

Repetitionsmaterial för godkänt i kursen Ma2b

Självvärdering



Jag har inte koll på momentet



Jag har lite koll men behöver öva mer



Jag har koll på momentet

Komplettera repetitionen med uppgifter från boken och gamla nationella prov

Lösningsförslag till uppgifterna finns längst bak i dokumentet

Ekvationssystem	
Lösning av ekvationssystem grafiskt	
Lösning av ekvationssystem algebraiskt	
Formulera ekvationssystem från text	

1. Lös ekvationssystemen

a)
$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 5x - 3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

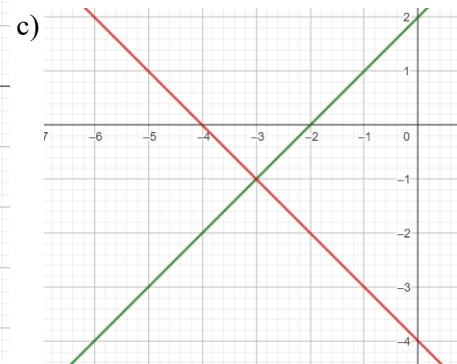
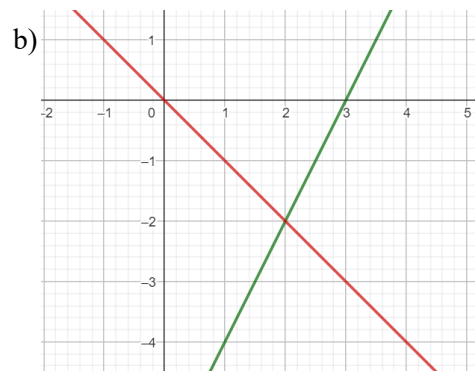
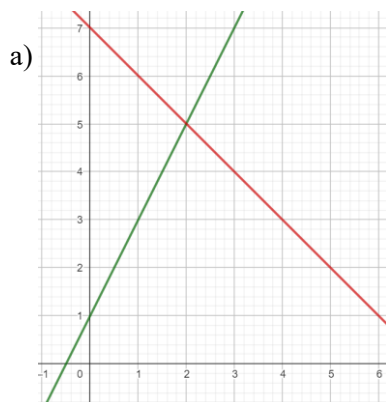
c)
$$\begin{cases} 2y + x = 12 \\ 3y - x = 13 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 4x - 2y = 14 \\ 2y + 2x = 22 \end{cases}$$

2. Nedan ser du 3 bilder på ekvationssystem som är representerade i grafisk form.

a) Lös ekvationssystemen grafiskt.

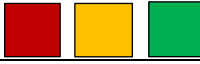
b) Skriv också upp ekvationssystemet för b) och c)



3. Formulera och lös ekvationssystemet från följande text

a) Summan av två tal är 20, differensen av samma tal är 10. Vilka tal har de egenskaperna?

b) På ett café kostar två bullar och en smörgås 35 kr samtidigt kostar fyra smörgåsar och en bulle 70 kr. Hur mycket kostar en bulle respektive en smörgås på caféet.

Kvadrerings- och konjugatregeln	
• Utveckla parenteser med reglerna • Faktorisera uttryck med reglerna	 

4. Förenkla följande uttryck

a) $(x + 3)^2$ b) $(x - 7)^2$ c) $(2x + 1)^2$ d) $(x - 2)(x + 2)$

e) $\left(2x + \frac{1}{2}\right)\left(2x - \frac{1}{2}\right)$ f) $4x - (x + 2)^2$ g) $(x - 3)^2 + 6x$ h) $-(2y + 3x)^2$

5. Faktorisera följande uttryck till formen $(a + b)^2$, $(a - b)^2$ eller $(a + b)(a - b)$ och förenkla om möjligt

a) $x^2 + 4x + 4$ b) $x^2 - 6x + 9$ c) $x^2 - 16$

d) $\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$

e) $\frac{x^2 - 4}{x + 2}$

Lös andragradsekvationer	
• Lösa ekvationer av typen $x^2 = a$ • Lösa ekvationer med nollproduktsmetoden • Lösa ekvationer med pq-metoden	  

6. Lös ekvationerna

a) $x^2 - 81 = 0$ b) $x^2 - 15 = 1$ c) $x^2 + 2x = 2x + 9$

7. Lös ekvationerna med nollproduktsmetoden

a) $x^2 - 4x = 0$ b) $x^2 + 15x = 0$ c) $3x^2 - 12x = 0$
d) $10x^2 = 100x$ e) $3x^2 + x = 0$

8. Lös ekvationerna med valfri metod

a) $x^2 - 4x - 5 = 0$

b) $x^2 + 10x + 9 = 0$

c) $2x^2 + 4x - 16 = 0$

d) $x^2 - 4x + 4 = 0$

e) $3x^2 = 18x - 15$

f) $2x^2 + 4x + 1 = x^2 + 2x$

9. För en rektangel är den längre sidan 2 meter längre än den andra. Arealen för rektangeln är 80 kvadratmeter. Bestäm vilka sidmått rektangeln har. *Prövning ger inga poäng.*

