Lite svårare uppgifter från hela kursen – Ma3c

Kapitel 1

1. Förenkla uttrycken

a) $\frac{a^2x-b^2y^2}{a\sqrt{x}+by}$

b) $\sqrt{\frac{x^{\frac{7}{2}}}{x\sqrt{x}}}$

c) $\frac{x^{\frac{5}{2}}\cdot y^2\cdot z^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x^2yz^3}}$

d) $\frac{2x^3-20x\sqrt{x}+50}{2x\sqrt{x}-10}$

e) $\frac{x^3-2x^2+x}{x^4+2x^3-3x^2}$

2. För vilket/vilka värden på x är det rationella uttrycket odefinierat $\frac{7+x}{\sqrt{4x+\sqrt{36}}}$

3. Lös ekvationen $\sqrt{\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-2x}} = 1$

4. Lös ekvationen $x^4 - 4x^3 = 5x^2$

5. En andragradsfunktion har följande egenskaper

- $f(a+3)$ är en minimipunkt.
- $f(a+6)$ är ett nollställe

Bestäm $f(a)$

6. Förenkla uttrycket så långt som möjligt $\frac{x^{2n-1}+4x^{n-1}}{x^{n-1}+\frac{2}{x^n}} + \frac{4}{x^n+2}$

7. En andragradsfunktion $f(x)$ har följande egenskaper

- $f(0) = 4$
- $f(1) = 10$
- $f(-2) = -2$

Bestäm $f(x)$

8. Beräkna $\left|\sqrt{21} - 5\right| + \left|\sqrt{21} + 10\right|$

9. En exponentialfunktion $f(x)$ gäller följande

- $f(2) = 6$
- $g(x) = \frac{2}{3}x + 10$ är lika med $f(x)$ då $x = 3$

Bestäm $f(x)$

10. Förenkla uttrycket så långt som möjligt $\frac{x^{4n}-1}{(x^n+1)(x^n-1)}$

11. Lös ekvationen $|x^2 - 2| = 2$

12. $n \geq 1$, för vilket/vilka x är uttrycket odefinierat? $\frac{x-1}{(x+1)^n+(x+1)^{n+1}-(x+1)^{n+2}}$

Kapitel 2

1. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n}\right)^{n-1} + 2$

2. Talet e kan definieras som $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

   Bestäm följande. Svara exakt.

   a) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$

   b) $\lim_{n\to\infty} 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$

3. Bestäm gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} \left(e^{-\frac{12n}{11}} + \frac{10}{n} + 2\right)^2$

4. $f'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{9+h}-3}{h}$ bestäm $f(x)$

5. Bestäm $f'(x)$ till $f(x) = \frac{a+b}{x} + \frac{c+d}{2x}$ med hjälp av derivatans definition

6. Funktionen $p(x)$ definieras som $p(x) = f(x) + g(x)$. Visa att om $f(x)$ är ett förstagradspolynom och $g(x)$ är ett andragradspolynom att $p'(x) = f'(x) + g'(x)$ med hjälp av derivatans definition.

   Förtydligande: Visa att $p'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{p(x+h)-p(x)}{h}$ är lika med $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

7. Derivera funktionerna och förenkla

   a) $f(x) = \frac{a^2x^2+b^2x}{ax}$

   b) $f(x) = \frac{e^{2x}-e^x}{2e^x}$

   c) $f(x) = e^{3x+ax} + x^{4a+5}$

   d) $f(x) = \frac{3^{2x}+9^{2x}+27^{2x}}{3^x}$

8. $f(x) = 4x^5 + 5x^4 + 10x^6$ bestäm $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

9. Visa med hjälp av derivatans definition att $f'(x) = \frac{-1}{(x+a)^2}$ för $f(x) = \frac{1}{x+a}$

10. $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)$ bestäm $f'(0)$ **tips:** multiplicera inte alla parenteser. Använd en annan metod.

Kapitel 3

1. Ni har inte redskap att derivera följande funktion $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ men om ni vet att derivatan för funktion är $f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - 2x \cdot e^x}{x^4}$ menar Joakim att ni kan lösa följande integral $\int_{-1}^{2} \frac{e^x \cdot x^2 - 2x \cdot e^x}{x^4} + x\,dx$. Beräkna integralen.

2. Skissa grafen till $f(x) = \frac{1}{x} + x + 2$ inkludera också eventuella asymptoter i skissen

3. Ge ett exempel på en funktion $f(x)$ som har följande egenskaper

- $f(a) = 2 \cdot F(a)$
- $f'(a) = 2 \cdot f(a)$
- $f''(a) = 2 \cdot f'(a)$

Där a är ett positivt heltal.

4. $f'(x) = e^{3x}$. $f(0) = \frac{1}{3}$

   Bestäm a algebraiskt om $\int_0^a f'(x)\,dx = \int_0^3 f(x)\ dx$

5. $f(x)$ är ett exempel på en tredjegradsfunktion som har två extrempunkter i $x = 1$ och $x = -3$

   $g(x)$ är ett exempel på en andragradsfunktion som har en extrempunkt i $x = -3$
   $g(0) = 0$

   Bestäm $p'(x)$ om $p(x) = f(x) + g(x)$

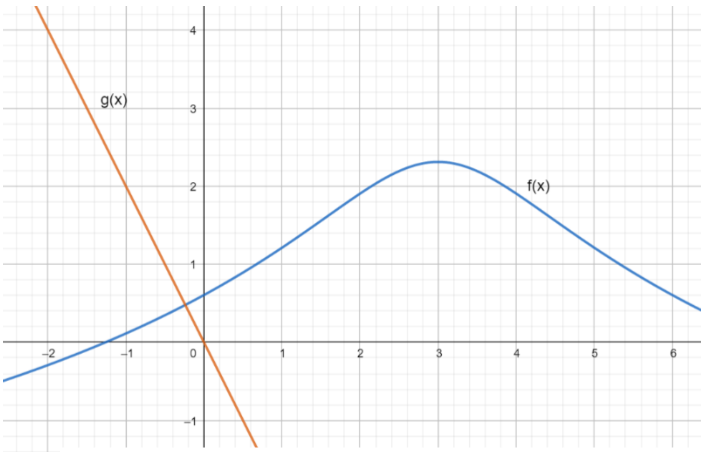
6. Funktionen $f(x) = \frac{1}{x} + 2x$ har en tangent $t(x)$ i $x = 1$ bestäm $\int_0^2 t(x)\ dx$

7. Bestäm ett exempel på fjärdegradsfunktionen som har följande egenskaper

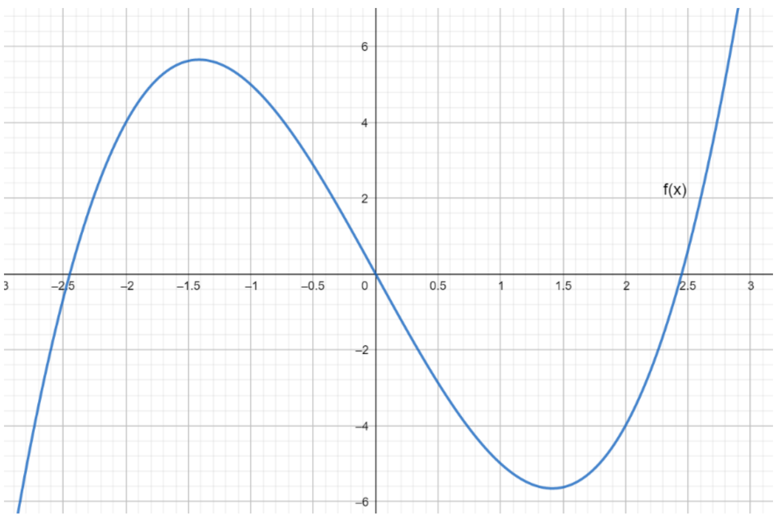
- Minimipunkt i $x = 1$
- Maximipunkt i $x = 0$
- Minimipunkt i $x = -1$

8. Beräkna $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\ dx$

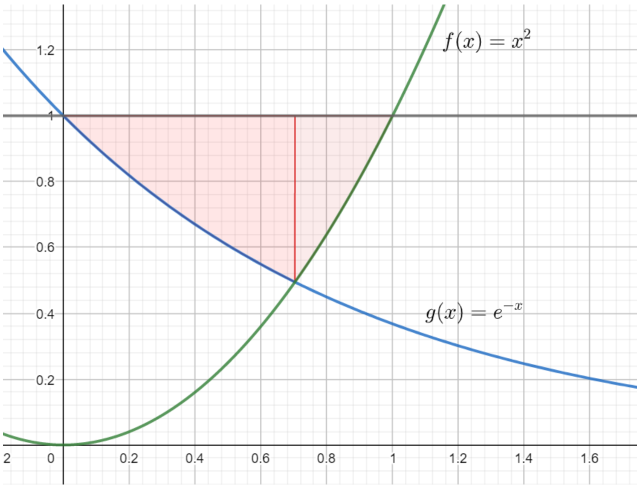
9. Nedan visas funktionerna $f(x)$ och $g(x)$. $h(x) = f(x) - g(x)$ bestäm $h'(3)$



