

## Övningsprov 1 - Ma3c

1. Derivera funktionerna och förenkla om möjligt

a)  $f(x) = x^3 + 1$

b)  $y = 2x + x^2$

c)  $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + x$

d)  $y = \frac{3}{x} + 4$

e)  $f(x) = x^{\frac{4}{5}} + 2\sqrt{x}$

f)  $f(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}}$

g)  $f(x) = ax^{a+1} + \frac{1}{x^b}$

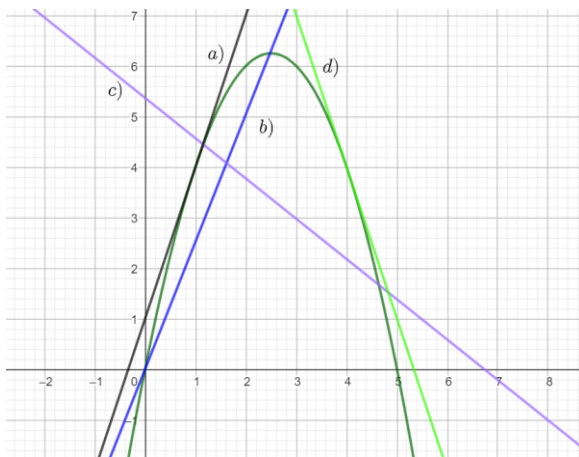
2. Bestäm om  $f'(x)$  är större, lika med eller mindre än noll för funktionen  $f(x) = x^2 - x$  för följande  $x$ -värden

a)  $x = 1$

b)  $x = -3$

c)  $x = \frac{1}{2}$

3. Bestäm vilka räta linjer som är sekanters respektive tangenter för följande bild



4. Lös ekvationerna

a)  $x^2 - 6x + 5 = 0$

b)  $x^3 - 10x^2 + 16x = 0$

c)  $(x^2 - 4)(x + 1) = 0$

d)  $|y| = 7$

e)  $|y - 3| = -1$

f)  $|2x - 5| = x + 1$

g)  $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

h)  $(\sqrt{x+1})^3 - 2(\sqrt{x+1})^2 + \sqrt{x+1} = 0$

5. Skriv följande uttryck i faktorform

a)  $x^2 - 16$

b)  $x^2 - 2x - 8$

c)  $x^2 + x - 6$

d)  $x^3 - 4x^2 + 4x$

6. Bestäm gränsvärdet

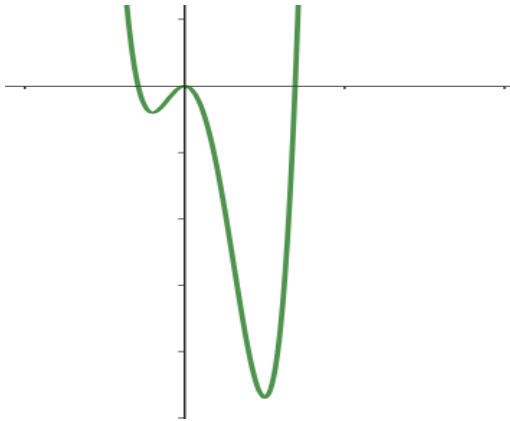
a)  $\lim_{x \rightarrow -2} 3x + 6$

b)  $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^2 - 20x + 100}{x^2 - 100}$

c)  $\lim_{h \rightarrow \infty} 3 + \frac{h}{h^2} + h^{-3}$

d)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{7t - 12}{3t + 120}$

7. Nedan ser du funktionen  $f(x)$  hur många lösningar har ekvationen  $f'(x) = 0$  och  $f(x) = 0$



8. För vilka värden är det rationella uttrycket odefinierat?

- a)  $\frac{2x+1}{x^2-16}$
- b)  $\frac{x+143}{(x+1)(x-10)}$
- c)  $\frac{1}{(x-6)^{10}-(x-6)^9}$

9. Förenkla de rationella uttrycken

- a)  $\frac{2x^2+4x}{x}$
- b)  $\frac{2x^2+4x+2}{5x+5}$
- c)  $\frac{x^3-9x}{x^2-3x}$
- d)  $\frac{x^2+2x-15}{x^2-25}$

