

Matematik 5

Elevhäfte

Delprov B	Uppgift 1-10. Endast svar krävs.
Delprov C	Uppgift 11-18. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter för Delprov B och Delprov C tillsammans.
Hjälpmedel	Formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D).
Tillsammans kan de ge 58 poäng varav 20 E-, 19 C- och 19 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget

E: 13 poäng

D: 22 poäng varav 6 poäng på minst C-nivå

C: 28 poäng varav 11 poäng på minst C-nivå

B: 37 poäng varav 5 poäng på A-nivå

A: 44 poäng varav 9 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: _____

Födelsedatum: _____

Gymnasieprogram/Komvux: _____

Delprov B: Digitala verktyg är inte tillåtna. Endast svar krävs. Skriv dina svar direkt i provhäftet.

1. Beräkna $\sum_{k=1}^4 (k^2 - 1)$ _____ (1/0/0)

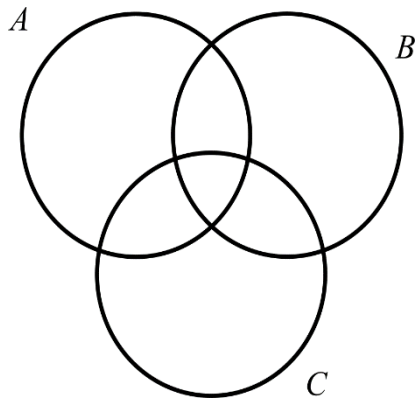
2. Tre mängder $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ och $C = \{8, 9\}$ är givna.
Bestäm

a) $(A \cup B) \cap C$ { _____ } (1/0/0)

b) $A \setminus B$ { _____ } (1/0/0)

3. Beräkna $\frac{12!}{10! \cdot 22}$ _____ (1/0/0)

4. Markera i Venndiagrammet det område som motsvaras av $(A \cap B) \cup C$.



(1/0/0)

5. Ange två möjliga värden för x om $x \equiv 35 \pmod{11}$.

_____ (1/0/0)

6. Med hjälp av bokstäverna A, B, C, D, E och F bildas koder som består av fyra olika bokstäver, t ex DFBE.

- a) Hur många sådana koder kan bildas? _____ (1/0/0)
- b) Hur många av dessa koder börjar med AE? _____ (0/1/0)

7. Mängderna A och B är definierade på följande sätt:

$$A = \{n \mid n \equiv 1 \pmod{6}\}$$

$$B = \{n \mid n \text{ är primtal och } 10 < n < 50\}$$

- a) Bestäm det minsta talet i mängden $A \cap B$ _____ (0/1/0)
- b) Bestäm det största talet i mängden $A \cap B$ _____ (0/1/0)

8. Ett tåg består av ett lok och fyra vagnar. Loket är placerat längst fram i tåget. Vagnarna finns i tre olika färger, rött, grönt och blått. På hur många sätt kan ett sådant tåg se ut om det ska innehålla minst en röd vagn?

_____ (0/0/1)

9. Ange ett värde på k och ett värde på n så att $\binom{25}{15} + \binom{25}{16} = \binom{n}{k}$

$n =$ _____

$k =$ _____ (0/0/1)

10. Bestäm det minsta positiva heltalet n för vilket $n!$ är delbart med 3^8 .

_____ (0/0/1)

Delprov C: Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

11. En talföljd är definierad rekursivt på följande sätt:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = a_{n-1} \cdot n + n^2 & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Bestäm a_3

(2/0/0)

12. Förändringen av antalet starar i Sverige under 1990-talet kan enligt en förenklad modell beskrivas av differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} = -0,023y, \quad y(0) = 5 \cdot 10^6$$

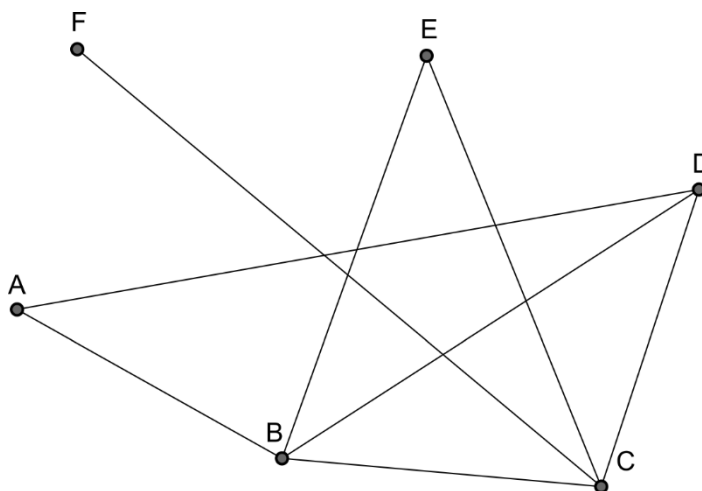
där y är antalet starar t år efter 1990.



Johanna påstår att $y = 5 \cdot 10^6 \cdot e^{-0,023t}$ är en lösning till differentialekvationen. Undersök om hon har rätt.

(2/0/0)

- 13.



Visa att det går att lägga till en kant i grafen, så att den nya graf som bildas innehåller en Eulercykel/Eulerkrets. Motivera ditt svar.