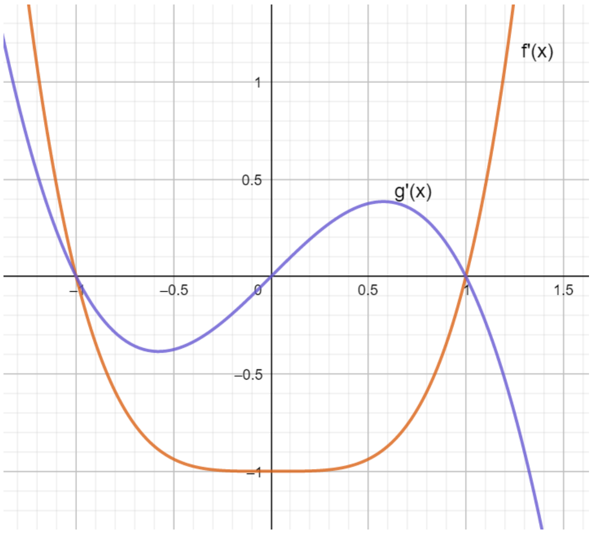
10. Beräkna integralen $\int_{-0.5}^{2} \mathrm{f}'(\mathrm{x})\,dx$ om funktionen nedan visar på $f(x)$



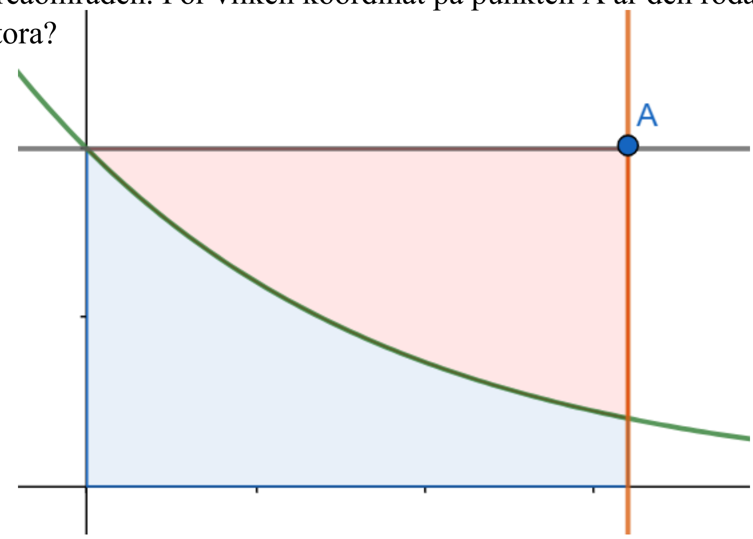
11. Bestäm den rödmarkerade arean. **Tips:** Använd geogebra



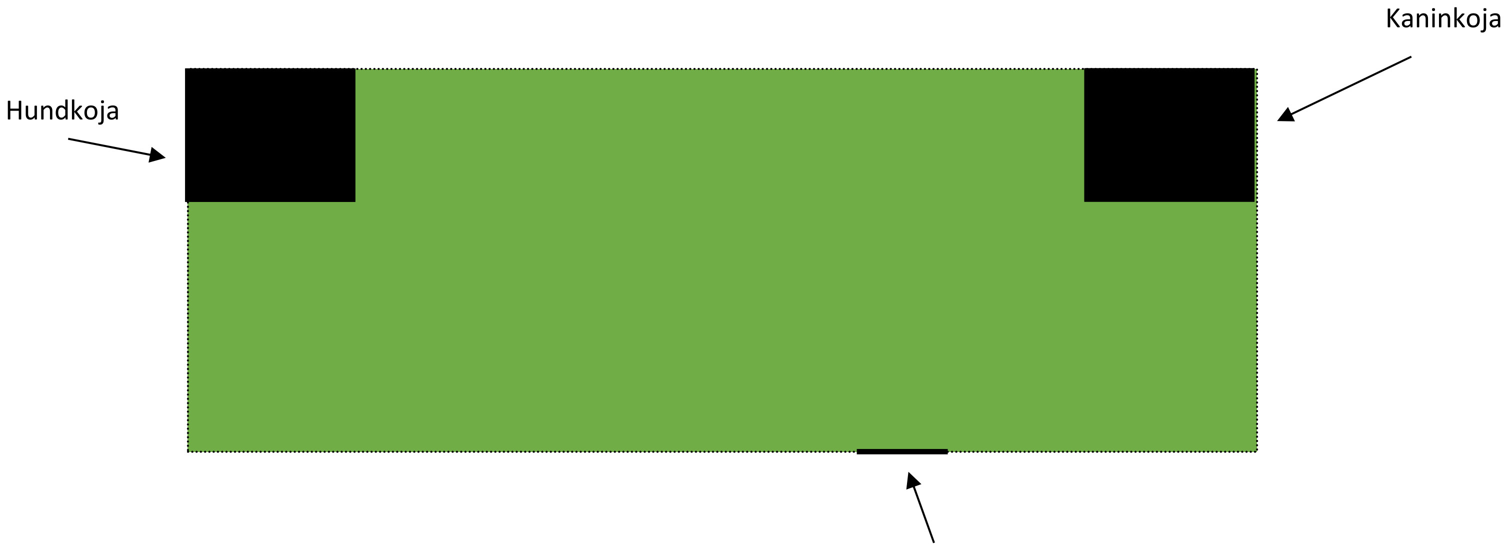
12. $h(x)$ definieras som $h(x) = g(x) + f(x)$ bestäm samtliga lösningar till ekvationen $h'(x) = 0$



13. Nedan visas $f(x) = e^{-x}$ och linjen $y = 1$ som tillsammans avgränsar två areaområden. För vilken koordinat på punkten A är den röda och den blå arean lika stora?

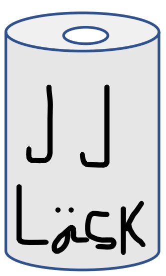


14. Joakim ska bygga ett inhägnat område. Han har totalt 100 meter staket som han kan använda. Han vill att hans hund och kanin ska få en varsin koja på det inhägnade området som båda ska vara 2 gånger 2 meter. Notera att där det är kojor behöver Joakim inte använda staket samt där dörren är. Hans skiss ser ut så här:

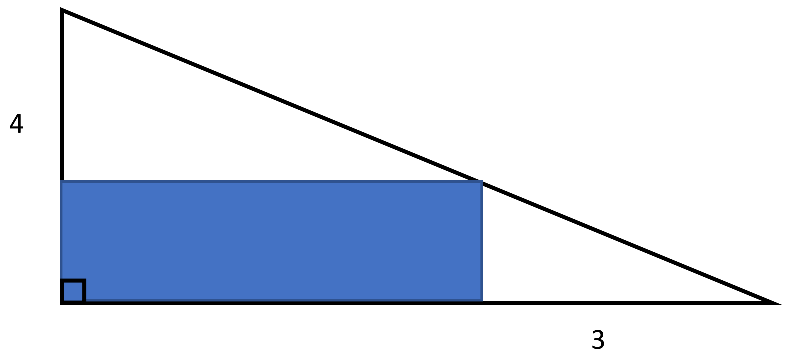


Vilken är den största arean som Joakims grönmarkerade område kan ha och vilka längder ska varje sida ha i det inhägnade området?

15. Joakims företag vill konstruera en burk som har en cirkulär botten som ska gå att fyllas med 0.5 dm^3 vätska. Men Joakims företag är såklart miljömedvetna, de vill använda så lite material som möjligt. Därför vill de minimera materialet för burken (så lite area som möjligt). Antag att toppen av burken har ett hål i form av en cirkel som har diametern 1 cm. Vilka dimensioner ska burken ha för att Joakims företag ska minimera materialåtgången, alltså så att burken innehåller så lite area som möjligt men samtidigt innehåller 0.5 dm^3 JJ-läsk?



16. Nedan ser du en rätvinklig triangel. Arean för den blå fyrhörningen med okända sidlängder är 12 a.e. Vilken är den minsta triangeln (i area) utifrån figuren som tillfredsställer kravet att ha en inritad fyrhörning som har arean 12 a.e?



17. Differensen av två tal är 40. Vilken är den minsta produkten du kan få av dessa tal och vilka två tal är det?

18. a) Visa att följande samband gäller för alla andragradsfunktioner

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)$$

b) Visa nu att det också stämmer för alla funktioner

19. Visa att följande samband gäller för alla funktioner

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Och

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x) + g(x)dx$$

20. Lös ekvationerna

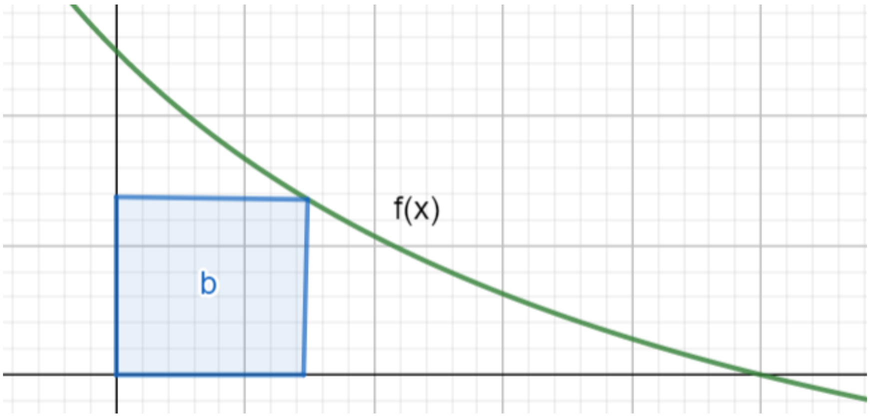
a) $e^{2x} - 8e^x + 16 = 0$

b) $e^{2x} - 4e^x - 5 = 0$

c) $e^x - 10e^{\frac{x}{2}} + 25 = 0$

21. Du jobbar på ett företag Joakims el som ska dra en elkabel från ett elkraftverk till en ö. Elkraftverket ligger två km från kusten. Ön ligger en km från kusten i östlig riktning och sedan två km från elkraftverket i sydlig riktning. Att dra kabeln på land kostar 100 kr/m och i vattnet kostar det 50 kr/m. Joakims el vill såklart minimera kostnaden för kabeln. Hur ska kabeln dras och vad kommer den kosta om Joakims el vill minimera kostnaden?