10. Ställ upp vilket gränsvärde du ska lösa för att bestämma derivatan för funktionen med hjälp av derivatans definition. *Notera du behöver inte lösa gränsvärdet **bara** ställa upp gränsvärdet*

- a)  $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

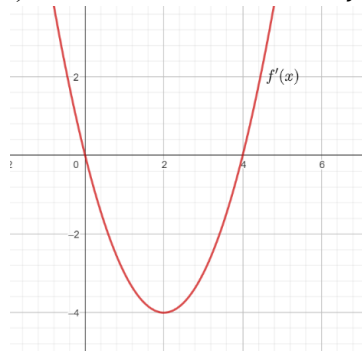
b)  $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

11. Nedan ser du derivata-funktionen  $f'(x)$  för någon funktion  $f(x)$

a) Vilken grad har funktionen  $f(x)$ ?

b) Hur många extrempunkter har  $f(x)$ ?

c) För vilka  $x$ -värden har  $f(x)$  en maximipunkt eller minimipunkt



12. Bestäm ekvationen för den tangent som tangerar funktionerna i  $x = 4$

a)  $f(x) = x^2 + x + 1$

b)  $f(x) = \sqrt{x} + x$

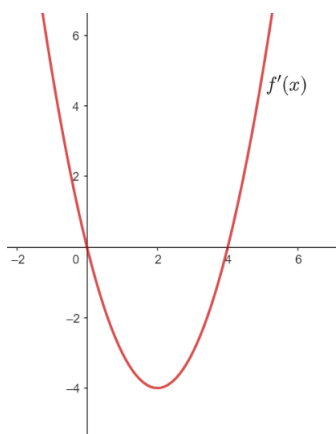
13. Visa med hjälp av derivata att funktionen  $f(x) = x^3 + 3x$  bara skär  $x$ -axeln en gång.

14. Lös ekvationen  $f'(x) = -4$  för funktionen  $f(x) = \frac{2}{x}$

15. Bestäm derivatan för funktionen  $f(x) = ax^2 + bx + c$  med hjälp av derivatans definition

16. Visa med hjälp av derivatans definition att funktionen  $f(x) = \frac{1}{x+1}$  har derivatan  $\frac{-1}{(x+1)^2}$

17. Nedan ser du grafen till derivatafunktionen för  $f(x)$ . Du vet att  $f(0) = 12$ . Undersök om  $f(0) > f(4)$ . Motivering krävs för fullständig poäng.



18. Undersök vilka värden som är möjliga för konstanterna  $a$  och  $b$  för att en funktion på formen  $f(x) = ax^3 - bx$  ska ha exakt två lösningar på ekvationen  $f'(x) = 0$

19. Visa att tangenterna som tangerar funktionen  $f(x) = ax^5 - bx^3 + cx$  i  $x = \pm q$  alltid är parallella.

20. För en andragsgradsfunktion  $f(x)$  vet du att

- $f(-5) = 0$
- $f'(-1) = 0$
- $f'(1) = 8$

Bestäm funktionen  $f(x)$

# Lösningstävling avsningsprov 1

1. a)  $f(x) = x^3 + 1$     b)  $y = 2x + x^2$     c)  $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + x$   
 $f'(x) = 3x^2$      $y' = 2 + 2x$      $f'(x) = 2 \cdot \frac{3}{2}x + 1$

$$= 3x + 1$$

d)  $y = \frac{3}{x} + 4 = 3x^{-1} + 4$     e)  $f(x) = x^{\frac{4}{5}} + 2\sqrt{x}$   
 $y' = -3x^{-2} = -\frac{3}{x^2}$      $= x^{\frac{4}{5}} + 2x^{\frac{1}{2}}$      $f'(x) = \frac{4}{5}x^{\frac{4}{5}-1} + x^{-\frac{1}{2}}$   
 $= \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

f)  $f(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^{3/2}}$   
 $= \frac{1}{4x\sqrt{x}}$

g)  $f(x) = ax^{a+1} + \frac{1}{x^b} = ax^{a+1} + x^{-b}$

$f'(x) = (a+1)ax^{a+1-1} - bx^{-b-1} =$   
 $= (a+1)ax^a - bx^{-(b+1)} = (a+1)ax^a - \frac{b}{x^{b+1}}$