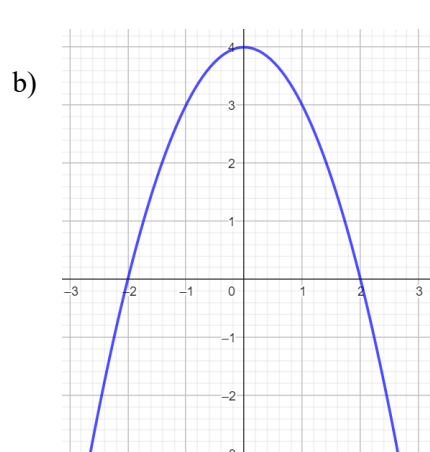
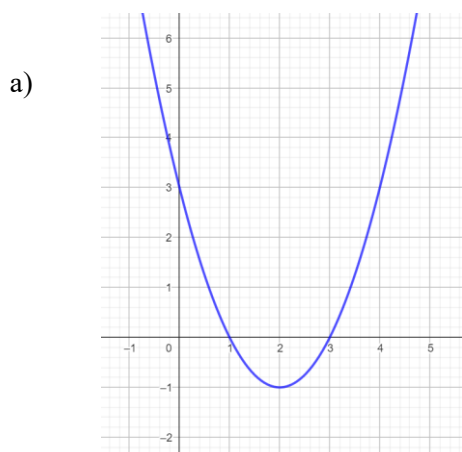
10. Joakim är 7 år äldre än sin bror. Produkten av deras åldrar är 540. Bestäm Joakims ålder med hjälp av en ekvation.

Andragsgradsfunktioner $f(x) = ax^2 + bx + c$

- Kunna begrepp som: nollställan, symmetrilinje, extrempunkt, maximi/minimivärde
- Bestämma till exempel $f(2)$ om du har en graf eller en funktionsekvation
- Bestämma till exempel $f(x) = 2$ om du har en graf eller en funktionsekvation
- Bestämma ovanstående begrepp grafiskt och algebraiskt

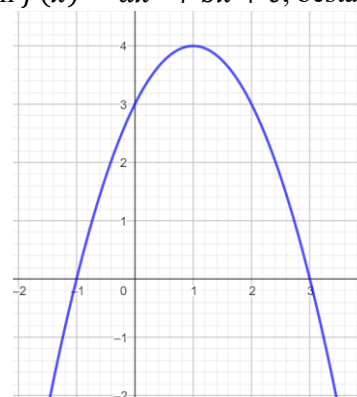


11. Bestäm nollställan, symmetrilinjen, extrempunkten (också om det är en maximi- eller minimipunkt) samt $f(2)$ för följande funktionerna nedan



12. Nedan ser du en funktion som går att skriva som $f(x) = ax^2 + bx + c$, bestäm följande

- a) $f(1)$
- b) Konstanten c i funktionsekvationen
- c) Lös ekvationen $f(x) = 0$
- d) Lös ekvationen $f(x) = 3$



- e) Lös ekvationen $f(x) = 4$
- f) Bestäm om konstanten a i ekvationen är större eller mindre än noll
- g) Joakim påstår att funktionsvärdet $f(5) < f(2)$ har han rätt?

13. En andragradsfunktion har nollställena $x_1 = 4$, $x_2 = 8$. Bestäm funktionens symmetrilinje.

14. En andragradsfunktion har en symmetrilinje som är $x = 5$ och ett nollställe i $x = 1$. Bestäm funktionen andra nollställe.

15. Joakim definierar följande funktion $f(x) = x^2 + 6x + 5$, bestäm följande

- a) $f(1)$
- b) $f(-2)$
- c) Lös ekvationen $f(x) = 5$
- d) Bestäm funktionens nollställan
- e) Bestäm funktionens symmetrilinje
- f) Bestäm funktionens extremvärde
- g) Skissa grafen till funktionen

Exponentiella funktioner $f(x) = Ca^x$	
• Kunna lösa ekvationer på typen $x^a = b$	
• Förståelse för vad C och a står för i funktionsekvationen	
• Kunna formulera exponential-funktioner utifrån texter	

16. Lös ekvationerna, svara exakt

- a) $x^7 = 10$
- b) $2x^4 = 22$
- c) $x^{\frac{1}{3}} = 2$

17. Joakim definierar funktionen $f(x) = 4 \cdot 1,2^x$, svara på följande frågor

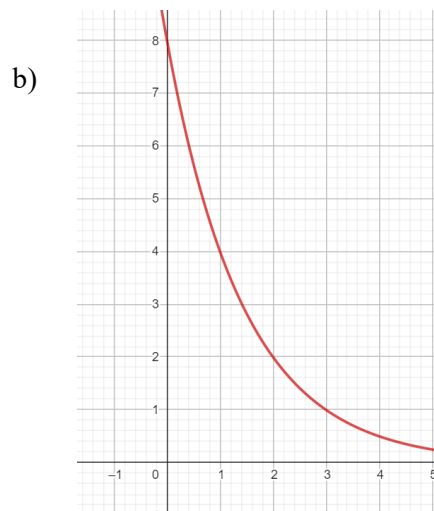
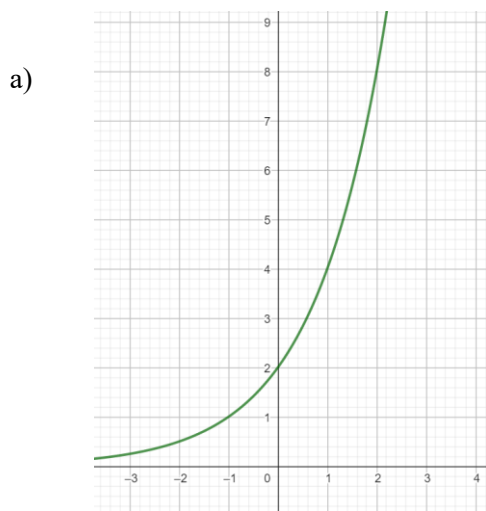
- a) Bestäm $f(3)$
- b) Bestäm $f(-1)$
- c) Vilket "startvärde" har funktionen
- d) Hur mycket procent ökar funktionen med för varje x -steg