22. Funktionen $f(x) = \frac{1}{x+1} - 0.5$ skapar tillsammans med de positiva koordinataxlarna en fyrhörning.



a) För vilket x-värde skapas det en kvadrat under funktionen $f(x)$?

b) Vilken är den största arean som fyrhörningen kan anta?

23. Den generella funktionen $f(x) = a - bx^2$ har definitionsmängden $x \geq 0$ och $a \geq 0$. Tillsammans med de positiva koordinataxlarna skapar funktionen en area.

a) Bestäm ett generellt uttryck för den arean

b) En rät linje $r(x)$ går igenom $f(x)$ skärningspunkter med y- och x-axeln. Vad är förhållandet mellan $f(x)$:s area och $r(x)$:s area som begränsas av de positiva koordinataxlarna?

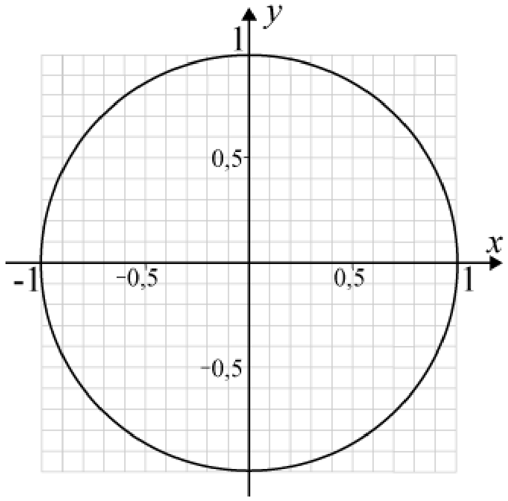
Kapitel 4

1. Visa att $sin120° \cdot sin60° + cos60° \cdot cos120° = cos60°$

2. Visa att $tan45° = \frac{sin90° - sin45°}{cos90° - cos45° + 1}$

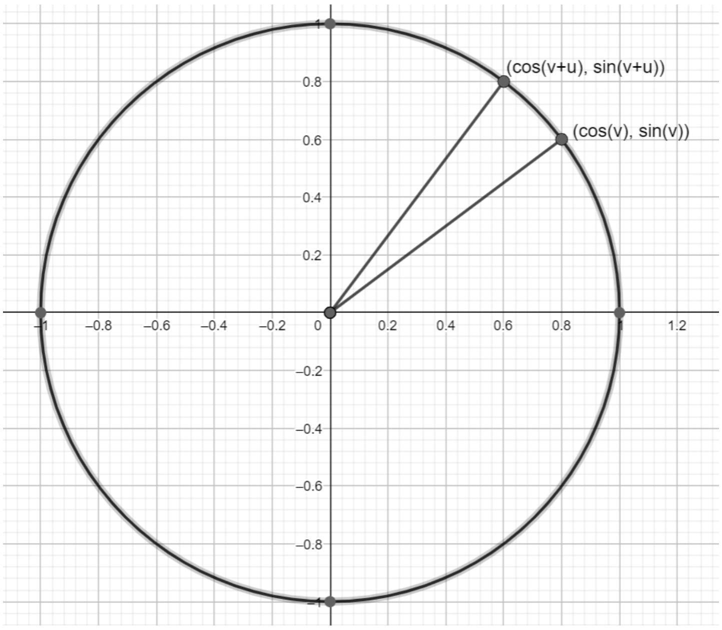
3. Bestäm en vinkel v i enhetscirkeln som du vet värdena på $sinv$ och $cosv$. Visa sedan algebraiskt att följande samband stämmer

$$sinv \cdot sinv + cosv \cdot cosv + sin2v = 1 + 2 \cdot sinv \cdot cosv$$



4. På enhetscirkeln finns två punkter utmarkerade. Visa att följande samband gäller

$$\left(sin^2(v+u) + sin^2(v)\right) - \left(cos^2(v+u) + cos^2(v)\right) = 0$$



Kap 1 Lösningar Lite svårare uppg Ma3c

Kapitel 1

1. Förenkla uttrycken:

a) $\dfrac{a^2x - b^2y^2}{a\sqrt{x} + by} = \dfrac{\cancel{(a\sqrt{x}+by)}(a\sqrt{x}-by)}{\cancel{a\sqrt{x}+by}} = \underline{a\sqrt{x} - by}$

b) $\sqrt{\dfrac{x^{7/2}}{x\sqrt{x}}} = \sqrt{\dfrac{x^{7/2}}{x \cdot x^{1/2}}} = \sqrt{\dfrac{x^{7/2}}{x^{3/2}}} = \sqrt{x^{7/2-3/2}} = \sqrt{x^2} = \underline{x}$

c) $\dfrac{x^{5/2} \cdot y^2 \cdot z^{3/2}}{\sqrt{x^2yz^3}} = \dfrac{x^{5/2} \cdot y^2 \cdot z^{3/2}}{(x^2yz^3)^{1/2}} = \dfrac{x^{5/2} \cdot y^2 \cdot z^{3/2}}{x^1 \cdot y^{1/2} \cdot z^{3/2}} = x^{5/2-1} \cdot y^{2-\frac{1}{2}} \cdot \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{z^0} = \underline{x^{3/2} \cdot y^{3/2}}$

d) $\dfrac{2x^3 - 20x\sqrt{x} + 50}{2x\sqrt{x} - 10} = \dfrac{\cancel{2}(x^3 - 10x\sqrt{x} + 25)}{\cancel{2}(x\sqrt{x} - 5)} = \dfrac{(x\sqrt{x} - 5)^{\cancel{2}}}{\cancel{x\sqrt{x} - 5}} = x\sqrt{x} - 5$

e) $\dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x^4 + 2x^3 - 3x^2} = \dfrac{\cancel{x}(x^2 - 2x + 1)}{x^{\cancel{2}}(x^2 + 2x - 3)} = \dfrac{(x-1)^{\cancel{2}}}{x\cancel{(x-1)}(x+3)} = \dfrac{x-1}{x(x+3)}$

Nollställen ger faktorerna

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$x = -1 \pm \sqrt{1+3}$

$x = -1 \pm 2$

$x_1 = 1 \quad x_2 = -3$

2. För vilket/vilka värden på x är det rationella uttrycket odefinierat $\dfrac{7+x}{\sqrt{4x+\sqrt{36}}}$

Då nämnaren är noll dvs då

$4x + \sqrt{36} = 0$

$x = -\dfrac{\sqrt{36}}{4} = -\dfrac{6}{4} = -\dfrac{3}{2}$

Eller då $\quad 4x + \sqrt{36} < 0$

$4x + 6 < 0$

$4x < -6$

$x < -\dfrac{6}{4}$ $\qquad$ Dvs då $x \leq -\dfrac{3}{2}$

$x < -\frac{6}{4}$

$x < -\frac{3}{2}$ Dvs då $x \leq -\frac{3}{2}$

3. Lös ekvationen $\sqrt{\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-2x}} = 1$

Kvadrera båda led – men se då upp för falska rötter, kontrollera lösningar!

$$\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-2x} = 1$$

$$\frac{\cancel{x}(x^2-4x+4)}{\cancel{x}(x-2)} = 1$$

$$\frac{(x-2)^{\cancel{2}}}{\cancel{x-2}} = 1$$

$$x-2 = 1$$

$$x = 3$$

Kontroll:

$$VL = \sqrt{\frac{3^3-4\cdot 3^2+4\cdot 3}{3^2-2\cdot 3}} = \sqrt{\frac{27-36+12}{3}} = \sqrt{\frac{39-36}{3}} = \sqrt{1} = 1$$

$VL = HL$ $x = 3$ är en lösning!

4. Lös ekvationen $x^4 - 4x^3 = 5x^2$

$$x^4 - 4x^3 - 5x^2 = 0$$

$$x^2(x^2-4x-5) = 0$$

$x^2 = 0$ el $x^2-4x-5 = 0$

$\underline{x_{1,2} = 0}$ $x = 2 \pm \sqrt{4+5}$

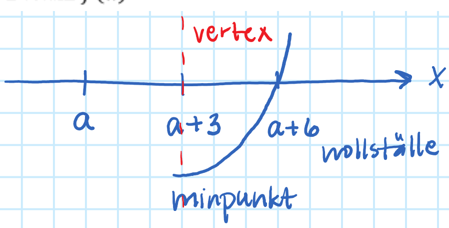
$$x = 2 \pm 3$$

$\underline{x_3 = 5}$ $\underline{x_4 = -1}$

5. En andragradsfunktion har följande egenskaper

- $f(a+3)$ är en minimipunkt.
- $f(a+6)$ är ett nollställe

Bestäm $f(a)$



a ligger lika långt från symmetrilinjen ($a+3$) som $a+6$ och har alltså samma y-värde

$f(a) = 0$.

6. Förenkla uttrycket så långt som möjligt $\frac{x^{2n-1}+4x^{n-1}}{x^{n-1}+\frac{2}{x^n}}+\frac{4}{x^n+2}$

$$\frac{x(x^{2n-1}+4x^{n-1})}{x(x^{n-1}+\frac{2}{x^n})}+\frac{4}{x^n+2}=\frac{x^{2n}+4x^n}{x^n+\frac{2}{x^{n-1}}}+\frac{4}{x^n+2}=\frac{(x^n+2)(x^{2n}+4x^n)}{(x^n+2)(x^n+\frac{2}{x^{n-1}})}+\frac{4(x^n+\frac{2}{x^{n-1}})}{(x^n+2)(x^n+\frac{2}{x^{n-1}})}=$$

förläng m x

$$=\frac{(x^n+2)(x^{2n}+4x^n)+4(x^n+\frac{2}{x^{n-1}})}{(x^n+2)(x^n+\frac{2}{x^{n-1}})}=\frac{x^{3n}+4x^{2n}+2x^{2n}+8x^n+4x^n+\frac{8}{x^{n-1}}}{(x^n+2)(x^n+\frac{2}{x^{n-1}})}=$$

ej klar.