(0/1/0)

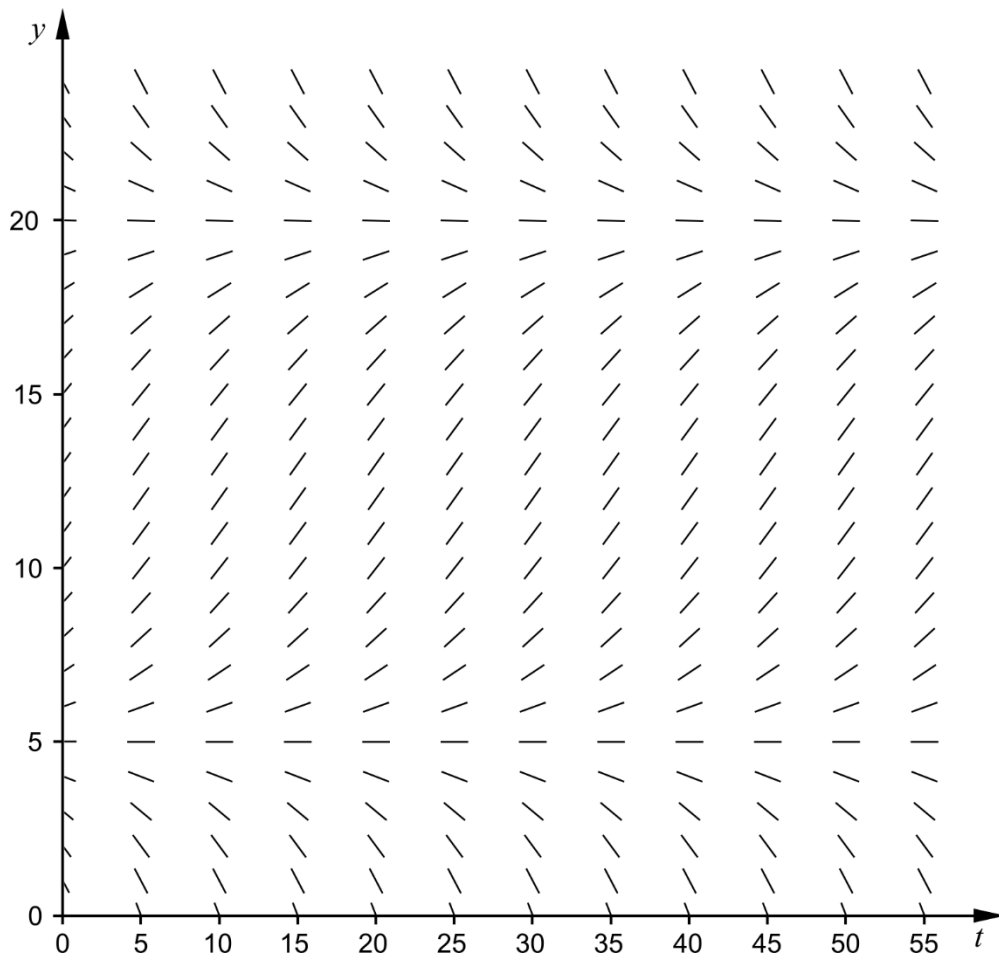
- 14.** Summan $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ av de n första talen i en aritmetisk talföljd ges av $S_n = (5n - 3) \cdot n$ för $n = 1, 2, 3, \dots$

Bestäm talföljdens

- a) första tal a_1 . (1/0/0)
- b) differens. (0/2/0)
- 15.** Bestäm koefficienten för $x^2 y^3$ i utvecklingen av $(3x - y)^5$. (0/2/0)
- 16.** Förenkla uttrycket $\binom{n+1}{2} \cdot \frac{(n-1)!}{n! \cdot (n+1)}$ så långt som möjligt. (0/2/0)

17. I grafen visas ett riktningsfält till differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} = -(1 - \frac{y}{5})(1 - \frac{y}{20})$$



- a) Skissa i figuren lösningskurvan till differentialekvationen om $y(0) = 6$ (1/0/0)
- b) Lösningskurvan då begynnelsevillkoret är $y(0) = 5$ och lösningskurvan då begynnelsevillkoret är $y(0) = 5,01$ kommer att se olika ut.

Beskriv hur dessa två kurvor kommer att se ut och förklara kurvornas

utseende enbart utifrån differentialekvationen $\frac{dy}{dt} = -(1 - \frac{y}{5})(1 - \frac{y}{20})$ (0/1/2)

18. Visa med hjälp av induktion att $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$ för $n \geq 1$ (0/1/3)

Matematik 5

Elevhäfte

Delprov D	Uppgift 19-27. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter.
Hjälpmedel	Digitala verktyg, formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D).
Tillsammans kan de ge 58 poäng varav 20 E-, 19 C- och 19 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget

E: 13 poäng

D: 22 poäng varav 6 poäng på minst C-nivå

C: 28 poäng varav 11 poäng på minst C-nivå

B: 37 poäng varav 5 poäng på A-nivå

A: 44 poäng varav 9 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står "*Endast svar krävs*" behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: _____