18. Konstruera en funktion för varje scenario

- a) Konstruera en funktion vars graf skär y -axeln vid 10 och minskar med 7% för varje x -steg

- b) I en by Joakimköping finns det 10 000 personer 2023. Man räknar med att befolkningen ska öka med 10% varje år. Konstruera en funktion som beskriver befolkningsökningen där x är antal år efter 2023. Bestäm också hur många som bor i Joakimköping 2033.
- c) Joakim köper en bil för 200 000 kr. Man räknar med att bilen kommer tappa 5% av sitt värde varje år. Konstruera en funktion som beskriver bilens värdeminskning. Skriv också upp vilken ekvation Joakim ska lösa för att bestämma hur många år det kommer ta innan bilens värde har halverats (*du behöver inte lösa ekvationen*).
19. En bakteriekultur innehåller 1 000 bakterier. Efter 5 timmar innehåller bakteriekulturen 2 000 bakterier. Hur stor var den procentuella förändringen (förändringsfaktorn) för varje timme om vi antar att den var samma för varje timme? Ställ upp en ekvation och lös den.

20. Bestäm funktionsekvationen för följande exponentiella funktioner



Logaritmer	
Lösa ekvationer på typen $a^x = b$, $\log x = a$	
Förståelse för vad till exempel $\lg 100 = 2$ innebär	
Förståelse för logaritmreglerna	
Använda logaritmer för problemlösning	

21. Lös ekvationerna, svara exakt och med ett närmevärde med 2 decimaler om det inte är ett heltal

- | | | | |
|---------------------|------------------|-----------------|-----------------------|
| a) $10^x = 16$ | b) $10^x = 0,01$ | c) $3^x = 20$ | d) $2 \cdot 5^x = 18$ |
| e) $15^x + 10 = 15$ | f) $\lg x = 3$ | g) $\lg x = -1$ | h) $10^{\lg x} = 4$ |

22. Bestäm det exakta värdet för följande uttryck

- a) $\lg 1000$ b) $\lg 0,1$ c) $10^{\lg 7}$ d) $10^{\lg 0,2}$
- e) $\lg 4 + \lg 25$ f) $\frac{10^{\lg 5} \cdot 10^{\lg 2}}{2}$

23. Joakim sätter in 10 000 kr i en fond som förväntas växa med 4% varje år. Efter hur många år har pengarna fördubblats

24. Joakim har köpt en ny fin bil för 100 000 kr. Man räknar med att bilens värde kommer minska med 10% varje år. Efter hur många år har bilens minskat med totalt 70%?

Regressionsanalys Kunna konstruera lämpliga funktioner utifrån punkter med hjälp av geogebra	
---	--

25. Anpassa en linjär funktion till följande mätpunkter

y	9	11	14	16
x	0	1	2	3

26. Anpassa en exponentiell funktion till följande mätpunkter

y	3	6	14	60
x	0	1	2	4

27. Joakim har undersökt hur hans hund Bosse har växt de senaste 6 månaderna. Titta på statistiken nedan och anpassa lämplig funktion till Bosses tillväxt

<i>Vikt</i>	1,1	1,4	1,7	2,1	2,2	2,7
<i>Månad</i>	1	2	3	4	5	6

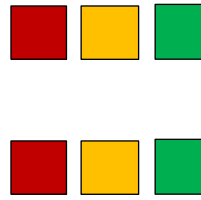
Grundläggande begrepp i statistiken Medelvärde, median och typvärde	
--	--

28. Bestäm medelvärde, median och typvärde för följande mätpunkter

- a) 2, 4, 6, 7, 10, 10, 11
- b) 1, 1, 1, 2, 6, 7, 10, 12

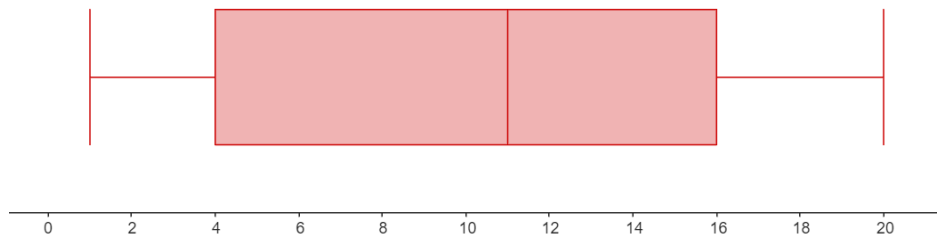
Lådagram

- Identifiera följande i ett lådagram:
minsta värdet, nedre kvartil, median,
övre kvartil, största värdet, P_{25} , P_{50}
 P_{75}
- Kunna bestämma kvartilavstånd och
variationsbredd

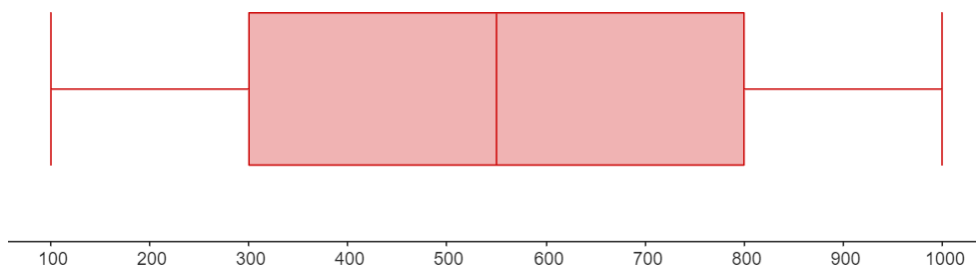


29. Observera lådagrammen nedan. Bestäm medianen, största och minsta värdet, kvartilavståndet och variationsbredd, P_{25} , P_{50} , P_{75}

a)