7. $f(x)=ax^2+bx+c$

$f(0)=4 \Rightarrow c=4$

$f(x)=ax^2+bx+4$

$f(1)=10 \Rightarrow a+b+4=10 \quad b=6-a$

$f(-2)=-2 \Rightarrow 4a-2b+4=-2$

$4a-2(6-a)=-6$

$4a-12+2a=-6$

$6a=6$

$a=1 \quad b=6-a=5$

$\underline{f(x)=x^2+5x+4}$

8. $|\underbrace{\sqrt{21}-5}_{<0}|+|\sqrt{21}+10|=5-\sqrt{21}+\sqrt{21}+10=\underline{15}$

9. En exponentialfunktion $f(x)$ gäller följande

- $f(2)=6$
- $g(x)=\frac{2}{3}x+10$ är lika med $f(x)$ då $x=3$

Bestäm $f(x)$

$f(x)=c\cdot a^x$

$f(2)=c\cdot a^2$

$f(2)=6 \quad c\cdot a^2=6$

$c=6/a^2$

$f(x)=\frac{6}{a^2}\cdot a^x$

$g(x)=\frac{2}{3}x+10$

$g(3)=2+10=12$

$g(x)=f(x)$ då $x=3$

$\frac{6}{a^2}\cdot a^3=12$

$6a=12$

$a = 2 \qquad c = \frac{6}{a^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$$f(x) = \frac{3}{2} \cdot 2^x$$

10. Förenkla uttrycket så långt som möjligt $\frac{x^{4n}-1}{(x^n+1)(x^n-1)}$

$$\frac{x^{4n}-1}{(x^{2n}-1)^2} = \frac{(x^{2n}+1)\cancel{(x^{2n}-1)}}{(x^{2n}-1)^{\cancel{2}}} = \frac{x^{2n}+1}{x^{2n}-1}$$

11. $|x^2-2| = 2$

$x^2 - 2 = 2 \qquad x^2 - 2 = -2$

$x^2 = 4 \qquad x^2 = 0$

$x_{1,2} = \pm 2 \qquad x_3 = 0$

12. $n \geq 1$, för vilket/vilka x är uttrycket odefinierat? $\frac{x-1}{(x+1)^n+(x+1)^{n+1}-(x+1)^{n+2}}$

$$\frac{x-1}{(x+1)^n(1+(x+1)-(x+1)^2)} = \frac{x-1}{(x+1)^n(1+x+1-x^2-2x-1)}$$

$$= \frac{x-1}{(x+1)^n(-x^2-x+1)}$$

uttrycket är ej def då $x+1=0$ dvs $x=-1$

eller då $-x^2-x+1=0$ dvs då

$x^2+x-1=0$

$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{4}{4}} \qquad x = -\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Kap 2 Lösningar lite svårare uppgifter

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}\right)^{n-1}+2$ $= 0 + 2 = 2$

2. Talet e kan definieras som $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

   Bestäm följande. Svara exakt.

   a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$ $= e^3$

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} 2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$ $= 2e^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{e}$

3. Bestäm gränsvärdet $\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{-\frac{12n}{11}}+\frac{10}{n}+2\right)^2$ $= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{e^{\frac{12n}{11}}}+\frac{10}{n}+2\right)^2 =$

$= 2^2 = 4$ eftersom $\frac{1}{e^{\frac{12n}{11}}} \to 0$ då $n\to\infty$ och $\frac{10}{n}\to 0$ då $n\to\infty$

4. $f'(4) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{9+h}-3}{h}$ bestäm $f(x)$

$f'(4) = \lim\limits_{h\to} \dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}$

$f(4) = 3$ $\quad f(4+h) = \sqrt{9+h}$ $\quad$ dvs $f(4) = \sqrt{9} = 3$ så

$\underline{f(x) = \sqrt{x+5}}$

5. Bestäm $f'(x)$ till $f(x) = \frac{a+b}{x}+\frac{c+d}{2x}$ med hjälp av derivatans definition

$f(x+h) = \dfrac{a+b}{x+h}+\dfrac{c+d}{2(x+h)} = \dfrac{a+b}{x+h}+\dfrac{c+d}{2(x+h)} = \dfrac{2(a+b)}{2(x+h)}+\dfrac{c+d}{2(x+h)} = \dfrac{2(a+b)+c+d}{2(x+h)}$

$f(x) = \dfrac{a+b}{x}+\dfrac{c+d}{2x} = \dfrac{2a+2b+c+d}{2x}$

Förenkla $\quad \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{\frac{2a+2b+c+d}{2x+2h}-\frac{2a+2b+c+d}{2x}}{h} = \dfrac{(2a+2b+c+d)\left(\frac{1}{2x+2h}-\frac{1}{2x}\right)}{h} =$

$= (2a+2b+c+d)\left(\dfrac{1}{2xh+2h^2}-\dfrac{1}{2xh}\right) = (2a+2b+c+d)\left(\dfrac{2xh}{2xh(2xh+2h^2)}-\dfrac{2xh+2h^2}{2xh(2xh+2h^2)}\right) =$

$= (2a+2b+c+d)\left(\dfrac{2xh-2xh-2h^2}{4x^2h^2+4xh^3}\right) = (2a+2b+c+d)\left(\dfrac{-\cancel{2h^2}}{\cancel{2h^2}(2x^2+2xh)}\right) =$

$= (2a+2b+c+d)\left(\dfrac{-1}{2x^2+2xh}\right)$

$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{-2a-2b-c-d}{2x^2+2xh}\right) = \dfrac{-2a-2b-c-d}{2x^2}$

6. Funktionen $p(x)$ definieras som $p(x) = f(x)+g(x)$. Visa att om $f(x)$ är ett förstagradspolynom och $g(x)$ är ett andragradspolynom att $p'(x) = f'(x)+g'(x)$ med hjälp av derivatans definition.

Förtydligande: Visa att $p'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{p(x+h)-p(x)}{h}$ är lika med $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim\limits_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$f(x) = kx + m \quad g(x) = ax^2 + bx + c \quad p(x) = kx + m + ax^2 + bx + c$

$p(x+h) = k(x+h) + m + a(x+h)^2 + b(x+h) + c = kx + kh + m + ax^2 + 2axh + ah^2 + bx + bh + c$

$= ax^2 + kx + 2axh + bx + kh + m + ah + bh + c$

$p'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{p(x+h) - p(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{ax^2} + \cancel{kx} + 2axh + \cancel{bx} + kh + \cancel{m} + ah^2 + bh + \cancel{c} - \cancel{kx} - \cancel{m} - \cancel{ax^2} - \cancel{bx} - \cancel{c}}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{2axh + kh + ah^2 + bh}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2ax + k + ah + b)}{\cancel{h}} = \underline{2ax + k + b}$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k(x+h) + m - (kx + m)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{kx} + kh + \cancel{m} - \cancel{kx} - \cancel{m}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{kh}{h} = \underline{k}$

0

$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a(x+h)^2 + b(x+h) + c - (ax^2 + bx + c)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{ax^2} + 2axh + ah^2 + \cancel{bx} + bh + \cancel{c} - \cancel{ax^2} - \cancel{bx} - \cancel{c}}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{2axh + ah^2 + bh}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2ax + ah + b)}{\cancel{h}} = \underline{2ax + b}$

$f'(x) + g(x) = k + 2ax + b$

$p'(x) = 2ax + k + b$

$p'(x) = f'(x) + g'(x)$ V.S.V

7. Derivera funktionerna och förenkla

a) $f(x) = \frac{a^2x^2 + b^2x}{ax} = \frac{\cancel{x}(ax + b^2)}{a\cancel{x}} = \frac{ax + b^2}{a} = \frac{ax}{a} + \frac{b^2}{a} = x + \frac{b^2}{a}$

$f'(x) = \underline{1}$

b) $f(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{2e^x} = \frac{\cancel{e^x}(e^x - 1)}{2\cancel{e^x}} = \frac{e^x - 1}{2} = \frac{e^x}{2} - \frac{1}{2}$

$f'(x) = \frac{e^x}{2}$

c) $f(x) = e^{3x + ax} + x^{4a+5} = e^{x(3+a)} + x^{4a+5}$

$f'(x) = (3+a)e^{x(3+a)} + (4a+5)x^{4a+5-1} =$

$= (3+a)e^{3x+ax} + (4a+5)x^{4a+4}$

d) $f(x) = \frac{3^{2x} + 9^{2x} + 27^{2x}}{3^x} = \frac{3^x \cdot 3^x + (3^2)^{2x} + (3^3)^{2x}}{3^x} = \frac{3^x \cdot 3^x + 3^{4x} + 3^{6x}}{3^x}$

$= \frac{\cancel{3^x}(3^x + 3^{3x} + 3^{5x})}{\cancel{3^x}} = 3^x + 3^{3x} + 3^{5x}$

$f'(x) = 3^x \cdot \ln 3 + 3 \cdot 3^{3x} \cdot \ln 3 + 5 \cdot 3^{5x} \cdot \ln 3$

8. $f(x) = 4x^5 + 5x^4 + 10x^6$ bestäm $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1)$

$f'(x) = 20x^4 + 20x^3 + 60x^5 \quad f'(1) = 20 + 20 + 60 = \underline{100}$

9. Visa med hjälp av derivatans definition att $f'(x) = \frac{-1}{(x+a)^2}$ för $f(x) = \frac{1}{x+a}$

$$f(x) = \frac{1}{x+a}$$

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{x+h+a} - \frac{1}{x+a} = \frac{x+a}{(x+a)(x+h+a)} - \frac{x+h+a}{(x+a)(x+h+a)} =$$

$$= \frac{\cancel{x}+\cancel{a}-\cancel{x}-h-\cancel{a}}{x^2+xh+ax+ax+ah+a^2} = \frac{-h}{x^2+2ax+a^2+(x+a)h} = \frac{-h}{(x+a)^2+(x+a)h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{(x+a)^2+(x+a)h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\cancel{h}}{(x+a)^2+(x+a)h} \cdot \frac{1}{\cancel{h}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+a)^2+(x+a)h} = \frac{-1}{(x+a)^2}$$

10. $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)$ bestäm $f'(0)$ **tips:** multiplicera inte alla parenteser. Använd en annan metod.

