x) = ax^3 - bx$ ska ha exakt två lösningar på ekvationen $f'(x) = 0$

19. Visa att tangenterna som tangerar funktionen $f(x) = ax^5 - bx^3 + cx$ i $x = \pm q$ alltid är parallella.

20. För en andragradsfunktion $f(x)$ vet du att

- $f(\text{-}5) = 0$
- $f'(\text{-}1) = 0$
- $f'(1) = 8$

Bestäm funktionen $f(x)$

Lösningsförslag övningsprov 1

1. a) $f(x) = x^3 + 1$
$f'(x) = 3x^2$

b) $y = 2x + x^2$
$y' = 2 + 2x$

c) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + x$
$f'(x) = 2 \cdot \frac{3}{2}x + 1$
$= 3x + 1$

d) $y = \frac{3}{x} + 4 = 3x^{-1} + 4$
$y' = -3x^{-2} = \frac{-3}{x^2}$

e) $f(x) = x^{\frac{4}{5}} + 2\sqrt{x}$
$= x^{\frac{4}{5}} + 2x^{\frac{1}{2}}$
$f'(x) = \frac{4}{5}x^{\frac{4}{5}-1} + x^{-\frac{1}{2}}$
$= \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

f) $f(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}} = \frac{-1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$
$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^{3/2}}$
$= \frac{1}{4x\sqrt{x}}$

g) $f(x) = ax^{a+1} + \frac{1}{x^b} = ax^{a+1} + x^{-b}$
$f'(x) = (a+1)a\,x^{a+1-1} - bx^{-b-1} =$
$= (a+1)a\,x^a - bx^{-(b+1)} = (a+1)a\,x^a - \frac{b}{x^{b+1}}$

2. $f(x) = x^2 - x \quad f'(x) = 2x - 1$

a) $f'(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \quad f'(1) > 0$

b) $f'(-3) = 2 \cdot (-3) - 1 = -7 \quad f'(-3) < 0$

c) $f'(\frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0 \quad f'(\frac{1}{2}) = 0$

3. a) och d) tangenter
c) och b) sekanter

4. a) $x^2 - 6x + 5 = 0$
$x = 3 \pm \sqrt{9-5}$
$= 3 \pm \sqrt{4}$
$x_1 = 3 + 2 = 5$
$x_2 = 3 - 2 = 1$

4. b) $x^3 - 10x^2 + 16x = 0$
$x\underbrace{(x^2 - 10x + 16)}_{=0} = 0 \quad x_1 = 0$
$x^2 - 10x + 16 = 0$
$x = 5 \pm \sqrt{25-16}$
$= 5 \pm \sqrt{9}$
$= 5 \pm 3 \quad x_2 = 2$
$x_3 = 8$

c) $(x^2 - 4)(x + 1) = 0$
$x^2 - 4 = 0 \qquad x + 1 = 0$
$x^2 = 4 \qquad x = -1$
$x_1 = 2$
$x_2 = -2$

4. d) $|y| = 7$ $y_1 = 7$ $y_2 = -7$

e) $|y-3| = -1$

Saknar lösningar, inget absolutbelopp kan bli neg.

f) $|2x-5| = x+1$

fall 1. $2x-5 = x+1$

$x = 6$

fall 2. $2x-5 = -(x+1)$

$2x-5 = -x-1$

$3x = 4$

$x = \frac{4}{3}$

g) $x^4-10x^2+9=0$ $x^2 = t$ substitution

$t^2-10t+9=0$

$t = 5 \pm \sqrt{5^2-9}$

$= 5 \pm \sqrt{16}$

$t = 5 \pm 4$ $t_1 = 9$ $t_2 = 1$

$x^2 = 9$ $x_1 = 3$ $x_2 = -3$

$x^2 = 1$ $x_3 = 1$ $x_4 = -1$

h) $\left(\sqrt{x+1}\right)^3 - 2\left(\sqrt{x+1}\right)^2 + \sqrt{x+1} = 0$ $t = \sqrt{x+1}$ substitution