Födelsedatum: _____

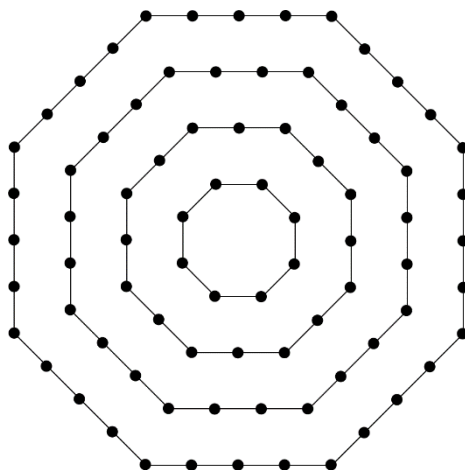
Gymnasieprogram/Komvux: _____

Delprov D: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

19. Beräkna $\binom{36}{14}$ *Endast svar krävs* (1/0/0)

20. En frukthandlare har 12 olika äpplesorter till försäljning. Beräkna på hur många sätt en kund kan välja 3 olika äpplesorter utan hänsyn till ordning. (1/0/0)

21. Figuren visar regelbundna åttahörningar med prickar placerade i ett visst regelbundet mönster. Antalet prickar på den innersta åttahörningen kallas för a_1 , antalet prickar på den näst innersta åttahörningen kallas för a_2 , och så vidare.



Åttahörningarna bildas enligt ett mönster. Fler åttahörningar kan bildas enligt samma mönster.

- a) Bestäm en sluten (explicit) formel för antal prickar, a_n , på den n :te åttahörningen. *Endast svar krävs* (1/0/0)
- b) Bestäm en rekursiv formel för talföljden $a_1, a_2, a_3, \dots$ *Endast svar krävs* (1/0/0)
22. Fyra flickor och sex pojkar har fått tio platser reserverade på en fotbollsmatch. Platserna är placerade intill varandra i en rad.
- a) Beräkna på hur många sätt de tio ungdomarna kan placeras på de tio platserna. (1/0/0)
- b) Beräkna på hur många sätt de kan placeras på de tio platserna om flickorna ska sitta bredvid varandra. (0/0/2)

23. Vid en odling av bakterier fanns från början cirka 600 bakterier på en agarplatta. Agarplattan innehåller näringslösning som bakterierna kan leva av. På grund av begränsad tillgång till näring och syre, kan inte bakterieantalet bli hur stort som helst på plattan.



Bilden visar en agarplatta med bakterier

Bakterietillväxten kan beskrivas med differentialekvationen

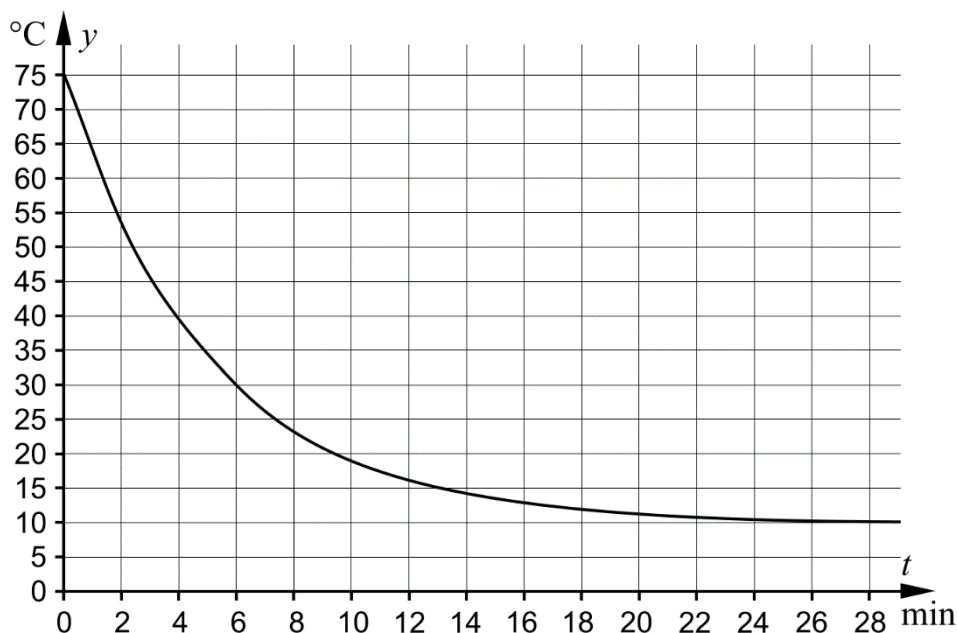
$\frac{dN}{dt} = 9,0 \cdot 10^{-6} \cdot N(7000 - N)$ där N är antalet bakterier vid tidpunkten t minuter.

- a) Lös differentialekvationen $\frac{dN}{dt} = 9,0 \cdot 10^{-6} \cdot N(7000 - N)$ då $N(0) = 600$ (1/0/0)
- b) Bestäm vid vilken tidpunkt som tillväxthastigheten är maximal. (0/3/0)
24. Percy sätter varje fredag in 100 kr i en aktiefond. Dessvärre minskar aktiefondens värde med 2 % varje vecka.
- a) Beräkna värdet av Percys fondandelar direkt efter den 52:a insättningen. (0/2/0)
- b) Utred vad som händer med värdet av Percys fondandelar på lång sikt om han fortsätter att sätta in 100 kr varje fredag och aktiefondens värde minskar med 2 % varje vecka. (0/0/1)

25. Enligt Newtons avsvlningslag är temperaturens förändringshastighet hos en vätska proportionell mot temperaturskillnaden mellan vätskans temperatur y i grader Celsius och omgivningens temperatur T i grader Celsius.

Vid en utflykt håller Mikaela upp en kopp varm chokladdryck från sin termos.

Diagrammet visar hur chokladdrycken svalnar.