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(h+1\ .....(h+6) - 0}{\cancel{h}} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = \underline{\underline{720}}$$

$$f(0+h) = (0+h)(0+h+1)\ .....(0+h+6) = h(h+1)(h+2)...(h+6)$$

$$f(0) = 0\cdot(0+1)(0+2)\ ...\ (0+6) = 0$$

ger $f(0) = 0$

Kap 3 Lösningar lite svårare uppgifter

1. Ni har inte redskap att derivera följande funktion $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ men om ni vet att derivatan för funktion är $f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - 2x \cdot e^x}{x^4}$ menar Joakim att ni kan lösa följande integral $\int_{-1}^{2} \frac{e^x \cdot x^2 - 2x \cdot e^x}{x^4} + x\,dx$. Beräkna integralen.

$$\int_{-1}^{2} \frac{e^x \cdot x^2 - 2xe^x}{x^4} = \left[\frac{e^x}{x^2}\right]_{-1}^{2} = \frac{e^2}{2^2} - \frac{e^{-1}}{(-1)^2} = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{e}$$

2. Skissa grafen till $f(x) = \frac{1}{x} + x + 2$ inkludera också eventuella asymptoter i skissen

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 1$

$-\frac{1}{x^2} + 1 = 0$

$\frac{1}{x^2} = 1$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

$f''(x) = \frac{2}{x^3}$

$f''(1) = 2 > 0$ minp

$f''(-1) = -2 < 0$ maxp.

$f(1) = \frac{1}{1} + 1 + 2 = 4$

$f(-1) = \frac{1}{(-1)} + (-1) + 2 = 0$

Maxp. $(-1, 0)$

Minp $(1, 4)$

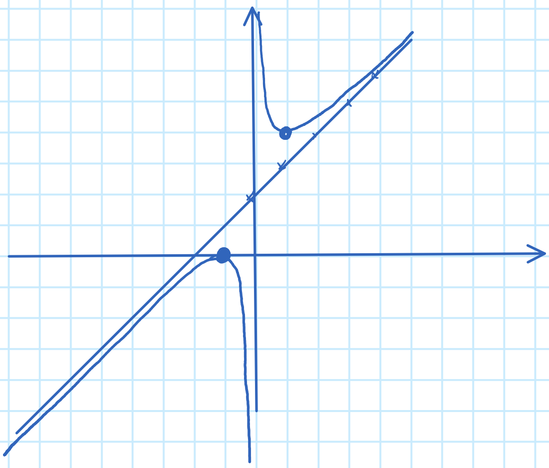
$f(x)$ är ej def då $x = 0$

då $x \to 0$ från vänster på x-axel närmar sig $f(x)$ $-\infty$

då $x \to 0$ från höger på x-axeln närmar sig $f(x)$ $+\infty$

Då $x \to \pm\infty$ går $\frac{1}{x} \to 0$ och $x+2$ dominerar.

y-axeln och $y = x+2$ är asymptoter



3. Ge ett exempel på en funktion $f(x)$ som har följande egenskaper

- $f(a) = 2 \cdot F(a)$
- $f'(a) = 2 \cdot f(a)$
- $f''(a) = 2 \cdot f'(a)$

Där a är ett positivt heltal.

Då $f(a)$ deriveras fås samma funktion igen så när som på en konstant 2. En funktion som uppfyller det är $f(x) = e^{2x}$

$F(a) = e^{2x}$

$f(a) = 2e^{2x}$

$f'(a) = 2 \cdot 2e^{2x} = 2 \cdot f(a)$

$$f''(a) = 2\cdot 2\cdot 2e^{2x} = 2\cdot f'(a)$$

4. $f'(x) = e^{3x}$. $f(0) = \frac{1}{3}$

Bestäm a algebraiskt om $\int_0^a f'(x)\,dx = \int_0^3 f(x)\,dx$

$$f(x) = \frac{e^{3x}}{3} + c \qquad f(0) = \frac{e^0}{3} + c \qquad f(0) = \frac{1}{3} \Rightarrow c = 0$$

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 \frac{e^{3x}}{3} = \left[\frac{e^{3x}}{9}\right]_0^3 = \frac{e^9}{9} - \frac{1}{9}$$

$$\int_0^a f'(x)\,dx = \int_0^a e^{3x}dx = \left[\frac{e^{3x}}{3}\right]_0^a = \frac{e^{3a}}{3} - \frac{1}{3}$$

Om $\int_0^a f(x)dx = \int_0^3 f(x)\,dx$ är

$$\frac{e^{3a}}{3} - \frac{1}{3} = \frac{e^9}{9} - \frac{1}{9}$$

$$\frac{e^{3a}}{3} = \frac{e^9}{9} - \frac{1}{9} + \frac{1\cdot 3}{3\cdot 3}$$

$$\frac{e^{3a}}{3} = \frac{e^9}{9} + \frac{2}{9}$$

$$e^{3a} = \frac{e^9}{3} + \frac{2}{3}$$

$$\ln e^{3a} = \ln\left(\frac{e^9+2}{3}\right)$$

$$3a \ln e = \ln\left(\frac{e^9+2}{3}\right)$$

$$a = \frac{\ln\left(\frac{e^9+2}{3}\right)}{3}$$

5. $f(x)$ är ett exempel på en tredjegradsfunktion som har två extrempunkter i $x = 1$ och $x = -3$

$g(x)$ är ett exempel på en andragradsfunktion som har en extrempunkt i $x = -3$
$g(0) = 0$

Bestäm $p'(x)$ om $p(x) = f(x) + g(x)$

$f'(x) = k(x+3)(x-1)$ sätt $k = 1$ $\quad f'(x) = x^2 - x + 3x - 3 = x^2 + 2x - 3$

$f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + c$ välj $c = 0$

$g(x) = ax^2 + bx + c \qquad g(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

$g'(x) = 2ax + b = 2ax + 6a = 2a(x+3)$

$g'(-3) = 0$ ger $-6a + b = 0$

$6a = b$ ex $a = 1$ $b = 6$

$g(x) = x^2 + 6x \qquad g'(x) = 2x + 6 \qquad g'(-3) = -6 + 6 = 0$

stämmer.

$p(x) = f(x) + g(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + x^2 + 6x$

$p'(x) = x^2 + 2x - 3 + 2x + 6 = x^2 + 4x + 3$

6. $f(x) = \frac{1}{x} + 2x$ tangent $t(x)$ i $x=1$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2$

$f'(1) = -1 + 2 = 1$

$t(x) = x + m$

Punkten $x=1$ är gemensam för $f(x)$ och $t(x)$

$x=1$ ger $f(1) = \frac{1}{1} + 2 \cdot 1 = 3$

$x = 1$ ger $t(1) = 3$

$t(1) = 1 + m$ $\quad$ $1+m=3$ ger $m=2$

$t(x) = x+2$

$$\int_0^2 t(x)\,dx = \int_0^2 (x+2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^2 = \frac{2^2}{2} + 2\cdot 2 - 0 = \underline{6}$$

7. Bestäm ett exempel på fjärdegradsfunktionen som har följande egenskaper

- Minimipunkt i $x = 1$
- Maximipunkt i $x = 0$
- Minimipunkt i $x = -1$

$f'(x) = k(x+1)(x-1)x$

$f'(x) = k(x^2+x)(x-1) = k(x^3 - x^2 + x^2 - x) = k(x^3 - x)$

$f''(x) = 3kx^2 - k$

$f''(1) = 3k - k$

$f''(0) = -k$ ska vara maxpunkt dvs $f''(0) < 0$. Dvs $k > 0$

$f''(-1) = 3k - k$

Om $k > 0$ blir $f''(1)$ och $f''(-1) = 3k - k > 0$ dvs minp.

