

Derivatan av $f(x) = a^x$ och tillämpningar och problemlösning

Vi vill kunna derivera $f(x) = a^x$. Vi vill utbyta talet e a^x gör att skriva om till $a^x = (e^{\ln a})^x$ eftersom $a = e^{\ln a}$

$$e^x = a \quad \ln a = x$$

Vi får då reglerna

$$f(x) = a^x \quad f'(x) = \ln a \cdot a^x$$

$$f(x) = a^{kx} \quad f'(x) = \ln a \cdot k \cdot a^x$$

Ex) Derivera funktionerna

$$a) f(x) = 2^x - e^x \quad f'(x) = \ln 2 \cdot 2^x - e^x$$

$$b) f(x) = 7^{2x} - 2x \quad f'(x) = \ln 7 \cdot 2 \cdot 7^{2x} - 2$$

Ex) Temperaturen $f(t)$ ° på kaffe i en termos gör att beskrivas med funktionen $f(t) = 92 \cdot e^{-0,097t}$ där t är timmar

Bestäm och tolka

$$a) f'(1) \quad a) f'(x) = -0,097 \cdot 92 e^{-0,097t} \quad f'(1) = -0,097 \cdot 92 e^{-0,097}$$
$$\approx -8,099$$

b) $f'(3)$ b) $f'(3) \approx -6,67$, kaffets temperatur minskar med 6,7 grader per timme efter 3 timmar

kaffets temperatur minskar med 8 grader per till efter en timme

Ex) I en förorenad sjö har Joakims forskarteam vidtagit en åtgärd som gjort att bakteriekoncentrationen minskat från 10^5 bakterier/liter till 10^1 bakterier/liter på 7 veckor.

a) Anta att bakterierna minskar exponentiellt, vilken modell beskriver bakteriekoncentrationen?

b) Teamet vet att förändringstakten måste ner till $300 \frac{\text{bakterier}}{\text{dag}}$ innan de kan vidta nästa åtgärd. Hur lång tid kommer det ta?

$$a) f(x) = C \cdot e^{kx} \quad f(0) = 10^5 \quad C = 10^5$$

$$f(7) = 10^1 \quad 10^1 = 10^5 \cdot e^{7k}$$

$$10^1 = e^{7k}$$

$$\ln 10^1 = 7k$$

$$k = \frac{\ln 10^1}{7}$$

$$\text{Svar: Modellen är } f(x) = 10^5 \cdot e^{\frac{\ln 10^1}{7} x}$$

b) Förändringstakten (derivatan): $300 \frac{\text{bakterier/liter}}{\text{dag}}$

Vi vill derivata $f(x)$ och söka vilket x $f'(x) = 300$

$$f'(x) = 10^5 \cdot \frac{\ln(10^1)}{7} \cdot e^{\frac{\ln(10^1)}{7} x} \quad 10^5 \cdot \frac{\ln(10^1)}{7} \cdot e^{\frac{\ln(10^1)}{7} x} = 300$$

$$e^{\frac{\ln(10^1)}{7} x} = \frac{300}{10^5 \cdot \frac{\ln(10^1)}{7}}$$

$$\frac{\ln(10^1)}{7} \cdot x = \ln \left(\frac{300}{10^5 \cdot \frac{\ln(10^1)}{7}} \right)$$

$$x = \frac{\ln \left(\frac{300}{10^5 \cdot \frac{\ln(10^1)}{7}} \right)}{\frac{\ln(10^1)}{7}} \approx 14$$

Svar: 14 dagar