Teckna en differentialekvation med begynnelsevillkor som beskriver temperaturens förändringshastighet $\frac{dy}{dt}$ hos chokladdrycken vid tiden t minuter. Använd diagrammet för att bestämma konstanterna i differentialekvationen.

(1/2/2)

26. Visa att $11^{2n} + 5^{2n+1} - 6$ är delbart med 24 för alla positiva heltal n .

(0/0/3)

27. På en skola finns det 70 elever i årskurs 3.
Av dessa har

- a) 40 valt matematik, 30 valt fysik och 20 valt kemi,
- b) 15 valt både matematik och fysik,
- c) 12 valt både matematik och kemi,
- d) 10 valt både fysik och kemi,
- e) x elever valt alla tre ämnena,
- f) y elever inte valt något av de tre ämnena

Bestäm ett samband mellan x och y samt undersök vilka värden som x och y kan anta.

(0/0/3)

Matematik 5

Bedömningsanvisningar

1. Allmän information om bedömningen och betygssättningen av provet i matematik 5

Allmänna riktlinjer för bedömning

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges den poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som provas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den *huvudsakliga* som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E_{PL} och A_R ska tolkas som en "problemlösningspoäng på E-nivå" respektive en "resonemangspoäng på A-nivå".

För uppgifter av kortvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

För uppgifter av långvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus eller följdfel.

Bedömningsanvisningar

Bedömningsanvisningarna till långvarsuppgifterna är skrivna enligt två olika modeller. Avvikelser från dessa kommenteras i direkt anslutning till uppgiften i förekommande fall.

Modell 1:

Godtagbar ansats, t ex ...	+1 E_P
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (...)	+1 E_P

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen utfaller först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet "med" inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.

Modell 2:

Godtagbar ansats, t ex ...	+1 E _P
med korrekt bestämning av ...	+1 E _P
Godtagbar verifiering av ...	+1 E _P

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (3/0/0). I detta exempel är den tredje poängen oberoende av den andra poängen. Det indikeras med att den tredje raden inleds med stor bokstav. Det innebär att den tredje poängen kan falla ut även om den andra poängen inte gör det.

Modell 3:

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. ... 1 E _R	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. ... 1 E _R och 1 C _R	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. ... 1 E _R , 1 C _R och 1 A _R

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).

Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga

Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för betyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

För uppgifter där elevens skriftliga kommunikativa förmåga ska bedömas gäller de allmänna kraven nedan.

Kommunikationspoäng på C-nivå (C_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.

Dessutom ska

1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.

Dessutom ska

1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

För uppgifter där det kan delas ut kommunikationspoäng på C- eller A-nivå kan symboler, termer, hänvisningar och figurer förekomma i lösningen. Följande tabell kan då vara till stöd vid bedömningen av skriftlig kommunikativ förmåga:

Symboler	t.ex. $=, <, >, \leq, \geq, \approx, \pm, \in, \subset, \cup, \cap, \Sigma, \{, \}, \backslash, \rightarrow, , !, f'(x), f''(x),$ VL, HL
Termer	t.ex. index, induktionsbas, induktionsantagande, induktionssteg, slutsats, VSB, venndiagram, mängd, kongruens, graf, hamiltoncykel, eulerväg, rekursion, differentialekvation, begynnelsevillkor, ekvation, andel, derivata, verifiera, fakultet, kombinationer, permutationer, sannolikhet, gynnsamma utfall, möjliga utfall, union, snitt, differens, komplement
Hänvisningar	t.ex. till binomialsatsen, geometrisk talföljd, aritmetisk talföljd
Övrigt	t.ex. figurer (med införda beteckningar), definierade variabler, tabeller, angivna enheter

Provsammanställning – Kunskapskrav

Tabell för delprov B, C och D som visar hur antal poäng fördelas på målen på respektive nivå E, C och A.

Mål	Nivå			Totalt
	E	C	A	
B	7	2	1	10
P	5	4	2	11
PM	6	9	9	24
RK	2	4	7	13
Σ	20	19	19	58

Kravgränser

Provet består av tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D).

Tillsammans kan de ge 58 poäng varav 20 E-, 19 C- och 19 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget

E: 13 poäng

D: 22 poäng varav 6 poäng på minst C-nivå

C: 28 poäng varav 11 poäng på minst C-nivå

B: 37 poäng varav 5 poäng på A-nivå

A: 44 poäng varav 9 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng eleven kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) eleven har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”Endast svar krävs” behöver eleven endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att eleven redovisar sina beräkningar, förklarar och motiverar sina tankegångar och ritar figurer vid behov.

Provbetyg

En resultatfil kan hämtas på webbplatsen <http://www.edusci.umu.se/np/bs> enligt punkt 1-2 på sidan 4 i lärarinformationen och fyllas i av läraren efter genomfört prov.

I resultatfilen genereras elevens provbetyg samt en sammanställning över hur elevens prestationer fördelar sig över de mål och det centrala innehåll som provas i provet. Denna information kan vara ett stöd och komplement som senare ska ligga till grund för elevens kursbetyg.

2. Bedömningsanvisningar

I det här kapitlet finns anvisningar för hur provet ska bedömas.

Läsanvisning

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om exempel på bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en hänvisning.

