

Grundläggande uppgifter från hela kursen

1. Derivera följande funktioner

a) $f(x) = x^3 + 2x^2$

b) $f(x) = 4x^4 + 3x + 1$

c) $f(x) = 12x^{10} + 45$

d) $f(x) = e^{5x}$

e) $f(x) = 4e^{-2x} + 5$

f) $f(x) = \frac{1}{x}$

g) $f(x) = 2^x$

h) $f(x) = 4^{2x}$

i) $f(x) = \sqrt{x}$

2. Bestäm samtliga primitiva funktioner till följande funktioner

a) $f(x) = x^2 + 4$

b) $f(x) = 4x^3 + 2x - 5$

c) $f(x) = 27x^8$

d) $f(x) = 3e^{12x}$

e) $f(x) = \frac{e^{3x}}{3}$

f) $f(x) = e^{2x} + 3x + 1$

g) $f(x) = 3^x$

3. För vilket/vilka x är det rationella uttrycken odefinierade

a) $\frac{2}{x+3}$

b) $\frac{x}{7-x}$

c) $\frac{1+x}{x^2-9}$

d) $\frac{42}{x^2-4x}$

e) $\frac{12-x}{x^2-4x-5}$

4. Bestäm gränsvärdet

a) $\lim_{x \rightarrow 4} x^2 + 4$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} 4x + \frac{1}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} 2^x + 1$

d) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2+4}{x^2}$

5. För vilket/vilka x -värden har följande funktioner extrempunkter. Bestäm med hjälp av derivata. Bestäm också om det är maximi-/minimipunkter med hjälp av andraderivata.

a) $f(x) = x^2 - 4x$

b) $f(x) = x^2 + 6x + 8$

c) $f(x) = x^3 - 12x - 3$

d) $f(x) = 2x^3 - 24x + 12$

e) $f(x) = e^{-x} + x$

6. Beräkna integralerna

a) $\int_0^3 3x^2 dx$

b) $\int_1^2 x^2 + 3 dx$

c) $\int_{-1}^1 x^3 + 2x + 1 dx$

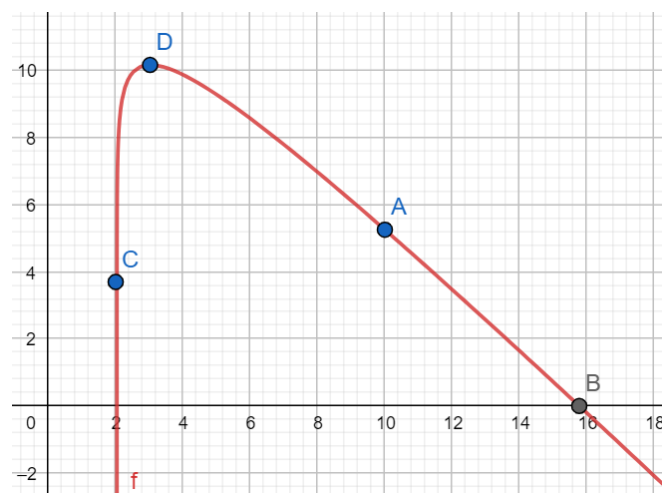
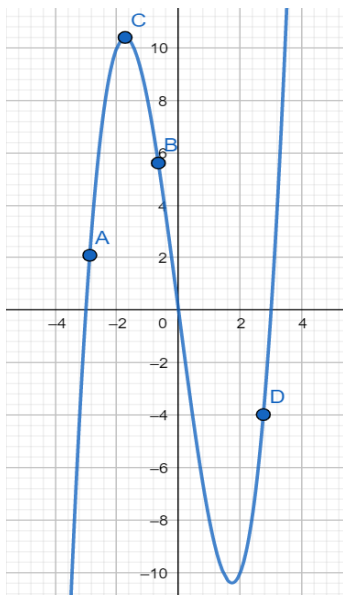
d) $\int_0^2 e^{2x} dx$