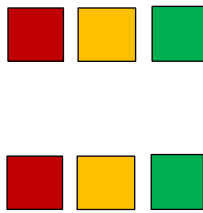


b)

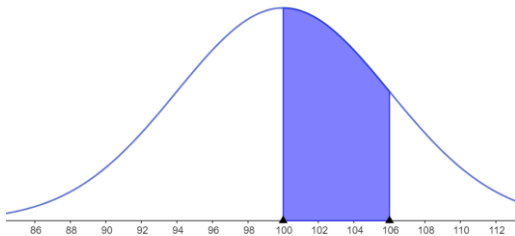


30. Konstruera ett lådagram utifrån följande statistik

n	10
Medel	6
σ	3.873
s	4.0825
Σx	60
Σx^2	510
Min	1
Q1	3
Median	5.5
Q3	8
Max	15

Normalfördelning • Förståelse kring hur medelvärde och standardavvikelse relaterar till standardavvikelsen • Kunna läsa av hur stor andel av mätdata som ligger inom vissa intervall i en normalfördelning både via text och med en normalfördelningskurva.	
--	--

31. I det normalfördelade materialet nedan är det blåmarkerade området 34,1%. Bestäm medelvärdet (μ) och standardavvikelsen (σ)

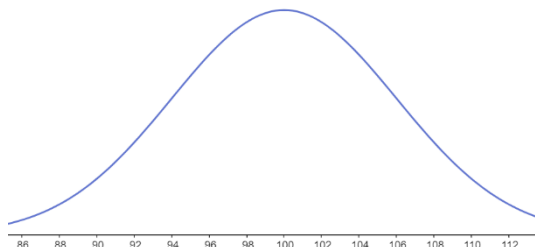


32. I ett normalfördelat material är μ 12 cm och σ 3 cm.

- Hur många procent av mätdata är större än 18 cm?
- Hur många procent av mätdata är mindre än 9 cm?

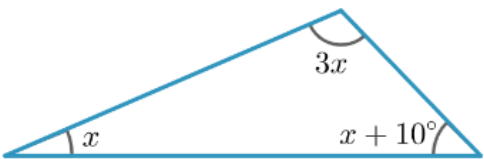
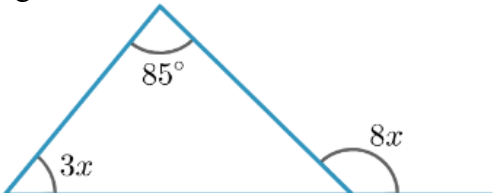
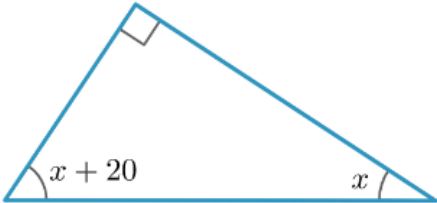
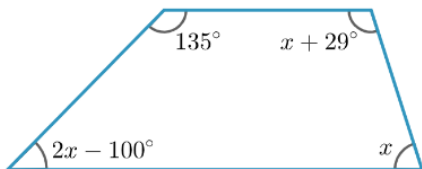
33. Nedan ser du en normalfördelningskurva. Vad händer med kurvans utseende om

- Medelvärdet (μ) ökar men standardavvikelsen (σ) är samma
- Medelvärdet (μ) är oförändrad men standardavvikelsen (σ) minskar
- Medelvärdet (μ) minskar men standardavvikelsen (σ) ökar



Grundläggande begrepp inom geometrin - Olika typer av trianglar och dess egenskaper - Vinkelsumman i en triangel och tillämpningar - Vinklar i olika geometriska figurer	 
---	--

34. Bestäm samtliga vinklar i trianglarna och fyrhörningen

- a) 
- b) 
- c) 
- d) 

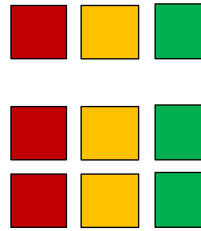
Implikation och ekvivalens - Förståelse kring skillnaderna mellan implikation och ekvivalens - Förmåga att sätta ut pilarna $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ logiskt och korrekt	 
---	--

35. Sätt $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ eller $\Leftrightarrow$ i rutorna

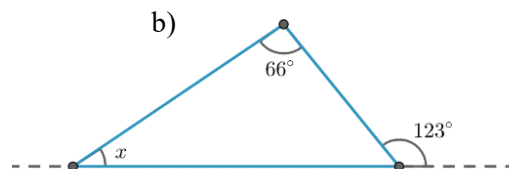
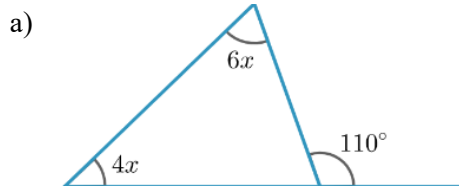
- a) Figur A är en sammansluten geometrisk figur med vinkelsumman 180° Figur A är en triangel
- b) Triangeln har en vinkel som är 40° Triangeln har två vinklar som är 80° och 60°
- c) $x = 2$ $x^4 = 16$
- d) $3x + 1 = 10$ $x = 3$