$t^3-2t^2+t=0$

$t(t^2-2t+1)=0$ $t_1 = 0$ $0 = \sqrt{x+1}$ $x_1 = -1$

$t^2-2t+1=0$

$t = 1 \pm \sqrt{1-1}$ $t_2 = 1$ $\sqrt{x+1} = 1$ $x = 0$

5. a) $x^2-16 = (x+4)(x-4)$

b) x^2-2x-8 lös $=0$ för att få fram nollställen

$x^2-2x-8=0$ $x = 1 \pm \sqrt{1+8}$
$= 1 \pm 3$ $x_1 = 1$ $x_2 = -2$

$x^2-2x-8 = (x-1)(x+2)$

c) x^2+x-6 lös $=0$

$x^2+x-6=0$

$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+6}$

$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{24}{4}}$

$= -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$ $x_1 = 2$ $x_2 = -3$

$x^2+x-6 = (x-2)(x+3)$

d) $x^3-4x^2+4x = x(x^2-4x+4) = x(x-2)^2$

6. a) $\lim_{x \to -2} 3x+6 = -6+6 = 0$

b) $\lim_{x \to 10} \frac{x^2-20x+100}{x^2-100}$ = nämnaren blir noll förenkla!

$= \lim_{x \to 10} \frac{(x-10)^2}{(x+10)(x-10)} = \lim_{x \to 10} \frac{x-10}{x+10} = 0$

6. c) $\lim_{h \to \infty} 3 + \frac{h}{h^2} + h^{-3} = \lim_{h \to \infty} 3 + \frac{1}{h} + \frac{1}{h^3}$ $\frac{1}{h}$ och $\frac{1}{h^3}$ försummas då $h \to \infty$

$= 3$

d) $\lim_{t \to \infty} \frac{7t-12}{3t+120} = \lim_{t \to \infty} \frac{t(7-\frac{12}{t})}{t(3+\frac{120}{t})} = \lim_{t \to \infty} \frac{7-\frac{12}{t}}{3+\frac{120}{t}}$ $\frac{12}{t}$ och $\frac{120}{t}$ försummas då $t \to \infty$

7. Lösningar $f(x) = 0$, nollställen: 3 lösningar

Lösningar $f'(x) = 0$, extrempunkter: 3 lösningar

8. a) $\frac{2x+1}{x^2-16}$ odef. då nämnaren lika med noll

$x^2 - 16 = 0$

$x^2 = 16$

$x = \pm 4$

b) $\frac{x+143}{(x+1)(x-10)}$ $(x+1)(x-10) = 0$

$x_1 = -1$

$x_2 = 10$

c) $\frac{1}{(x-6)^{10} - (x-6)^9}$ $(x-6)^{10} - (x-6)^9 = 0$

$(x-6)^9((x-6)-1) = 0$

$(x-6)^9(x-7) = 0$ $x_1 = 6$, $x_2 = 7$

9. a) $\frac{2x^2+4x}{x} = \frac{x(2x+4)}{x} = 2x+4$

b) $\frac{2x^2+4x+2}{5x+5} = \frac{2(x^2+2x+1)}{5(x+1)} = \frac{2\cancel{(x+1)}^2}{5\cancel{(x+1)}} = \frac{2x+2}{5}$

c) $\frac{x^3-9x}{x^2-3x} = \frac{\cancel{x}(x^2-9)}{\cancel{x}(x-3)} = \frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}} = x+3$

d) $\frac{x^2+2x-15}{x^2-25} = \frac{\overset{\text{faktorform}}{x^2+2x-15}}{(x+5)(x-5)} = \frac{\cancel{(x+5)}(x-3)}{\cancel{(x+5)}(x-5)} = \frac{x-3}{x-5}$

$x = -1 \pm \sqrt{1+15}$

-1 ± 4 $x_1 = -5$

$x_2 = 3$

10. a) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}{h}$ b) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{2(x+h)+1}-\sqrt{2x+1}}{h}$