e) $\int_1^3 e^{-x} dx$

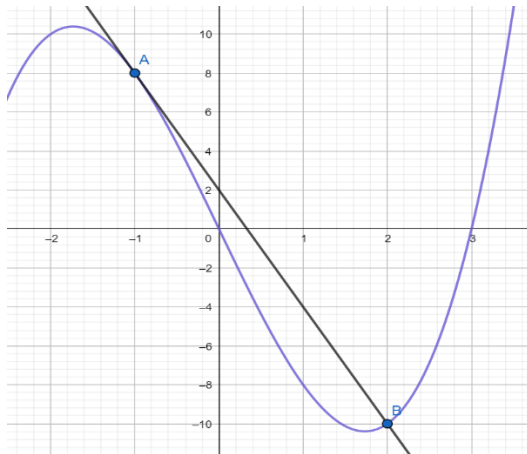
f) $\int_1^2 e^{3x} + 1 dx$

g) $\int_{-2}^2 e^x + 2x dx$

7. Bestäm om $f'(x) < 0$, $f'(x) = 0$, $f'(x) > 0$ för de olika punkterna A, B, C och D för respektive graf



8. Bestäm ekvationen för sekanten i bilden nedan



9. Bestäm ekvationen för tangenten som tangerar funktionerna i $x = 1$

- a) $f(x) = x^2$
- b) $f(x) = x^3 - 4x$
- c) $f(x) = e^x$
- d) $f(x) = x^4 - 2x$

10. Bestäm samtliga vinklar i intervallet $0^\circ < v < 180^\circ$ där

- a) $\sin(v) = 0.56$
- b) $\cos(v) = 0.41$
- c) $\cos(v) = 0.89$
- d) $\sin(v) = 1$
- e) $\cos(v) = -0.43$

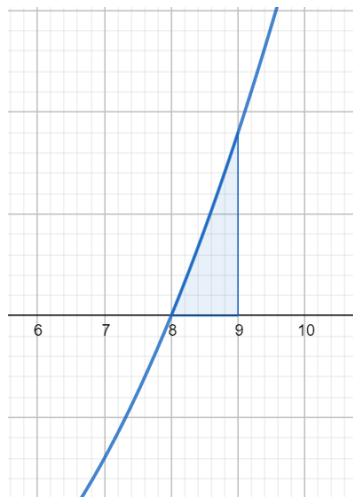
11. Antalet fiskar i en sjö beskrivs enligt funktionen $F(t) = \frac{5}{\frac{t}{5} + 0.5} + 300$ där $F(t)$ är antalet fiskar och t är tid från 2021.

- a) Ungefär hur många fiskar borde det finnas år 2030?
- b) Joakim menar att modellen visar att antalet fiskar kommer stabiliseras efter massor år. Hur många fiskar kommer det stabiliseras vid?

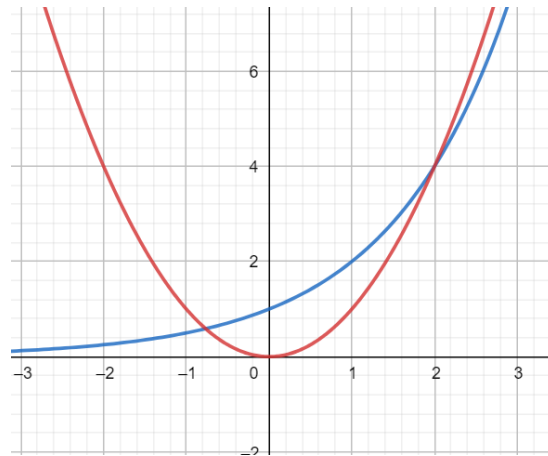
12. En funktion har två extrempunkter i $x = 1$ och $x = -4$. Bestäm om dessa är maximi-/minipunkter eller både och om du vet följande:

- $f''(1) = 4$
- $f''(-4) = 1$

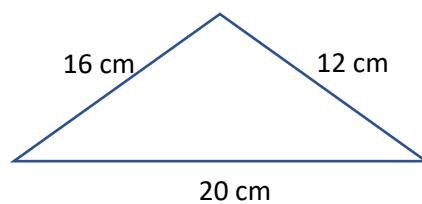
13. Funktionen $f(x) = x^2 - 8x$ visas nedan. Beräkna arean av det området som visas nedan.