Några klassiska geometriska satser

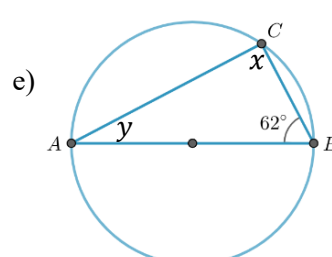
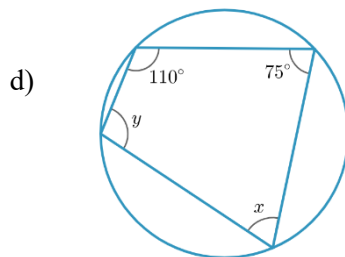
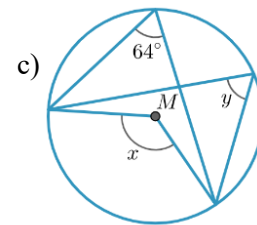
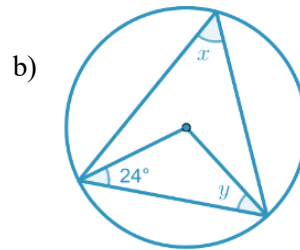
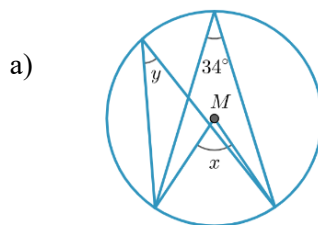
- Yttervinkelsatsen
- Rand- och medelpunktsvinklar
- Pythagoras sats



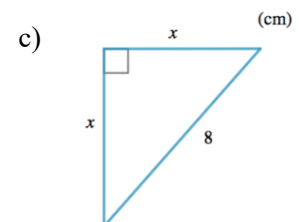
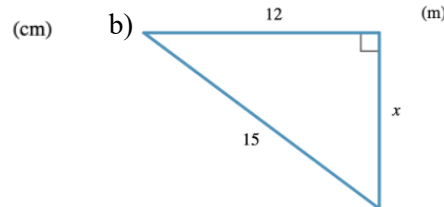
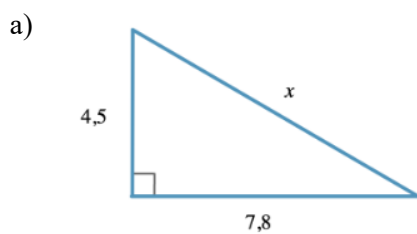
36. Bestäm x med hjälp av yttervinkelsatsen



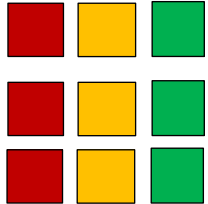
37. Bestäm x och y



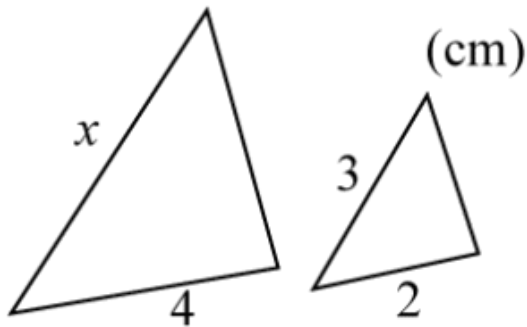
38. Bestäm sträckan x



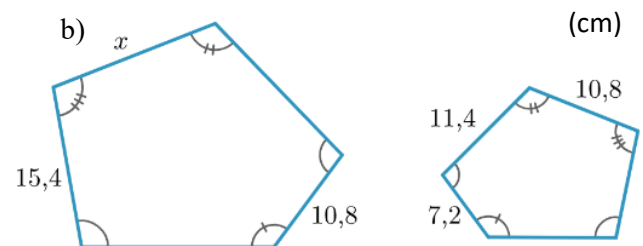
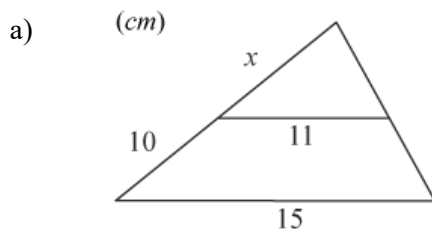
39. En rätvinklig triangel är den ena kateten en cm längre än den andra. Hypotenusan är 5 cm. Bestäm arean av triangeln.

Likformighet • Samband med likformigheter • Topptriangelsatsen och transversalsatsen • Enkla bevis med likformighet	
--	--

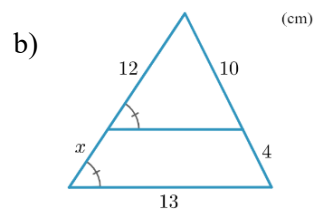
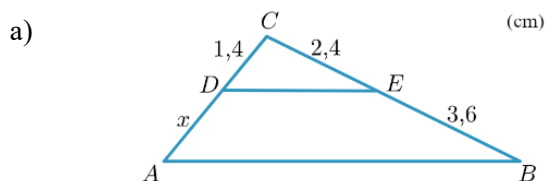
40. Trianglarna är likformiga. Bestäm sträckan x