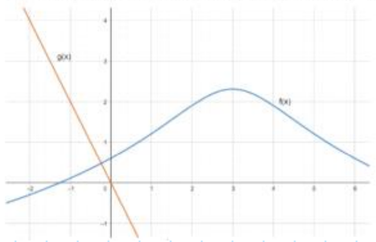
Dvs $f'(x) = kx^3 - kx$ där $k > 0$

$f(x) = \frac{kx^4}{4} - \frac{kx^2}{2} + C$ där $k > 0$

tex $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 2$

8. $$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x} - (-1)\right) = 0 - (-1) = \underline{1}$$

9. Nedan visas funktionerna $f(x)$ och $g(x)$. $h(x) = f(x) - g(x)$ bestäm $h'(3)$



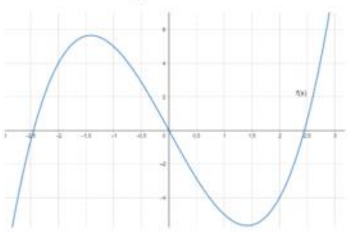
g(x) är en rät linje dvs g'(x) är konstant – har samma värde för alla x $\quad g'(x) = -2$

$h'(x) = f'(x) - g'(x)$

$h'(3) = f'(3) - g'(3) = 0 - (-2) = \underline{\underline{2}}$

$f'(3) = 0$

10. Beräkna integralen $\int_{-0,5}^{2} f'(x)\,dx$ om funktionen nedan visar på $f(x)$



$$\int_{-0,5}^{2} f'(x)\,dx = \Big[f(x) \Big]_{-0,5}^{2} =$$

$$= f(2) - f(-0,5) = -4 - 3 = \underline{\underline{-7}}$$

11 Bad GeoGebra om skärningspunkten mellan f(x) och g(x) (A)

Beräknade areor med

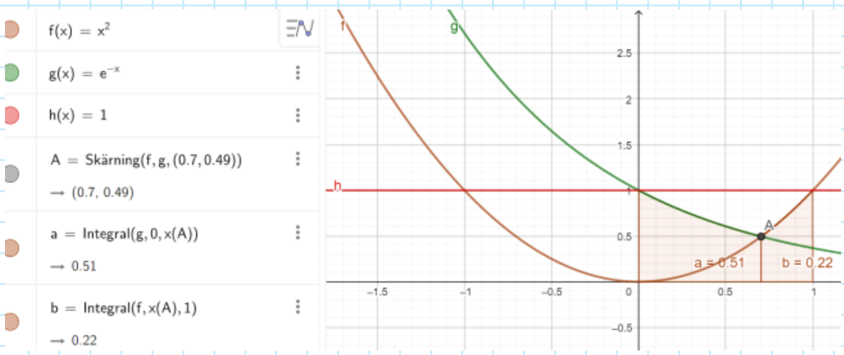
Integral(f, x(A), 1) = 0,22

$\uparrow$

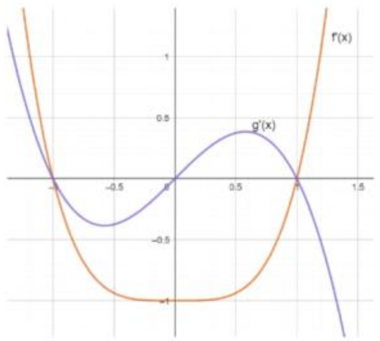
hämtar x-koord. för A.

Integral(g, 0, x(A)) = 0,51

Arean : 1 · 1 – 0,22 – 0,51 = 0,27 a.e



12. $h(x)$ definieras som $h(x) = g(x) + f(x)$ bestäm samtliga lösningar till ekvationen $h'(x) = 0$



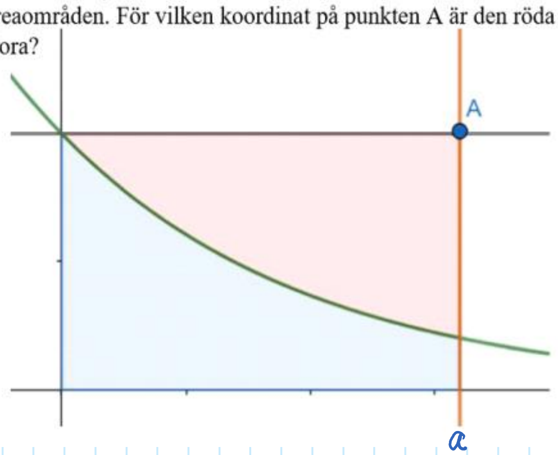
$h(x) = g(x) + f(x)$

$h'(x) = g'(x) + f'(x)$ när är $h'(x) = 0$?

För att $h'(x) = 0$ måste $g'(x) = f'(x) = 0$ eller $|f'(x)|$ och $|g'(x)|$ vara lika men av motsatt tecken, det blir de aldrig.

Återstår de punkter där $f'(x) = g'(x) = 0$ dvs $x = -1$ och $x = 1$

13. Nedan visas $f(x) = e^{-x}$ och linjen $y = 1$ som tillsammans avgränsar två areaområden. För vilken koordinat på punkten A är den röda och den blå arean lika stora?



Blå area: $\int_0^a e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^a = -e^{-a} - (-e^{0}) = -e^{-a} + 1$

Röd area: $1 \cdot a - \int_0^a e^{-x}\,dx$

När är Blå = Röd?

$$a - \int_0^a e^{-x}\,dx = \int_0^a e^{-x}\,dx$$

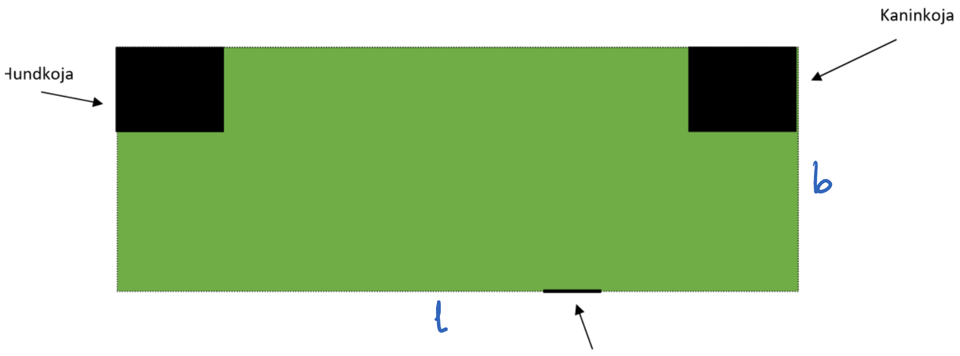
$$a - (-e^{-a} + 1) = -e^{-a} + 1$$

$$a + e^{-a} - 1 = -e^{-a} + 1$$

$$a + 2e^{-a} - 2 = 0 \quad \text{lös grafiskt}$$

$$a = 0 \text{ eller } a = 1{,}5936$$

14. Joakim ska bygga ett inhägnat område. Han har totalt 100 meter staket som han kan använda. Han vill att hans hund och kanin ska få en varsin koja på det inhägnade området som båda ska vara 2 gånger 2 meter. Notera att där det är kojor behöver Joakim inte använda staket samt där dörren är. Hans skiss ser ut så här:



Vilken är den största arean som Joakims grönmarkerade område kan ha och vilka längder ska varje sida ha i det inhägnade området?

$A = l \cdot b$

$l - 1{,}5 + l - 4 + b - 2 + b - 2 = 100$

$2l + 2b - 9{,}5 = 100$

$2l = 109{,}5 - 2b$

$l = \dfrac{109{,}5 - 2b}{2}$

$A = l \cdot b = \dfrac{109{,}5 - 2b}{2} \cdot b = 54{,}75b - b^2$

$A'(b) = 54{,}75 - 2b$

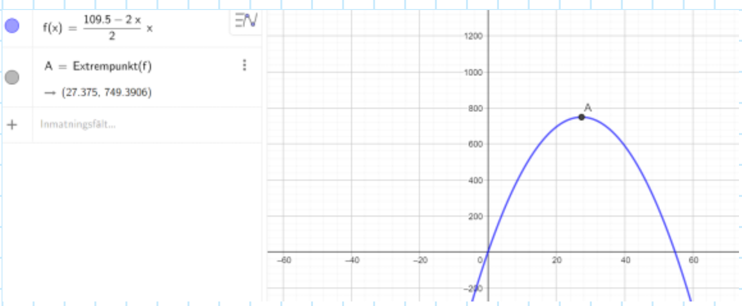
$54{,}75 - 2b = 0$

$b = 27{,}375$

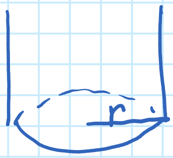
$A''(b) = -2$ dvs extrempunkten är en maxp.

$l = \dfrac{109{,}5 - 2b}{2} = \dfrac{109{,}5 - 2 \cdot 27{,}375}{2} = 27{,}375$

$A_{max} = 54{,}75 \cdot 27{,}375 - 27{,}375^2 = 749{,}3796\ldots \approx 750 m^2$



15. Joakims företag vill konstruera en burk som har en cirkulär botten som ska gå att fyllas med 0.5 dm^3 vätska. Men Joakims företag är såklart miljömedvetna, de vill använda så lite material som möjligt. Därför vill de minimera materialet för burken (så lite area som möjligt). Antag att toppen av burken har ett hål i form av en cirkel som har diametern 1 cm. Vilka dimensioner ska burken ha för att Joakims företag ska minimera materialåtgången, alltså så att burken innehåller så lite area som möjligt men samtidigt innehåller 0.5 dm^3 JJ-läsk?