Instruktioner för bedömning av delprov B

1. **Max 1/0/0**

Korrekt svar (26)
+1 E_B

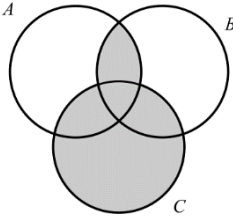
2. **Max 2/0/0**
 - a) Korrekt svar ($\{8\}$) +1 E_B
 - b) Korrekt svar ($\{1, 3\}$) +1 E_B

3. **Max 1/0/0**

Korrekt svar (6)
+1 E_P

4. **Max 1/0/0**

Korrekt markerat område



+1 E_B

5. **Max 1/0/0**

Korrekt svar (t ex 2 och 13)
+1 E_B

6.		Max 1/1/0
a)	Korrekt svar (360)	+1 E _{PL}
b)	Korrekt svar (12)	+1 C _{PL}
7.		Max 0/2/0
a)	Korrekt svar (13)	+1 C _B
b)	Korrekt svar (43)	+1 C _B
8.		Max 0/0/1
	Korrekt svar (65)	+1 A _{PL}
9.		Max 0/0/1
	Korrekt svar ($k = 16, n = 26$)	+1 A _B
10.		Max 0/0/1
	Korrekt svar (18)	+1 A _{PL}

Instruktioner för bedömning av delprov C

- 11. Max 2/0/0**
- Godtagbar ansats, bestämmer a_1 +1 E_P
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (33) +1 E_P
- 12. Max 2/0/0**
- Godtagbar ansats, t ex deriverar funktionen +1 E_R
 med i övrigt godtagbart enkelt resonemang med slutsatsen att Johanna har fel +1 E_R
- 13. Max 0/1/0**
- Godtagbart välgrundat resonemang där motivering till varför kanten FD ger en Eulercykel ingår, t ex hänvisar till att alla noder får jämnt gradtal *eller* ger exempel på en Eulercykel +1 C_R
- 14. Max 1/2/0**
- a) Godtagbar lösning med korrekt svar (2) +1 E_{PL}
- b) Godtagbar ansats, t ex bestämmer differensen mellan två på varandra följande summor +1 C_{PL}
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (10) +1 C_{PL}
- 15. Max 0/2/0**
- Godtagbar ansats, t ex anger ett korrekt uttryck för x^2y^3 -termen,

$$\binom{5}{3} \cdot (3x)^2 \cdot (-y)^3$$
 +1 C_P
 med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (−90) +1 C_P

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.



16.

Max 0/2/0

Godtagbar ansats, uttrycker $\binom{n+1}{2}$ som en kvot

+1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar $(\frac{1}{2})$

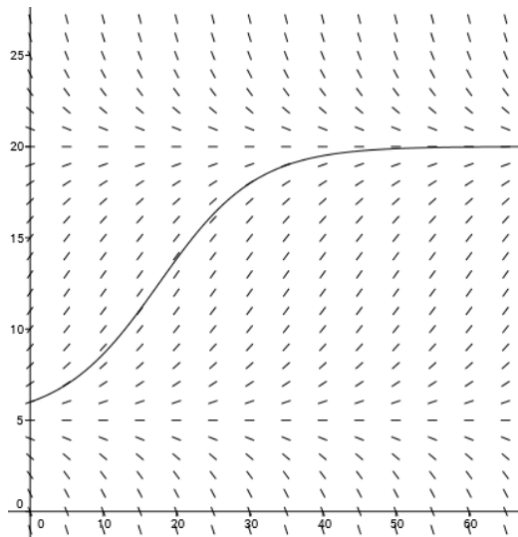
+1 C_P

17.

Max 1/1/2

- a) Godtagbart skissad lösningskurva som startar vid (0,6), följer riktningsfältet och närmar sig $y = 20$

+1 E_B



- b) Godtagbart välgrundat resonemang som med hjälp av differentialekvationen förklarar att om $y(0) = 5$ så är $y(t) = 5$

+1 C_R

Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang som med hjälp av differentialekvationen och begynnelsevillkoret $y(0) = 5,01$ beskriver kurvans utseende och innehåller minst en av nedanstående punkter

+1 A_R

med godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang som med hjälp av differentialekvationen och begynnelsevillkoret $y(0) = 5,01$ beskriver kurvans utseende och innehåller båda nedanstående punkter

+1 A_R

- Kurvans utseende när y är nära 5 motiverat av derivatans värde när y är nära 5
- Kurvans utseende när y är nära 20 motiverat av derivatans värde när y är nära 20

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.



18.

Max 0/1/3

Visar att likheten gäller för $n = 1$ samt formulerar induktionsantagandet korrekt

+1 C_R

Påbörjar behandling av induktionssteget där induktionsantagandet används korrekt

+1 A_R

med i övrigt godtagbart genomfört bevis

+1 A_R

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 3.

+1 A_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.