41. Bestäm sträckan x



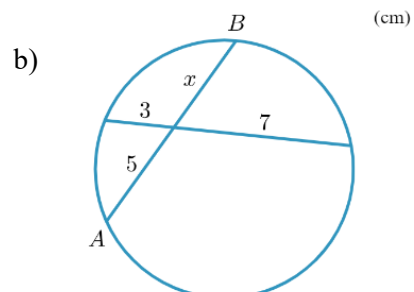
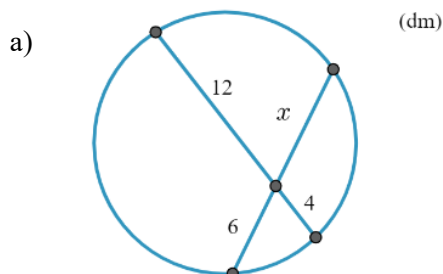
42. Bestäm sträckan x



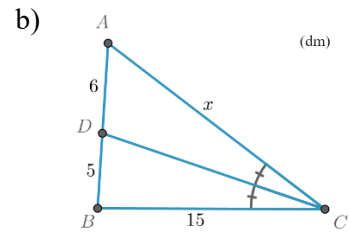
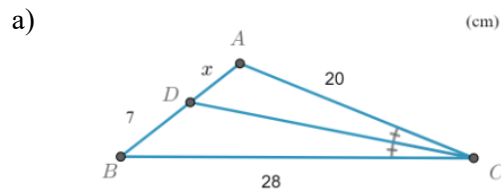
43. För en triangel ABC dras en parallelltransversal vilket skapar en topptriangel BDE. Du vet att sträckan AC 10 cm, sträckan DE 6 cm och sträckan AB är 12 cm. Bestäm sträckan DB.

Kordasatsen och bisektrissatsen • Kunna tillämpa satserna i geometriska problem	
--	--

44. Bestäm sträckan x

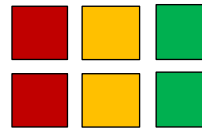


45. Bestäm sträckan x



Koordinatgeometri

- Avståndsformeln
- Mittpunktsformeln



46. Bestäm det kortaste avståndet mellan följande punkter

a) $(1, 3), (4, 7)$

b) $(-2, 1), (2, 5)$

c) $(10, 17), (20, 35)$

47. Bestäm mittpunkten för följande sträckor

a) Från $(1, 2)$ till $(7, 4)$

b) Från $(-3, -4)$ till $(3, 6)$

c) Från $(121, 132)$ till $(110, 127)$

Blandade problem från alla moment

48. Lös ekvationerna, svara exakt

a) $x^2 - 7x = 0$

b) $x^2 - 6x + 5 = 0$

c) $4^x = 15$

d) $\lg x = 2$

49. Vi definierar funktionen $f(x) = x^2 + 5x$. Bestäm följande

a) $f(0)$

b) $f(2)$

c) $f(-1) + f(1)$

50. Bestäm det exakta värdet för följande uttryck

a) $\lg 100 + \lg 10 + \lg 1$

b) $10^{\lg 5}$

51. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 2y - x = 5 \end{cases}$$

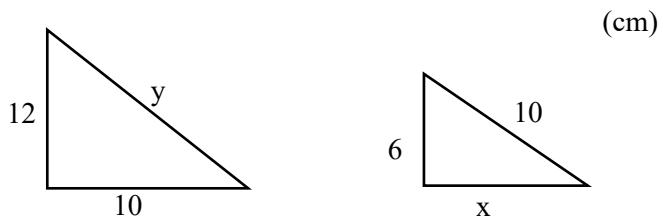
52. Formulera ett ekvationssystem med tydliga definitioner utifrån följande information. *Du behöver inte lösa ekvationssystemet.*

Joakim och Astrid går in i en godisbutik. Joakim köper 12 chokladbitar och 20 sura dödsskallar och betalar 40 kr. Astrid köper 10 sura dödsskallar och 22 chokladbitar och betalar 56 kr.

53. En andragradsfunktion har en maximipunkt i $(2, 8)$. Kan funktionen ha nollställena $x_1 = 0$ och $x_2 = 5$? Motivera!

54. Vi definierar funktionen $f(x) = x^2 + x + c$ där c är en konstant vi inte känner till. Vi vet däremot att funktionen går igenom punkten $(2, 3)$. Bestäm konstanten c genom att använda punkten funktionen går igenom.

55. Trianglarna nedan är likformiga, du kan inte anta att trianglarna är rätvinkliga. Bestäm sträckan x och y



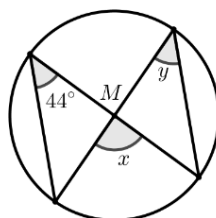
56. Ett normalfördelat material vet du att medelvärdet är 10 cm och standardavvikelsen 2 cm. Joakim påstår att ungefär 68% av mätdata ligger inom intervallet 8 cm till 12 cm. Har Joakim rätt? Motivera!

57. En triangel har vinklarna v , v och $2v$ undersök om triangeln är rätvinklig.

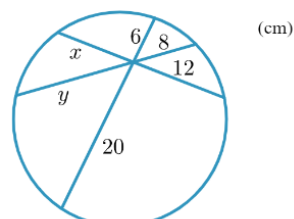
58. En bakteriekultur växer med 5% varje dag. Från början fanns det 1000 bakterier i bakteriekulturen. Forskare menar att om antalet bakterier skulle överstiga 10 000 skulle det bli ett problem. Hur lång tid skulle det ta?