$V = B \cdot h = \pi r^2 \cdot h \qquad V = 0{,}5\ dm^3$

$0{,}5 = \pi r^2 \cdot h$

$h = \frac{0{,}5}{\pi r^2}$

$A = \underbrace{2\pi \cdot r^2}_{\text{botten+lock}} + \underbrace{\pi \cdot 2r \cdot h}_{\text{mantel area}} - \underbrace{\pi \cdot 0{,}05^2}_{\text{hål i lock}} = 2\pi r^2 + \frac{2\cancel{\pi}\cancel{r} \cdot 0{,}5}{\cancel{\pi} r^{\cancel{2}}} - 0{,}0025\pi = 2\pi r^2 + \frac{1}{r} - 0{,}0025\pi$

$A'(r) = 4\pi r - \frac{1}{r^2}$

$4\pi r - \frac{1}{r^2} = 0$

$4\pi r = \frac{1}{r^2}$

$4\pi r^3 = 1$

$r = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/3} = 0{,}4301\ldots$

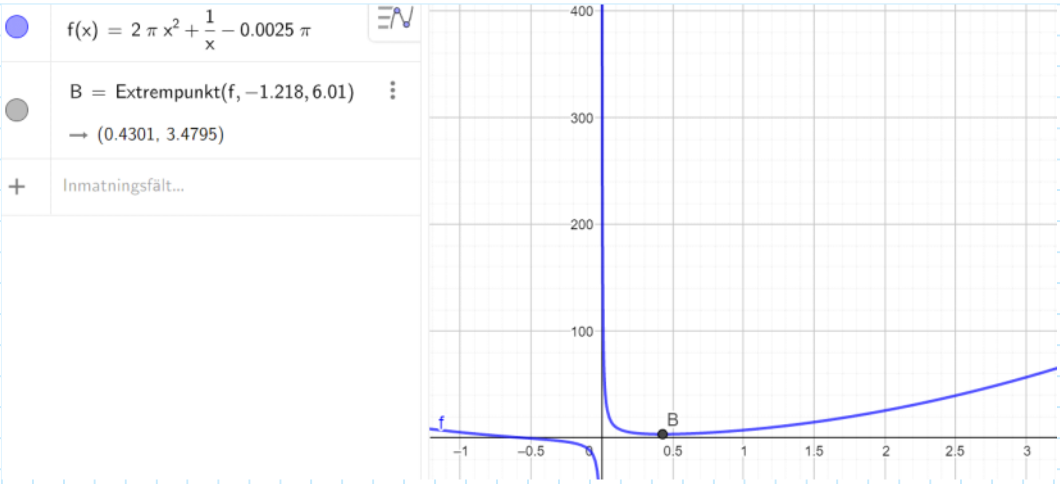
$A''(r) = 4\pi + \frac{1}{r^3}$

$A''(0{,}4301..) = 25{,}1.. > 0$ dvs minpunkt.

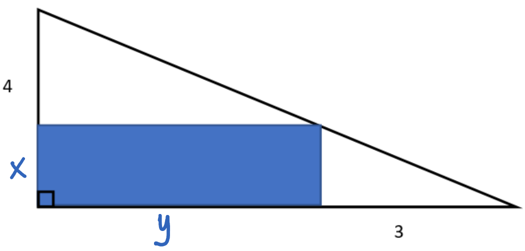
$r = 0{,}430127\ldots \approx \underline{0{,}4\ dm}$

$h = \frac{0{,}5}{\pi \cdot r^2} = \frac{0{,}5}{\pi \cdot 0{,}430..^2} = 0{,}86\ldots \approx \underline{0{,}9\ dm}$

Burkens dimensioner för minst area och $0{,}5\ dm^3$ volym.



16. Nedan ser du en rätvinklig triangel. Arean för den blå fyrhörningen med okända sidlängder är 12 a.e. Vilken är den minsta triangeln (i area) utifrån figuren som tillfredsställer kravet att ha en inritad fyrhörning som har arean 12 a.e?



Area kvadrat $x \cdot y = 12$ a.e $\qquad y = \frac{12}{x}$

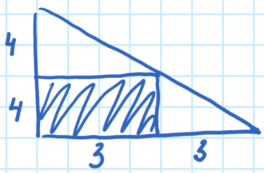
Area triangel $\frac{(4+x)(3+y)}{2} = \frac{(4+x)\left(3+\frac{12}{x}\right)}{2} = \frac{12 + \frac{48}{x} + 3x + 12}{2}$

$= \frac{24 + \frac{48}{x} + 3x}{2} = 12 + \frac{24}{x} + \frac{3x}{2}$

$A'_{\Delta}(x) = -\frac{24}{x^2} + \frac{3}{2}$

$-\frac{24}{x^2} + \frac{3}{2} = 0$

$x^2 = \frac{48}{3} = 16$



$x = \pm 4$ negativa lösn repr. ingen sida i triangel

$y = \frac{12}{x} = \frac{12}{4} = 3$

$A''_{\Delta}(x) = \frac{48}{x^3} \qquad A''(4) = 0{,}75 > 0$ dvs minpunkt.

Den minsta triangeln har arean $\frac{8 \cdot 6^3}{2} = 24$ a.e

17. Differensen av två tal är 40. Vilken är den minsta produkten du kan få av dessa tal och vilka två tal är det?

$x - y = 40$

$P(y)\ x \cdot y = (40+y)y = 40y + y^2$ hitta minsta!

$$P'(y) = 40 + 2y$$

$$40 + 2y = 0$$

$$\underline{y = -20} \qquad \underline{x = 40 + y = 20}$$

18. a) Visa att följande samband gäller för alla andragradsfunktioner

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)$$

$$f(x) = cx^2 + dx + e$$

$$\int_a^b (cx^2 + dx + e)\,dx = \left[\frac{cx^3}{3} + \frac{dx^2}{2} + ex\right]_a^b =$$

$$= \frac{cb^3}{3} + \frac{db^2}{2} + eb - \left(\frac{ca^3}{3} + \frac{da^2}{2} + ea\right) = \frac{cb^3}{3} + \frac{db^2}{2} + eb - \frac{ca^3}{3} - \frac{da^2}{2} - ea$$

$$\int_b^a (cx^2 + dx + e)\,dx = \left[\frac{cx^3}{3} + \frac{dx^2}{2} + ex\right]_b^a =$$

$$= \frac{ca^3}{3} + \frac{da^2}{2} + ea - \left(\frac{cb^3}{3} + \frac{db^2}{2} + eb\right) = \frac{ca^3}{3} + \frac{da^2}{2} + ea - \frac{cb^3}{3} - \frac{db^2}{2} - eb$$

$$-\int_b^a f(x)\,dx = -\frac{ca^3}{3} - \frac{da^2}{2} - ea + \frac{cb^3}{3} + \frac{db^2}{2} + eb$$ vilket är detsamma som $\int_a^b f(x)\,dx$!

b) Visa att det stämmer för alla funktioner

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_b^a = F(a) - F(b)$$

$$-\int_b^a f(x)\,dx = -\left(F(a) - F(b)\right) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

19. Visa att följande samband gäller för alla funktioner

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Och

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x) + g(x)dx$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^c = F(c) - F(a)$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^c = F(c) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \left[f(x)\right]_a^b + \left[f(x)\right]_b^c =$$

$$= \cancel{F}(b) - F(a) + F(c) - \cancel{F}(b) = F(c) - F(a)$$ vilket är detsamma som $\int_a^c f(x)\,dx$

$$\int_a^b g(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx = \left[G(x)\right]_a^b + \left[F(x)\right]_a^b = G(b) - G(a) + F(b) - F(a) =$$
$$= G(b) + F(b) - G(a) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \left[F(x) + G(x)\right]_a^b = F(b) + G(b) - F(a) - G(a)$$

vilket är detsamma som $\int_a^b g(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$

20. Lös ekvationerna

a) $e^{2x} - 8e^x + 16 = 0$

b) $e^{2x} - 4e^x - 5 = 0$

c) $e^x - 10e^{\frac{x}{2}} + 25 = 0$

a) sätt $t = e^x$

$t^2 - 8t + 16 = 0$

$t = 4 \pm \sqrt{16 - 16}$

$t = 4$

$e^x = 4$

$\underline{x = \ln 4}$

b) sätt $t = e^x$

$t^2 - 4t - 5 = 0$

$t = 2 \pm \sqrt{4 + 5}$

$t = 2 \pm 3$

$t_1 = 5 \quad t_2 = -1$

$e^x = 5 \qquad e^x = -1$

$\underline{x = \ln 5}$ saknar lösning

c) $e^{\frac{x}{2}} = t$

$t^2 - 10t + 25 = 0$

$t = 5 \pm \sqrt{25 - 25}$

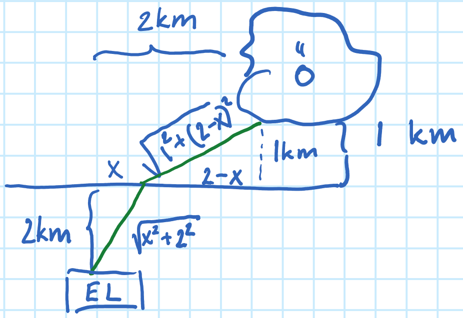
$t = 5$

$e^{\frac{x}{2}} = 5$

$\frac{x}{2} = \ln 5$

$\underline{x = 2\ln 5}$

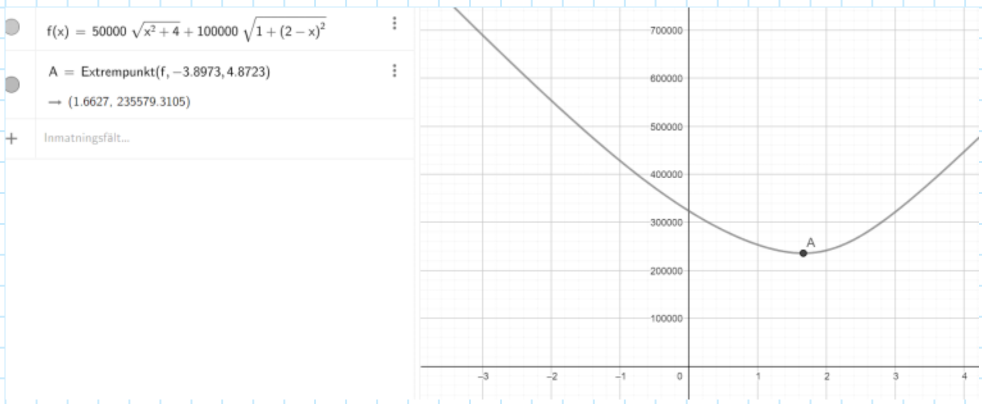
21. Du jobbar på ett företag Joakims el som ska dra en elkabel från ett elkraftverk till en ö. Elkraftverket ligger två km från kusten. Ön ligger en km från kusten i östlig riktning och sedan två km från elkraftverket i sydlig riktning. Att dra kabeln på land kostar 100 kr/m och i vattnet kostar det 50 kr/m. Joakims el vill såklart minimera kostnaden för kabeln. Hur ska kabeln dras och vad kommer den kosta om Joakims el vill minimera kostnaden?