2.  $f(x) = x^2 - x$      $f'(x) = 2x - 1$

3. a) och d) tangenter

c) och b) skärningar

a)  $f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$      $f'(1) > 0$

b)  $f'(-3) = 2 \cdot (-3) - 1 = -7$      $f'(-3) < 0$

c)  $f'(\frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$      $f'(\frac{1}{2}) = 0$

4. a)  $x^2 - 6x + 5 = 0$

$$x = 3 \pm \sqrt{9-5}$$

$$= 3 \pm \sqrt{4}$$

$$x_1 = 3 + 2 = 5$$

$$x_2 = 3 - 2 = 1$$

4. b)  $x^2 - 10x + 16 = 0$

$x(x^2 - 10x + 16) = 0$      $x_1 = 0$

$$x = 5 \pm \sqrt{25-16}$$

$$= 5 \pm \sqrt{9}$$

$$= 5 \pm 3 \quad x_2 = 2$$

$$x_3 = 8$$

c)  $(x^2 - 4)(x + 1) = 0$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x + 1 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = -1$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -2$$

$$4. d) |y| = 7$$

$$y_1 = 7 \quad e) |y-3| = -1$$

$$y_2 = -7$$

Solvarlösnings, inget absolutt värde  
kan bli neg.

$$f) |2x-5| = x+1$$

$$\text{fall 1. } 2x-5 = x+1 \\ x = 6$$

$$\text{fall 2. } 2x-5 = -(x+1)$$

$$2x-5 = -x-1$$

$$3x = 4$$

$$x = \frac{4}{3}$$

$$g) x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

$x^2 = t$  substitution

$$t^2 - 10t + 9 = 0$$

$$t = 5 \pm \sqrt{8^2 - 9}$$

$$= 5 \pm \sqrt{16}$$

$$t = 5 \pm 4$$

$$t_1 = 9$$

$$t_2 = 1$$

$$x^2 = 9$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -3$$

$$x^2 = 1$$

$$x_3 = 1$$

$$x_4 = -1$$

$$b) (\sqrt{x+1})^3 - 2(\sqrt{x+1}) + \sqrt{x+1} = 0$$

$t = \sqrt{x+1}$  substitution

$$t^3 - 2t^2 + t = 0$$

$$t(t^2 - 2t + 1) = 0 \quad t_1 = 0$$

$$0 = \sqrt{x+1} \\ x_1 = -1$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$t = 1 \pm \sqrt{1-1} \quad t_2 = 1$$

$$\sqrt{x+1} = 1$$

$$x = 0$$

$$5. a) x^2 - 16 = (x+4)(x-4)$$

b)  $x^2 - 2x - 8$  lös = 0 för att  
fö från näställen

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{1} = 1 \pm 3 \quad x_1 = 4 \quad x_2 = -2$$

$$x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$$

$$c) x^2 + x - 6 \text{ lös} = 0$$

$$d) x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x-2)^2$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6}$$

$$= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{24}{4}}$$

$$= -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \quad x_1 = 2$$

$$x_2 = -3$$

$$x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$$

$$6. a) \lim_{x \rightarrow -2} 3x + 6 = -6 + 6 = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x^2 - 20x + 100}{x^2 - 100} = \text{nämnenaren blir noll förnoll!}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{(x-10)^2}{(x+10)(x-10)} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x-10}{x+10} = 0$$

$$6. c) \lim_{h \rightarrow \infty} 3 + \frac{h}{h^2} + h^{-3} = \lim_{h \rightarrow \infty} 3 + \frac{1}{h} + \frac{1}{h^3} \quad \frac{1}{h} \text{ och } \frac{1}{h^3} \text{ försummas då } h \rightarrow \infty$$

$$= 3$$

$$d) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{7t-12}{3t+120} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t(7-\frac{12}{t})}{t(3+\frac{120}{t})} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{7-\frac{12}{t}}{3+\frac{120}{t}} \quad \frac{12}{t} \text{ och } \frac{120}{t} \text{ försummas då } t \rightarrow \infty$$