14. Nedan visas funktionerna $f(x)$ och $g(x)$. Bestäm för vilka x är $f(x) = g(x)$. Svara ungefär.



15. Bestäm samtliga vinklar i triangeln. Triangeln är inte skalenlig.



16. Beräkna

- $|-3| + |6| - |-20|$
- $|10| - |-10| + |2| + |-2|$
- $|4-6| + |1+3| - |4-9|$

17. Lös ekvationerna

- a) $|x| = 9$
- b) $(x + 1)(x - 4)(x + 2) = 0$
- c) $x^3 - 4x = 0$
- d) $\frac{x+8}{x+1} = 2$
- e) $e^x = 4$
- f) $e^{-2x} = 5$
- g) $\ln(x) + \ln(5) = \ln(10)$

18. $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$ är given. Bestäm följande

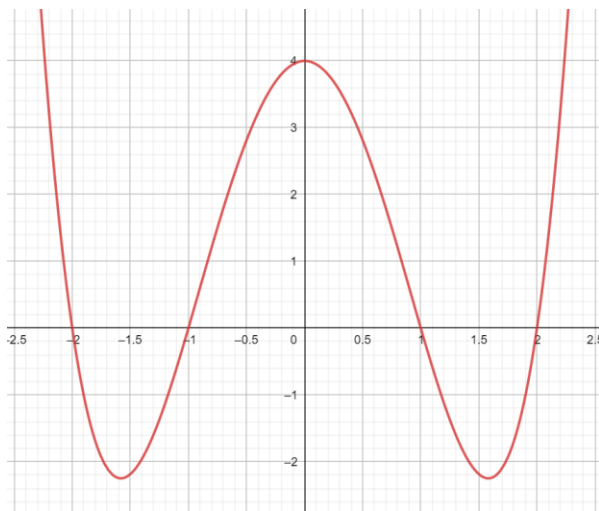
- a) $f'(x) = 0$
- b) $f'(1)$
- c) $f''(x) = 0$
- d) $f''(3)$

19. Förklara varför följande $f'(x) > 0$ för alla x för följande funktion $f(x) = x^3 + 2x$

20. $F(x) = x^3 + 2x$ är given. Bestäm $f'(x)$

21. Funktionen nedan är $f(x)$ bestäm följande (svara ungefär)

- a) $f(x) = 0$
- b) $f'(x) = 0$



$$1. a) f(x) = x^3 + 2x^2 \quad f'(x) = 3x^2 + 4x$$

$$b) f(x) = 4x^4 + 3x + 1 \quad f'(x) = 16x^3 + 3$$

$$c) f(x) = 12x^{10} + 45 \quad f'(x) = 120x^9$$

$$d) f(x) = e^{5x} \quad f'(x) = 5e^{5x}$$

$$e) f(x) = 4e^{-2x} + 5 \quad f'(x) = -8e^{-2x}$$

$$f) f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$g) f(x) = 2^x \quad f'(x) = \ln 2 \cdot 2^x$$

$$h) f(x) = 4^{2x} \quad f'(x) = 2 \cdot \ln(4) \cdot 4^{2x}$$

$$i) f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x) = x^n$$

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f(x) = kx$$

$$f'(x) = k$$

$$f(x) = k$$

$$f'(x) = 0$$

$$f(x) = e^{kx}$$

$$f'(x) = ke^{kx}$$

$$f(x) = a^x$$

$$f'(x) = \ln a \cdot a^x$$

$$f(x) = a^{kx}$$

$$f'(x) = k \cdot \ln a \cdot a^{kx}$$

$$2. a) f(x) = x^2 + 4 \quad F(x) = \frac{x^3}{3} + 4x + C$$

$$b) f(x) = 4x^3 + 2x - 5 \quad F(x) = x^4 + x^2 - 5x + C$$

$$c) f(x) = 27x^8 \quad F(x) = \frac{27x^9}{9} = 3x^9 + C$$

$$d) f(x) = 3e^{12x} \quad F(x) = \frac{3e^{12x}}{12} + C = \frac{e^{12x}}{4} + C$$

$$e) f(x) = \frac{e^{3x}}{3} \quad F(x) = \frac{e^{3x}}{9} + C$$

$$f(x) = x^n$$

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$f(x) = k$$

$$F(x) = kx + C$$

$$f(x) = e^{kx}$$

$$F(x) = \frac{e^{kx}}{k} + C$$

$$f) f(x) = e^{2x} + 3x + 1 \quad F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{3x^2}{2} + x + C$$

$$g) f(x) = 3^x \quad F(x) = \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