$50\ kr/m = 50000\ kr/km$

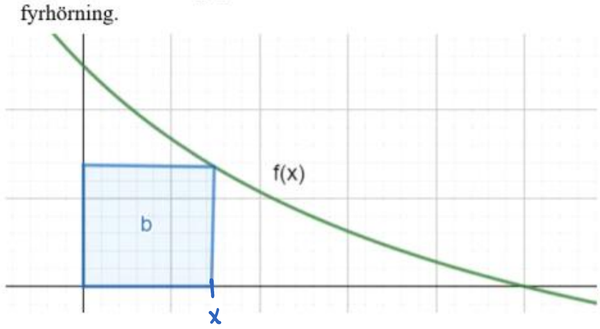
$100kr/m = 100\ 000\ kr/km$

Kostnad $K(x) = 50\ 000\sqrt{x^2+2^2} + 100\ 000\sqrt{1+(2-x)^2}$



Funktionen har sitt min då $x = 1{,}6627 \approx 1{,}7$ km och kostnaden blev 235 579 kr ≈ 236 000 kr

22. Funktionen $f(x) = \frac{1}{x+1} - 0.5$ skapar tillsammans med de positiva koordinataxlarna en fyrhörning.



a) För vilket x-värde skapas det en kvadrat under funktionen $f(x)$?

b) Vilken är den största arean som fyrhörningen kan anta?

a) För kvadrat ska sidorna vara lika dvs x och y-värde i punkten x ska vara samma.

$$\frac{1}{x+1} - 0{,}5 = x$$

$$\frac{1}{x+1} = x + 0{,}5$$

$$1 = (x+1)(x+0{,}5)$$

$$1 = x^2 + 0{,}5x + x + 0{,}5$$

$$1 = x^2 + 1{,}5x + 0{,}5$$

$$0 = x^2 + 1{,}5x - 0{,}5$$

$$x = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{8}{16}}$$

$$x = -\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{17}}{4}$$

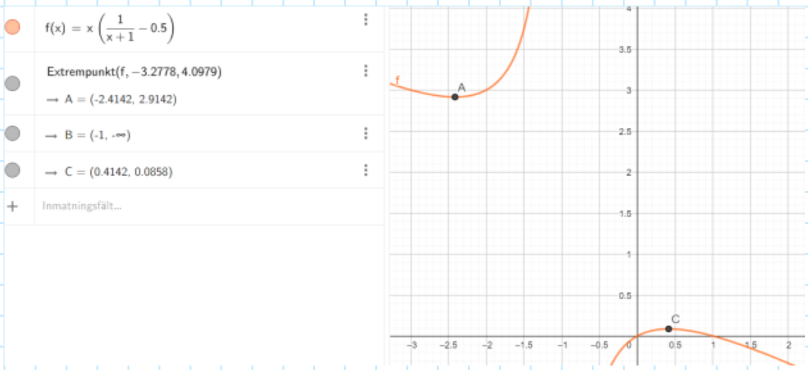
$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{17}}{4} = 0{,}28077.. \approx 0{,}28$$

$$\left(x_2 = \frac{-3-\sqrt{17}}{4} \approx -1{,}78077\right) \text{ ej i 1:a kvadranten}$$

b) Störst area på fyrhörning?

$$A = x \cdot y = x\left(\frac{1}{x+1} - 0{,}5\right) = \frac{x}{x+1} - 0{,}5x$$

Hitta max?



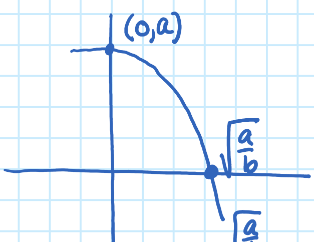
Då $x = 0{,}4142 \approx 0{,}41$ blir arean som störst

och då är arean $0{,}0858$ a.e $\approx \underline{0{,}086 \text{ a.e}}$

23. Den generella funktionen $f(x) = a - bx^2$ har definitionsmängden $x \geq 0$ och $a \geq 0$. Tillsammans med de positiva koordinataxlarna skapar funktionen en area.

a) Bestäm ett generellt uttryck för den arean

b) En rät linje $r(x)$ går igenom $f(x)$ skärningspunkter med y- och x-axeln. Vad är förhållandet mellan $f(x)$:s area och $r(x)$:s area som begränsas av de positiva koordinataxlarna?



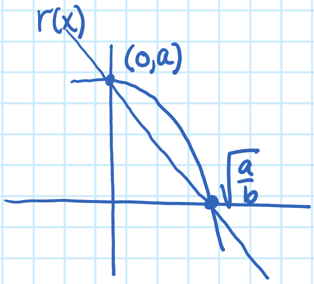
$$a - bx^2 = 0$$

$$bx^2 = a$$

$$x = \underset{(-)}{+}\sqrt{\frac{a}{b}} \qquad -\sqrt{\frac{a}{b}} \text{ är ej i 1:a kvadranten}$$

Arean $\displaystyle\int_0^{\sqrt{a/b}} (a - bx^2)\,dx = \left[ax - \frac{bx^3}{3}\right]_0^{\sqrt{a/b}} = a\sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{\cancel{b}\cdot\frac{a}{\cancel{b}}\sqrt{\frac{a}{b}}}{3} = a\sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{a\sqrt{\frac{a}{b}}}{3} = \frac{2a\sqrt{\frac{a}{b}}}{3}$

$$\text{Arean} \int_0^{\sqrt{\frac{a}{b}}} (a-bx^2)\,dx = \left[ax - \frac{bx^3}{3}\right]_0^{\sqrt{\frac{a}{b}}} = a\sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{\cancel{b}\cdot\frac{a}{\cancel{b}}\sqrt{\frac{a}{b}}}{3} = a\sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{a\sqrt{\frac{a}{b}}}{3} = \frac{2a\sqrt{\frac{a}{b}}}{3}$$



$$\text{Arean under } r(x) = \frac{\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot a}{2} = \frac{a\sqrt{\frac{a}{b}}}{2}$$

Förhållandet mellan arean under $f(x)$ och arean under $r(x)$

$$\frac{2a\sqrt{\frac{a}{b}}}{3} \Big/ \frac{a\sqrt{\frac{a}{b}}}{2} = \frac{2\cancel{a}\cancel{\sqrt{\frac{a}{b}}}}{3}\cdot\frac{2}{\cancel{a}\cancel{\sqrt{\frac{a}{b}}}} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

Kap 4 Lite svårare uppgifter Ma3c

1. Visa att $sin120° \cdot sin60° + cos60° \cdot cos120° = cos60°$

Hämta värden från ditt formelblad:

$$VL = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$HL = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $HL = VL$ V.S.V

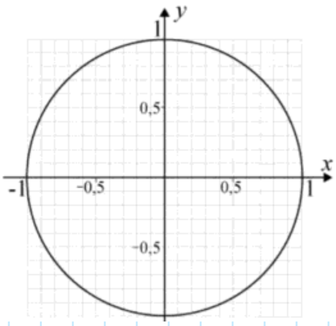
2. Visa att $tan45° = \frac{sin90° - sin45°}{cos90° - cos45° + 1}$

$$HL = \frac{\sin 90° - \sin 45°}{\cos 90° - \cos 45° + 1} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{0 - \frac{1}{\sqrt{2}} + 1} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = 1$$

$VL = \tan 45° = 1$ $\qquad$ $VL = HL$ V.S.V

3. Bestäm en vinkel v i enhetscirkeln som du vet värdena på $sinv$ och $cosv$. Visa sedan algebraiskt att följande samband stämmer

$sinv \cdot sinv + cosv \cdot cosv + sin2v = 1 + 2 \cdot sinv \cdot cosv$



Välj en vinkel du hittar i formelbladet.

Tex $v = 30°$

$$VL = \sin 30 \cdot \sin 30° + \cos 30° \cdot \cos 30° + \sin 60° =$$

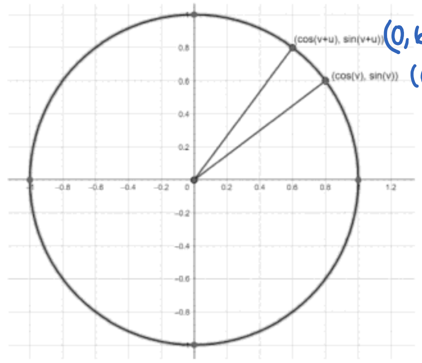
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$HL = 1 + 2\sin 30° \cos 30° = 1 + \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$VL = HL$ V.S.V

4. På enhetscirkeln finns två punkter utmarkerade. Visa att följande samband gäller

$$\left(\sin^2(v+u)+\sin^2(v)\right)-\left(\cos^2(v+u)+\cos^2(v)\right)=0$$



(0,6; 0,8)

(0,8; 0,6)

$$VL = \sin^2(v+u)+\sin^2(v)-\left(\cos^2(v+u)+\cos^2(v)\right)=$$

$$=0{,}8^2+0{,}6^2-\left(0{,}6^2+0{,}8^2\right)=0$$

$HL=0$ V.S.V