Instruktioner för bedömning av delprov D

19.		Max 1/0/0
	Korrekt svar (3 796 297 200)	+1 E _P
20.		Max 1/0/0
	Godtagbar lösning med korrekt svar (220)	+1 E _B
21.		Max 2/0/0
a)	Korrekt svar ($a_n = 8n$)	+1 E _{PL}
b)	Korrekt svar ($a_{n+1} = a_n + 8, a_1 = 8$)	+1 E _{PL}
22.		Max 1/0/2
a)	Godtagbar lösning med korrekt svar (3628800)	+1 E _{PL}
b)	Godtagbar ansats, t.ex. bestämmer att gruppen flickor kan placeras ut på 7 sätt bland pojkarna <i>eller</i> bestämmer att flickorna och pojkarna kan permuteras på $4! \cdot 6!$ sätt	+1 A _{PL}
	med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (120960)	+1 A _{PL}
23.		Max 1/3/0
a)	Godtagbar lösning med godtagbart svar (t ex $N(t) \approx \frac{7000 \cdot 1,065^t}{1,065^t + 10,667}$)	+1 E _P
b)	Godtagbar ansats, t ex visar insikt om att tillväxthastigheten är maximal då $N = 3500$	+1 C _M
	med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (37,6 minuter)	+1 C _M
	Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 3.	+1 C _K

24. Max 0/2/1

- a) Godtagbar ansats, t ex sätter in korrekta värden i formeln för
geometrisk summa +1 C_{PL}
med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (3251 kr) +1 C_{PL}
- b) Godtagbar motivering till att fondandelarnas värde närmar sig
gränsvärdet 5000 kr +1 A_R

25. Max 1/2/2

- Godtagbart begynnelsevillkor, $y(0) = 75$ +1 E_M
- Godtagbart uppställd differentialekvation, t ex $\frac{dy}{dt} = k(y - T)$ +1 C_M
- Godtagbar bestämning av omgivningens temperatur T , $T = 10$ +1 C_{PL}
- Godtagbar ansats för bestämning av proportionalitetskonstanten, t ex inser
att lutningen på kurvan i en punkt kan användas +1 A_{PL}
- med i övrigt godtagbar bestämning av proportionalitetskonstanten, $k \approx -0,2$ +1 A_{PL}

26. Max 0/0/3

- Godtagbar ansats, t ex skriver om uttrycket med potenslagarna,
 $(11^2)^n + 5 \cdot (5^2)^n - 6$ +1 A_P
- med i övrigt godtagbar procedur som leder till att uttrycket är
kongruent med 0(mod 24) +1 A_P
- Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 3. +1 A_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.



27. Max 0/0/3

- Godtagbar ansats, tecknar ett samband mellan x och y , t ex $x + y = 17$ +1 A_M
- med bestämning av något villkor på x , $x \leq 10$ eller $x \geq 2$ +1 A_M
- med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($2 \leq x \leq 10, 7 \leq y \leq 15$) +1 A_M

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.



3. Exempel på bedömda elevlösningar

Uppgift 15

Elevlösningsexempel 15.1 (1 Cp)

$$\binom{5}{3} (3x)^2 \cdot y^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 9x^2 \cdot y^3 = 10 \cdot 9x^2y^3$$

Svar: 90

Bedömningskommentarer till exemplet: Lösningen visar ett i huvudsak korrekt sätt att använda binomialsatsen, däremot saknas minustecknet i uppställningen av x^2y^3 -termen vilket ger fel svar. Elevlösningen i sin helhet anses uppfylla kraven för den första procedurpoängen på C-nivå.

Uppgift 17b

Elevlösningsexempel 17.1 (1 CR)

$$\frac{dy}{dt} = -\left(1 - \frac{y}{5}\right)\left(1 - \frac{y}{20}\right)$$

Differentialekvationen är 0 för y -värdena 5 ($1 - \frac{5}{5} = 0$) och 20 ($1 - \frac{20}{20} = 0$). Då lösningskurvans begynnelsevillkor är $y(0) = 5$ kommer dess lutning att vara 0.

Men när begynnelsevillkoret är $y(0) = 5,01$ kommer lösningskurvan ha svag lutning för låga x men sedan öka och därefter minska igen när y -värdet närmar sig 20 medan lösningskurvan $y(0) = 5$ kommer att anta y -värdet 5 för alla x .

Bedömningskommentarer till exemplet: I elevlösningen används differentialekvationen för att bestämma att kurvans lutning är noll då $y(0) = 5$ och beskrivningen av motsvarande lösningskurva är godtagbar. Av lösningen framgår det inte hur differentialekvationen är använd då $y(0) = 5,01$. Elevlösningen ges en resonemangspoäng på C-nivå.

Elevlösningsexempel 17.2 (1 CR och 1 AR)

Om $y(0) = 5$ blir $y'(0) = 0$

$$\text{pga } \frac{dy}{dt} = -\left(1 - \frac{5}{5}\right)\left(1 - \frac{y}{20}\right) = 0$$

Vilket ger att $y(t)$ alltid kommer vara 5 och derivatan aldrig ändras. Om $y(0) = 5$ blir kurvan alltså en rät linje parallell med t -axeln.

Om $y(0) = 5,01$ blir $\left(1 - \frac{y}{5}\right)$ ett litet negativt tal och $1 - \frac{y}{20}$ positivt. $\frac{dy}{dt}$ blir positivt;
 så

startpunkten, y ökar då och fortsätter så till $y = 20$ och $\frac{dy}{dt}$ blir 0.

Bedömningskommentarer till exemplet: I elevlösningen används differentialekvationen för att bestämma att kurvans lutning är noll då $y(0) = 5$ och beskrivningen av motsvarande lösningskurva är korrekt. I lösningen framgår nätt och jämt hur den ena faktorn påverkar kurvans utseende då $y(0) = 5,01$. Däremot diskuteras inte kurvans utseende kring $y = 20$ utifrån differentialekvationen. Sammantaget ges elevlösningen en resonemangspoäng på C-nivå och nätt och jämnt första resonemangspoängen på A-nivå.