59. Bestäm x och y

a)



b)



Repetition för godkört i mo2b-lösningsskrivning

Ekvationssystem

$$1. a) \begin{cases} y = 3x + 1 & \text{I} \\ y = 5x - 3 & \text{II} \end{cases}$$

Sätt I in i II med
variabler

$$3x + 1 = 5x - 3$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

$$y = 3 \cdot 2 + 1 = 7$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 7 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2y + x = 12 & \text{I} \\ 3y - x = 13 & \text{II} \end{cases}$$

$$\text{I} \quad 2y + x = 12$$

$$x = 12 - 2y$$

$$\text{II} \quad 3y - x = 13$$

$$3y - (12 - 2y) = 13$$

$$3y - 12 + 2y = 13$$

$$5y = 25$$

$$y = 5$$

$$x = 12 - 2y = 12 - 10 = 2 \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y = 10 & \text{I} \\ x - y = 2 & \text{II} \end{cases}$$

$$\text{II} \quad x - y = 2$$

$$x = 2 + y$$

$$\text{I} \quad x + y = 10$$

$$2 + y + y = 10$$

$$x = 2 + y$$

$$2 + 2y = 10$$

$$x = 2 + 4$$

$$2y = 8$$

$$x = 6$$

$$y = 4$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 4x - 2y = 14 & \text{I} \\ 2y + 2x = 22 & \text{II} \end{cases}$$

Delar II med 2 $y + x = 11$

$$x = 11 - y$$

$$\text{I} \quad 4x - 2y = 14$$

$$4(11 - y) - 2y = 14$$

$$44 - 4y - 2y = 14$$

$$-6y = -30$$

$$y = 5$$

$$x = 11 - y$$

$$x = 6$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 5 \end{cases}$$

2. a) Titla på skärningarna mellan linjerna

$$\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} y=-x \\ y=2x-6 \end{cases}, \quad \begin{cases} y=-x-4 \\ y=x+2 \end{cases}$$

3. a) x = ena talet y = andra talet

$$\begin{cases} x+y=20 & \text{I} \\ x-y=10 & \text{II} \end{cases}$$

$$\text{II} \quad \begin{cases} x-y=10 \\ x=10+y \end{cases}$$

$$\text{I} \quad \begin{cases} x+y=20 \\ 10+y+y=20 \\ 2y=10 \\ y=5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= 10+y \\ x &= 15 \end{aligned}$$

Svari: talet är 15 och 5

b) x = kostnad buller y = kostnad smörgås

$$\begin{cases} 2x+y=35 & \text{I} \\ x+4y=70 & \text{II} \end{cases}$$

$$\text{II} \quad \begin{cases} x+4y=70 \\ x=70-4y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{I} \quad 2x+y &= 35 \\ 2(70-4y)+y &= 35 \\ 140-8y+y &= 35 \\ 7y &= 105 \\ y &= 15 \end{aligned}$$

$$x = 70 - 4 \cdot 15 = 10$$

Svar: smörgås: 15 kr
Buller: 10 kr

kvadrerings- och konjugatregler

$$4. a) (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9 \quad b) (x-7)^2 = x^2 - 14x + 49$$

$$c) (2x+1)^2 = (2x)^2 + 4x + 1 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$d) (x-2)(x+2) = x^2 - 4 \quad e) \left(2x + \frac{1}{2}\right)\left(2x - \frac{1}{2}\right) = 4x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 4x^2 - \frac{1}{4} \quad f) 4x - (x+2)^2 = 4x - (x^2 + 4x + 4) =$$

$$= 4x - x^2 - 4x - 4 = -x^2 - 4$$

$$g) (x-3)^2 + 6x = x^2 - 6x + 9 + 6x = x^2 + 9$$

$$h) -(2y+3x)^2 = -(4y^2 + 12xy + 9x^2) = -4y^2 - 12xy - 9x^2$$

$$5. a) x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 \quad b) x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

$$c) x^2 - 16 = (x-4)(x+4) \quad d) \frac{x^2 + 2x + 1}{x+1} = \frac{(x+1)^2}{x+1} = x+1$$

$$e) \frac{x^2 - 4}{x+2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = x-2$$

Andragradsekvationer

$$\begin{aligned} 6. a) \quad x^2 - 81 &= 0 \\ x^2 &= 81 \\ x &= \pm 9 \end{aligned}$$

(viktigt!)

$$\begin{aligned} b) \quad x^2 - 15 &= 1 \\ x^2 &= 16 \\ x &= \pm 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad x^2 + 2x &= 2x + 9 \\ x^2 &= 9 \\ x &= \pm 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. a) \quad x^2 - 4x &= 0 \\ x(x - 4) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad x^2 + 15x &= 0 \\ x(x + 15) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= -15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad 3x^2 - 12x &= 0 \\ x^2 - 4x &= 0 \\ x(x - 4) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \quad 10x^2 &= 100x \\ x^2 &= 10x \\ x^2 - 10x &= 0 \\ x(x - 10) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e) \quad 3x^2 + x &= 0 \\ x^2 + \frac{x}{3} &= 0 \\ x\left(x + \frac{1}{3}\right) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8. a) \quad x^2 - 4x - 5 &= 0 \\ x &= \frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + 5} \\ &= 2 \pm \sqrt{4 + 5} \\ &= 2 \pm \sqrt{9} \\ &= 2 \pm 3 \\ x_1 &= 5, x_2 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad x^2 + 10x + 9 &= 0 \\ x &= -\frac{10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 9} \\ &= -5 \pm \sqrt{25 - 9} \\ &= -5 \pm \sqrt{16} \\ &= -5 \pm 4 \\ x_1 &= -1, x_2 = -9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad 2x^2 + 4x - 16 &= 0 \\ x^2 + 2x - 8 &= 0 \\ x &= -1 \pm \sqrt{1 + 8} \\ &= -1 \pm \sqrt{9} \\ &= -1 \pm 3 \\ x_1 &= 2, x_2 = -4 \end{aligned}$$