11. a) 3 b) 2 c) $x=0$ maxi $x=4$ minimi

hitta pos derivatan

12. a) $f(x)=x^2+x+1$ $f'(4)=2\cdot 4+1=9$ tangenten har $k=9$

$f'(x)=2x+1$

$y=9x+m$ Sök m, hitta gemensampunkt

$f(4)=21$

$21=4\cdot 9+m$

$21=36+m$

$m=-15$

$\boxed{y=9x-15}$

b) $f(x)=\sqrt{x}+x=x^{\frac{1}{2}}+x$

$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+1=\frac{1}{2\sqrt{x}}+1$ $f'(4)=\frac{1}{2\cdot 2}+1=\frac{5}{4}$ $y=\frac{5}{4}x+m$

$f(4)=\sqrt{4}+4=6$

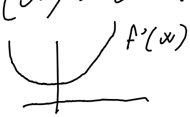
$6=\frac{5}{4}\cdot 4+m$

$6=5+m$

$m=1$

13. $f(x)=x^3+3x$ $f'(x)=3x^2+3$ derivatan är alltid positiv

därför skär den x-axeln bara en gång



14. $f(x)=\frac{2}{x}$ $f'(x)=-2x^{-2}=\frac{-2}{x^2}$ $f'(x)=-4$

$=2\cdot x^{-1}$

$-4=\frac{-2}{x^2}$ $x^2=\frac{1}{2}$

$-4x^2=-2$ $x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

15. $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $\quad f(x)=ax^2+bx+c$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)^2+b(x+h)+c-(ax^2+bx+c)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{ax^2}+2axh+ah^2+\cancel{bx}+bh+\cancel{c}-\cancel{ax^2}-\cancel{bx}-\cancel{c}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2axh+ah^2+bh}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2ax+ah+b)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}2ax+ah+b=2ax+b$$

$\square$

16. $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $\quad f(x)=\dfrac{1}{x+1}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h+1}-\frac{1}{x+1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x+1}{(x+1)(x+h+1)}-\frac{(x+h+1)}{(x+1)(x+h+1)}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\cancel{x}+\cancel{1}-\cancel{x}-h-\cancel{1}}{(x+1)(x+h+1)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-\cancel{h}}{(x+1)(x+h+1)}}{\frac{\cancel{h}}{1}}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+1)(x+h+1)}=\frac{-1}{(x+1)^2}$$

$\square$

17. Eftersom $f'(x)<0$ mellan $0<x<4$, alltså har $f(x)$ en nedåtgående trend därför bör $f(0)>f(4)$

18. $f(x)=ax^3-bx$ Vi vill ha 2 lösningar för $f'(x)=0$

$f'(x)=3ax^2-b$ $\quad 3ax^2-b=0$

$x^2=\dfrac{b}{3a}$ $\quad$ två lösningar om a och b har samma tecken alltså båda måste vara positiva eller negativa

$x=\pm\sqrt{\dfrac{b}{3a}}$

19. $f(x) = ax^5 - bx^3 + cx$

$f'(x) = 5ax^4 - 3bx^2 + c$

$f'(q) = 5aq^4 - 3bq^2 + c$

$f'(-q) = 5a(-q)^4 - 3b(-q)^2 + c = 5aq^4 - 3bq^2 + c$

$f'(q) = f'(-q)$ snyggt, de har samma k-värde tangenterna

$\square$

20. $f(x) = ax^2 + bx + c$ $\quad f'(x) = 2ax + b$

$f(-5) = 0$

$f'(-1) = 0$

$f'(1) = 8$

$f'(-1) = -2a + b = 0$

$f'(1) = 2a + b = 8$

$-2a + b = 0$ (I)

$2a + b = 8$ (II)

(I) $-2a + b = 0$

$b = 2a$

(II) $2a + b = 2a + 2a = 8$

$4a = 8$

$a = 2$

$b = 4$

$f(x) = 2x^2 + 4x + c$

$f(-5) = 0$

$2 \cdot (-5)^2 - 20 + c = 0$

$c = -30$ svar: $f(x) = 2x^2 + 4x - 30$