Elevlösningsexempel 17.3 (1 CR och 2 AR)

Då $y(0) = 5$ är y en konstant-funktion med värdet 5. Eftersom y 's förändringshastighet endast beror på värdet av y och $y'(0) = 0$ kommer funktionsvärdet att vara konstant.

$$y'(0) = -(1-1)\left(1 - \frac{1}{20}\right) = 0$$

Då $y(0) = 5,01$ kommer $y'(0)$ att vara positivt vilket gör att y kommer att växa för att sedan sluta att växa då y närmar sig 20, då termen $\left(1 - \frac{y}{20}\right)$ i y' närmar sig 0.

Bedömningskommentarer till exemplet: Kopplingen mellan kurvans utseende och differentialekvationen är tydligt beskriven. Därmed anses elevlösningen uppfylla kraven för en resonemangspoäng på C-nivå och båda resonemangspoängen på A-nivå.

Uppgift 18

Elevlösningsexempel 18.1 (1 CR och 2 AR)

$$\textcircled{1} \quad k=1 \quad VL = 1 \cdot 1! = 1$$

$$HL = (1+1)! - 1 = 2! - 1 = 1$$

$$\textcircled{2} \quad k=p \quad 1 + 4 + \dots + p \cdot p! = (p+1)! - 1$$

$$\textcircled{3} \quad k=p+1 \quad \underbrace{1 + 4 + \dots + p \cdot p!}_{(p+1)! - 1} + (p+1)(p+1)! = (p+2)! - 1$$

$$VL = (p+1)! - 1 + (p+1)(p+1)!$$

$$HL = (p+2)(p+1)! - 1$$

$$\begin{aligned} HL &= (p+2)(p+1) \cdot p \cdot (p-1)! - 1 = \\ &= (p-1)! (p^3 + 3p^2 + 2p) - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} VL &= (p+1)^2 \cdot p \cdot (p-1)! + (p+1) \cdot p \cdot (p-1)! - 1 = \\ &= (p-1)! (p^3 + 2p^2 + p + (p+1)p) - 1 = \\ &= (p-1)! (p^3 + 3p^2 + 2p) - 1 = HL \end{aligned}$$

$$VL = (p-1)! (p^3 + 3p^2 + 2p) - 1 = HL$$

V.S.V

Bedömningskommentarer till exemplet: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet. Den formella hanteringen av bevisföringen är bristfällig då de olika stegen i induktionsbeviset är otydligt uppdelade och bristfälligt kommenterade. Dessutom saknas slutsats. Lösningen uppfyller därmed inte kraven för kommunikationspoäng på A-nivå. Sammantaget ges lösningen en resonemangspoäng på C-nivå och nätt och jämnt två resonemangspoäng på A-nivå.

Uppgift 26

Elevlösningsexempel 26.1 (2 Ap)

$$\begin{aligned}
 11^{2n} + 5^{2n+1} - 6 &\equiv 0 \pmod{24} \\
 (11^2)^n + (5^2)^n \cdot 5 - 6 &\equiv 121^n + 25^n \cdot 5 - 6 \equiv \\
 \equiv 1^n + 1^n \cdot 5 - 6 &\equiv 1 + 1 \cdot 5 - 6 \equiv 6 - 6 \equiv 0
 \end{aligned}$$

Bedömningskommentarer till exemplet: Elevlösningen är utförd i sin helhet och därmed ges lösningen två procedurpoäng på A-nivå. När det gäller kommunikation används kongruenstecken på flertal ställen där det istället borde vara likhetstecken och (mod 24) saknas på några ställen. I slutet nämns inte heller varför sambandet gäller. Därmed anses inte kraven för kommunikationspoäng på A-nivå vara uppfyllda.

Uppgift 27

Elevlösningsexempel 27.1 (1 A_M)

70 sk

40 m

30 f

20 k

15 mf

12 mk

10 fk

x mfk

y inga

$$m + f + k - (mf + mk + fk) + x + y = 70$$

$$40 + 30 + 20 - (15 + 12 + 10) + x + y = 70$$

$$70 - 53 = x + y = 17$$

$$x = 17 - y$$

Bedömningskommentarer till exemplet: Elevlösningen visar en korrekt bestämning av sambandet mellan x och y . Undersökning av vilka värden x och y kan anta saknas. Sammantaget ges lösningen en modelleringspoäng på A-nivå.

Ur ämnesplanen för matematik

Matematiken har en flertusenårig historia med bidrag från många kulturer. Den utvecklas såväl ur praktiska behov som ur människans nyfikenhet och lust att utforska matematiken som sådan. Kommunikation med hjälp av matematikens språk är likartad över hela världen. I takt med att informationstekniken utvecklas används matematiken i alltmer komplexa situationer. Matematik är även ett verktyg inom vetenskap och för olika yrken. Ytterst handlar matematiken om att upptäcka mönster och formulera generella samband.

Ämnets syfte

Undervisningen i ämnet matematik ska syfta till att eleverna utvecklar förmåga att arbeta matematiskt. Det innefattar att utveckla förståelse av matematikens begrepp och metoder samt att utveckla olika strategier för att kunna lösa matematiska problem och använda matematik i samhälls- och yrkesrelaterade situationer. I undervisningen ska eleverna ges möjlighet att utmana, fördjupa och bredda sin kreativitet och sitt matematikkunnande. Vidare ska den bidra till att eleverna utvecklar förmåga att sätta in matematiken i olika sammanhang och se dess betydelse för individ och samhälle.