$$f(x) = a^x$$

$$F(x) = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Undersök när
nämnaren = 0

$$3. a) \frac{2}{x+3} \quad x+3=0$$

$$x = -3$$

$$b) \frac{x}{7-x} \quad 7-x=0$$

$$7=x$$

$$c) \frac{1+x}{x^2-9} \quad x^2-9=0$$

$$x = \pm 3$$

$$d) \frac{4x}{x^2-4x} \quad x^2-4x=0$$

$$x(x-4)=0 \quad \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=4 \end{cases}$$

$$e) \frac{12-x}{x^2-4x-5}$$

$$x^2-4x-5=0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + 5}$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = -1$$

$$= 2 \pm \sqrt{4+5}$$

$$= 2 \pm 3$$

$$4. a) \lim_{x \rightarrow 4} x^2 + 4 = 20$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} 4x + \frac{1}{x} = 5$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} 2^x + 1 = 5$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2+4}{x^2} = \frac{20}{4} = 5$$

Sätt värdet x gör
emot, försök om
det blir problem

$$5. a) f(x) = x^2 - 4x$$

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \\ x = 2$$

$$b) f(x) = x^2 + 6x + 8$$

$$f'(x) = 2x + 6$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 6 = 0 \\ x = -3$$

$$d) f(x) = 2x^3 - 24x + 12$$

$$f'(x) = 6x^2 - 24$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 24 = 0 \\ x^2 = 4 \\ x = \pm 2$$

$$6. a) \int_0^3 3x^2 dx = \left[x^3 \right]_0^3 = 3^3 - 0^3 = 27 \text{ a.e}$$

$$b) \int_1^2 x^2 + 3 dx = \left[\frac{x^3}{3} + 3x \right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} + 6 \right) - \left(\frac{1}{3} + 3 \right) = \\ = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} + 3 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} + \frac{9}{3} = \frac{16}{3} \text{ a.e}$$

$$c) \int_{-1}^1 x^3 + 2x + 1 dx = \left[\frac{x^4}{4} + x^2 + x \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{4} + 1 + 1 \right) - \left(\frac{1}{4} + 1 - 1 \right) = \\ = 2 \text{ a.e}$$

$$d) \int_0^2 e^{2x} dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^2 = \frac{e^{2 \cdot 2}}{2} - \frac{e^0}{2} = \frac{e^4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^4 - 1}{2} \text{ a.e}$$

Derivera och sätt

$$f'(x) = 0, \text{ lös}$$

ekvationen

$$c) f(x) = x^3 - 12x - 3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \\ x^2 = 4 \\ x = \pm 2$$

$$e) f(x) = e^{-x} + x$$

$$f'(x) = -e^{-x} + 1$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -e^{-x} + 1 = 0 \\ 1 = e^{-x}$$

$$\ln(1) = \ln e^{-x}$$

$$\ln(1) = -x$$

$$0 = -x$$

$$e) \int_1^3 e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_1^3 = -e^{-3} - (-e^{-1}) = -e^{-3} + e^{-1} = \frac{1}{e^3} + \frac{1}{e} \text{ a.e}$$

$$f) \int_1^2 e^{3x} + 1 dx = \left[\frac{e^{3x}}{3} + x \right]_1^2 = \left(\frac{e^6}{3} + 2 \right) - \left(\frac{e^3}{3} + 1 \right) = \frac{e^6}{3} - \frac{e^3}{3} + 1 = \frac{e^6 - e^3 + 3}{3} \text{ a.e}$$

$$g) \int_{-2}^2 e^x + 2x dx = \left[e^x + x^2 \right]_{-2}^2 = (e^2 + 4) - (e^{-2} + 4) = e^2 - e^{-2} \text{ a.e}$$