7. lösningar  $f(x) = 0$ , nollställen: 3 lösningar

lösningar  $f'(x) = 0$ , extrempunkter: 3 lösningar

8. a)  $\frac{2x+1}{x^2-16}$  odef. de nämnaren lika med noll

$$\begin{aligned} x^2-16=0 & \quad b) \frac{x+14^3}{(x+1)(x-10)} & (x+1)(x-10) = 0 \\ x^2=16 & & x_1 = -1 \\ x = \pm 4 & & x_2 = 10 \end{aligned}$$

$$c) \frac{1}{(x-6)^0 - (x-6)^9} \quad (x-6)^0 - (x-6)^9 = 0$$

$$(x-6)^9(x-6-1) = 0$$

$$(x-6)^9(x-7) = 0 \quad \begin{aligned} x_1 &= 6 \\ x_2 &= 7 \end{aligned}$$

$$9. a) \frac{2x^2+4x}{x} = \frac{x(2x+4)}{x} = 2x+4$$

$$b) \frac{2x^2+4x+2}{5x+5} = \frac{2(x^2+2x+1)}{5(x+1)} = \frac{2(\sqrt{x+1})^2}{5(\sqrt{x+1})} = \frac{2\sqrt{x+1}}{5}$$

$$\begin{aligned} x &= -1 \pm \sqrt{|1+15} \\ -1 \pm 4 & \quad x_1 = -5 \\ & \quad x_2 = 3 \end{aligned}$$

$$c) \frac{x^3-9x}{x^2-3x} = \frac{x(x^2-9)}{x(x-3)} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)} = x+3$$

$$d) \frac{x^2+2x-15}{x^2-25} = \frac{\overset{\text{faktorform}}{x^2+2x-15}}{(x+5)(x-5)} = \frac{(x+6)(x-3)}{(x+5)(x-5)} = \frac{x-3}{x-5}$$





$$15. f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h)^2 + b(x+h) + c - (ax^2 + bx + c)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a\cancel{x^2} + 2axh + ah^2 + b\cancel{x} + bh + c - a\cancel{x^2} - b\cancel{x} - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2axh + ah^2 + bh}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(2ax + ah + b)}{\cancel{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} 2ax + ah + b = 2ax + b$$

□

$$16. f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h+1} - \frac{1}{x+1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x+1}{(x+1)(x+h+1)} - \frac{(x+h+1)}{(x+1)(x+h+1)}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x+1} - \cancel{x+h+1}}{h(x+1)(x+h+1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{\cancel{h}(x+1)(x+h+1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(x+1)(x+h+1)} = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

17. Eftersom  $f'(x) < 0$  mellan  $0 < x < 4$ , alltså  
 har  $f(x)$  en nedåtående trend därför bör  $f(0) > f(4)$

□

18.  $f(x) = ax^3 - bx$  Vi vill ha 2 lösningar för  $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 3ax^2 - b \quad 3ax^2 - b = 0$$

$$x^2 = \frac{b}{3a} \quad \text{två lösningar om } a \text{ och } b \text{ har samma tecken alltså}$$

$x = \pm \sqrt{\frac{b}{3a}}$   
 båda måste vara positiva eller negativa

$$19. f(x) = ax^5 - bx^3 + cx$$

$$f'(x) = 5ax^4 - 3bx^2 + c$$

$$f'(9) = 5a9^4 - 3b9^2 + c$$

$$f'(-9) = 5a(-9)^4 - 3b(-9)^2 + c = 5a9^4 - 3b9^2 + c$$

$f(9) = f(-9)$  Smbogt, de har samme  $k$ -værdi tangentform

□

$$20. f(x) = ax^2 + bx + c \quad f'(x) = 2ax + b$$

$$f(-5) = 0$$

$$f'(-1) = 0$$

$$f'(1) = 8$$

$$f'(-1) = -2a + b = 0$$

$$f'(1) = 2a + b = 8$$

$$-2a + b = 0 \quad \text{Ⓘ}$$

$$2a + b = 8 \quad \text{Ⓢ}$$

$$\text{Ⓘ} \quad -2a + b = 0$$

$$b = 2a$$

$$\text{Ⓢ} \quad 2a + b = 2a + 2a = 8$$

$$4a = 8$$

$$a = 2$$

$$b = 4$$

$$f(x) = 2x^2 + 4x + c$$

$$f(-5) = 0$$

$$2 \cdot (-5)^2 - 20 + c = 0$$

$$c = -30 \quad \text{Svar: } f(x) = 2x^2 + 4x - 30$$