Undervisningen ska innehålla varierade arbetsformer och arbetssätt, där undersökande aktiviteter utgör en del. När så är lämpligt ska undervisningen ske i relevant praxisnära miljö. Undervisningen ska ge eleverna möjlighet att kommunicera med olika uttrycksformer. Vidare ska den ge eleverna utmaningar samt erfarenhet av matematikens logik, generaliserbarhet, kreativa kvaliteter och mångfacetterade karaktär. Undervisningen ska stärka elevernas tilltro till sin förmåga att använda matematik i olika sammanhang samt ge utrymme åt problemlösning som både mål och medel. I undervisningen ska eleverna dessutom ges möjlighet att utveckla sin förmåga att använda digital teknik, digitala medier och även andra verktyg som kan förekomma inom karaktärsämnena.

Undervisningen i ämnet matematik ska ge eleverna förutsättningar att utveckla förmåga att:

1. använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen.
2. hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg.
3. formulera, analysera och lösa matematiska problem samt värdera valda strategier, metoder och resultat.
4. tolka en realistisk situation och utforma en matematisk modell samt använda och utvärdera en modells egenskaper och begränsningar.
5. följa, föra och bedöma matematiska resonemang.
6. kommunicera matematiska tankegångar muntligt, skriftligt och i handling.
7. relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang.

Kunskapskrav Matematik kurs 5

Betyget E

Eleven kan **översiktligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **några** representationer samt **översiktligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnen i **bekanta situationer**. I arbetet hanterar eleven **några enkla** procedurer och löser uppgifter av standardkaraktär **med viss säkerhet**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem **av enkel karaktär**. Dessa problem inkluderar **ett fåtal** begrepp och kräver **enkla** tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att tillämpa **givna** matematiska modeller. Eleven kan med **enkla** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier och metoder.

Eleven kan föra **enkla** matematiska resonemang och värdera med **enkla** omdömen egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal och skrift **med inslag av** matematiska symboler och andra representationer.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **kursens innehåll** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **enkla** resonemang om exemplens relevans.

Betyget D Betyget D innebär att kunskapskraven för E och till övervägande del för C är uppfyllda.

Betyget C

Eleven kan **utförligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **några** representationer samt **utförligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnen. I arbetet hanterar eleven **flera** procedurer, **inklusive avancerade och algebraiska uttryck**, och löser uppgifter av standardkaraktär **med säkerhet**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att **välja och** tillämpa matematiska modeller. Eleven kan med **enkla** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem**. Eleven kan föra **välgrundade** matematiska resonemang och värdera med **nyanserade** omdömen egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. **Vidare kan eleven genomföra enkla matematiska bevis**. Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal och skrift **samt använder** matematiska symboler och andra representationer **med viss anpassning till syfte och situation**.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **några av kursens delområden** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **välgrundade** resonemang om exemplens relevans.

Betyget B Betyget B innebär att kunskapskraven för C och till övervägande del för A är uppfyllda.

Betyget A

Eleven kan **definiera och utförligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **flera** representationer samt **utförligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa **komplexa** matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnen. I arbetet hanterar eleven **flera** procedurer, **inklusive avancerade och algebraiska uttryck**, och löser uppgifter av standardkaraktär **med säkerhet och på ett effektivt sätt**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem **av komplex karaktär**. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar. **I problemlösning upptäcker eleven generella samband som presenteras med symbolisk algebra**. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att **välja, tillämpa och anpassa** matematiska modeller. Eleven kan med **nyanserade** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem**.

Eleven kan föra **välgrundade och nyanserade** matematiska resonemang, värdera med **nyanserade** omdömen **och vidareutveckla** egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. **Vidare kan eleven genomföra matematiska bevis**. Dessutom uttrycker sig eleven **med säkerhet** i tal och skrift **samt använder** matematiska symboler och andra representationer **med god anpassning till syfte och situation**. Genom att ge exempel relaterar eleven något i **några av kursens delområden** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **välgrundade och nyanserade** resonemang om exemplens relevans.

Centralt innehåll Matematik kurs 5

Undervisningen i kursen ska behandla följande centrala innehåll:

Samband och förändring

- F22** Strategier för att ställa upp och tolka differentialekvationer som modeller för verkliga situationer.
- F23** Användning och lösning av differentialekvationer med digitala verktyg inom olika områden som är relevanta för karaktärsämnena.

Diskret matematik

- D1** Begreppet mängd, operationer på mängder, mängdlärans notationer och venndiagram.
- D2** Begreppet kongruens hos hela tal och kongruensräkning.
- D3** Begreppen permutation och kombination.
- D4** Metoder för beräkning av antalet kombinationer och permutationer samt motivering av metodernas giltighet.
- D5** Begreppet graf, olika typer av grafer och dess egenskaper samt några kända grafteoretiska problem.
- D6** Begreppen rekursion och talföljd.
- D7** Induktionsbevis med konkreta exempel från till exempel talteoriområdet.

Problemlösning

- P1** Strategier för matematisk problemlösning inklusive användning av digitala medier och verktyg.
- P5** Omfångsrika problemsituationer inom karaktärsämnena som även fördjupar kunskaper om integraler och derivata. Matematikens möjligheter och begränsningar som verktyg i dessa situationer.
- P4** Matematiska problem med anknytning till matematikens kulturhistoria.