7. Första grafen

Titla på svaret

A: $f'(x) > 0$ B: $f'(x) < 0$ C: $f'(x) = 0$ D: $f'(x) > 0$

Andra grafen

A: $f'(x) < 0$ B: $f'(x) < 0$ C: $f'(x) > 0$ D: $f'(x) = 0$

$$8. y = kx + m \quad k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-10 - 8}{2 - (-1)} = \frac{-18}{3} = -6$$

$$y = -6 + 2 \quad \text{Skärning i y}$$

$$9. a) f(x) = x^2 \quad f'(x) = 2x \quad f'(1) = 2 \cdot 1 = 2 \quad k = 2$$

$$y = kx + m \quad \text{Hitta y-värdet för tangenten: } f(1) = 1$$

$$1 = 2 \cdot 1 + m \quad m = -1 \quad \text{Svar: } y = 2x - 1$$

$$b) f(x) = x^3 - 4x \quad f'(x) = 3x^2 - 4 \quad f'(1) = 3 - 4 = -1 \quad k = -1$$

$$y = kx + m \quad \text{Hitta y-värdet för tangenten: } f(1) = 1 - 4 = -3$$

$$-3 = -1 \cdot 1 + m \quad m = -2 \quad y = -x - 2$$

$$-3 = -1 + m$$

$$c) f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x \quad f'(1) = e' = e \quad k = e$$

$$y = kx + m \quad \text{Sök } y\text{-värdet: } f(1) = e' = e$$

$$e = e + m \quad m = 0 \quad y = ex$$

$$d) f(x) = x^4 - 2x \quad f'(x) = 4x^3 - 2 \quad f'(1) = 4 - 2 = 2$$

$$k = 2 \quad y = kx + m \quad \text{Sök } y\text{-värde } f(1) = 1 - 2 = -1$$

$$-1 = 2 \cdot 1 + m \quad m = -3 \quad y = 2x - 3$$

$$10. a) \sin v = 0,56$$

$$\sin^{-1}(0,56) = 34,05^\circ$$

$$180^\circ - 34,05^\circ = 145,9^\circ$$

$$\text{Svar: } 34,05^\circ, 145,9^\circ$$

$$b) \cos v = 0,41 \quad \cos^{-1}(0,41) = 65,79^\circ$$

$$\text{Svar: } 65,79^\circ$$

$$c) \cos v = 0,89 \quad \cos^{-1}(0,89) = 27,12^\circ$$

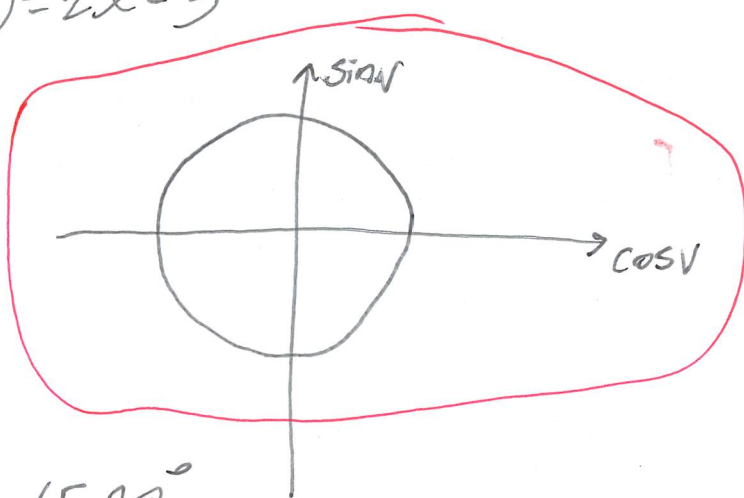
$$\text{Svar: } 27,12^\circ$$

$$d) \sin v = 1 \quad \sin^{-1}(1) = 90^\circ \quad 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \quad \text{Samma lösning}$$

$$\text{Svar: } 90^\circ$$

$$e) \cos v = -0,43 \quad \cos^{-1}(-0,43) = 115,46^\circ$$

$$\text{Svar: } 115,46^\circ$$



$$11. \quad a) \quad F(t) = \frac{5}{\frac{x}{5} + 0,5} + 300$$

efter 9 år: $F(9) = \frac{5}{\frac{9}{5} + 0,5} + 300 \approx 302$ svar: 302 fiskar

b) om vi låter $x \rightarrow \infty$ (eller något stort) kommer

$\frac{5}{\frac{x}{5} + 0,5}$ försummas eftersom $\frac{x}{5}$ -termen kommer

bli jämförbar svar: 300 fiskar ungefär

12. om $f''(x) > 0$ är det en minimipunkt
om $f''(x) < 0$ är det en maximipunkt

$x=1$ ger minimipunkt

$x=-4$ ger också minimipunkt

$$13. \quad \int_8^9 x^2 - 8x \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x^2 \right]_8^9 = \left(\frac{9^3}{3} - 4 \cdot 9 \right) - \left(\frac{8^3}{3} - 4 \cdot 8 \right)$$

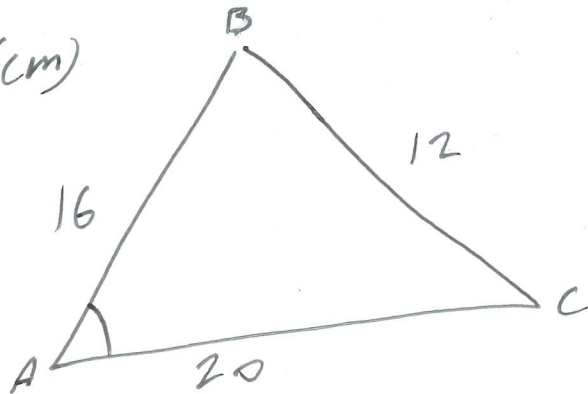
Minirörelse: 68,33 a.l

14. $f(x) = g(x)$ betyder skärningen mellan graferna

$$x_1 = 2$$

$$x_2 \approx -0,8$$

15. (cm)



Sök vinkel A

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \quad (\text{Cosinussatsen})$$

$$12^2 = 20^2 + 16^2 - 2 \cdot 20 \cdot 16 \cdot \cos A$$

$$2 \cdot 20 \cdot 16 \cos A = 20^2 + 16^2 - 12^2$$

$$\cos A = \frac{20^2 + 16^2 - 12^2}{2 \cdot 20 \cdot 16}$$

$$A = 36,86^\circ$$

Sinussatsen:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

$$\sin B = \frac{\sin A}{a} \cdot b$$

$$\sin B = \frac{\sin 36,86^\circ}{12} \cdot 20$$

$$B = 88^\circ$$

$$C: 180^\circ - (88^\circ + 36,86^\circ) \approx 54,14^\circ$$

16. Allt inom ett absolutbelopp blir positivt

a) $|3| + |6| - |-20| = 3 + 6 - 20 = -11$

b) $||0| - |-10|| + |2| + |2| = |0 - 10| + 2 + 2 = 4$

c) $|4 - 6| + |1 + 3| - |4 - 9| = |-2| + |4| - |-5| = 2 + 4 + 5 = 11$

17. a) $|x| = 9$ finns två svar antingen $x = 9$ eller $x = -9$

b) $(x+1)(x-4)(x+2) = 0$ när en respektive parentes noll

$$x_1 = -1 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = -2$$

$$c) x^3 - 4x = 0$$

$$x(x^2 - 4) = 0$$

$$(x^2 - 4) = 0$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = -2$$

$$x_1 = 0 \quad d) \frac{x+8}{x+1} = 2$$

$$x+8 = 2(x+1)$$

$$x+8 = 2x+2$$

$$6 = x$$

$$e) e^x = 4$$

$$\ln e^x = \ln 4$$

$$x = \ln 4$$

$$f) e^{-2x} = 5$$

$$\ln e^{-2x} = \ln 5$$

$$-2x = \ln 5$$

$$x = \frac{\ln 5}{-2}$$

$$g) \ln(x) + \ln(5) = \ln(10)$$

Regel: $\ln(x \cdot 5) = \ln(10)$

$$x = 2$$

$$18. f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \quad f'(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$f''(x) = 2x - 4$$

$$a) f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{4-3}$$

$$x = 2 \pm 1 \quad x_1 = 3$$

$$x_2 = 1$$

$$b) f'(1) = 1 - 4 \cdot 1 + 3 = 0$$

$$c) f''(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0$$

$$x = 2$$

$$d) f''(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2$$

$$19. \quad f(x) = x^3 + 2x \quad f'(x) = 3x^2 + 2$$

$f'(x)$ är alltid positivt eftersom den aldrig skär x -axeln. Därför är $f'(x) > 0$ för alla x

$$20. \quad F(x) = x^3 + 2x$$

$$f(x) = 3x^2 + 2$$

$$f'(x) = 6x$$

21. a) $f(x) = 0$ När skär grafen x -axeln?

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = -1$$

$$x_3 = 1$$

$$x_4 = 2$$

b) $f'(x) = 0$ för vilka x har grafen en extrempunkt

$$x_1 \approx -1,7$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 \approx 1,7$$