8.

$$d) x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x = \frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 4}$$

$$= 2 \pm \sqrt{4 - 4}$$

$$= 2 \pm 0$$

$$x = 2 \text{ (Bara!)}$$

$$e) 3x^2 = 18x - 15$$

$$3x^2 - 18x + 15 = 0$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$x = 3 \pm \sqrt{3^2 - 5}$$

$$= 3 \pm \sqrt{4}$$

$$= 3 \pm 2$$

$$x_1 = 5 \quad x_2 = 1$$

$$f) 2x^2 + 4x + 1 = x^2 + 2x$$

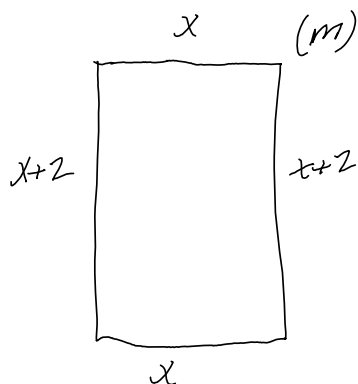
$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x = -1 \pm \sqrt{1 - 1}$$

$$x = -1 \pm 0$$

$$x = -1$$

9.



Svari 8 och 10 meter

$$\text{Area: } x(x+2) = 80$$

$$x^2 + 2x = 80$$

$$x^2 + 2x - 80 = 0$$

$$x = -1 \pm \sqrt{1 + 80}$$

$$= -1 \pm \sqrt{81}$$

$$= -1 \pm 9$$

$$x_1 = 8 \quad (x_2 = -10) \quad \checkmark \text{ finns ingen negativ storlek}$$

10. Jockums ålder: x

Jockums bror: $x - 7$

$$\text{Produkt: } x(x-7) = 540$$

$$x^2 - 7x = 540$$

$$x^2 - 7x - 540 = 0$$

Svari 27 år

$$x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + 540}$$

$$= \frac{7}{2} \pm 23,5$$

$$x_1 = 27 \quad (x_2 = -20)$$

negativ ålder
intressant

11. Andragradsfunktioner
a) Nollställena: $x_1=1$ $x_2=3$, Symmetrilinje: $x=2$
minimipunkt i $(2, -1)$ $f(2) = -1$

b) Nollställena: $x_1=-2$, $x_2=2$, Symmetrilinjen: $x=0$
maximipunkt i $(0, 4)$, $f(2)=0$

12. a) $f(1)=4$ b) $c=3$ (shörning i y)

c) $f(x)=0$ för vilken x är funktionsvärdet (y-värdet)

noll? Jo då $x_1=-1$, $x_2=3$

d) $f(x)=3$ $x_1=0$, $x_2=2$

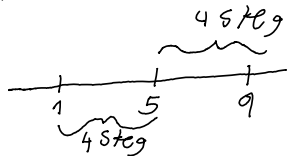
e) $f(x)=4$ $x=1$ f) Ledsen men $0 < 0$ svar: a
är mindre än noll!

g) $f(5) < f(2)$ $f(2)=3$

$f(5)$ är mindre eftersom funktionen
minskar! Jodå! har rätt!

13. Symmetrilinjen ligger mitt emellan nollställena
Symmetrilinjen $x=6$

14. Det är lika långt mellan nollställena och
symmetrilinjen
Svar: $x=9$



$$15. f(x) = x^2 + 6x + 5$$

$$a) f(1) = 1^2 + 6 \cdot 1 + 5 = 12 \quad b) f(-2) = (-2)^2 + 6 \cdot (-2) + 5 = 4 - 12 + 5 = -3$$

$$c) f(x) = 5 \quad x^2 + 6x + 5 = 5$$

$$x^2 + 6x = 0$$

$$x(x+6) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = -6$$

$$d) \text{ Nullstellen des } f(x) = 0$$

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$x = -3 \pm \sqrt{3^2 - 5}$$

$$= -3 \pm \sqrt{4}$$

$$= -3 \pm 2 \quad x_1 = -1, x_2 = -5$$

$$e) \text{ Symmetrielinien: } x = -3$$

f) extremwertsatz in
Symmetrielinien i funktionen

$$f(-3) = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) + 5 = 9 - 18 + 5 = -4$$

Svar i nullstellen: $x_1 = -1, x_2 = -5$

Exponentiella funktioner

$$16. a) x^7 = 10$$

$$(x^7)^{\frac{1}{7}} = 10^{\frac{1}{7}}$$

$$x = 10^{\frac{1}{7}}$$

$$b) 2x^4 = 22$$

$$x^4 = 11$$

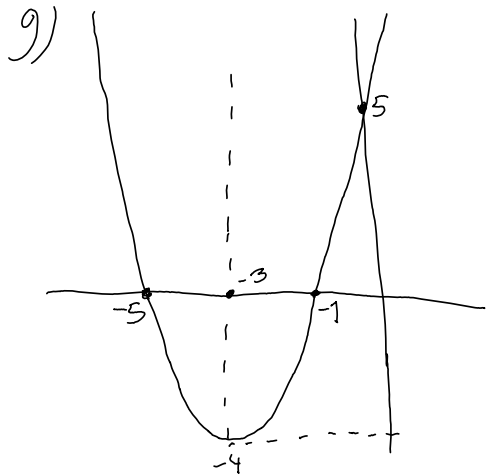
$$(x^4)^{\frac{1}{4}} = 11^{\frac{1}{4}}$$

$$x = 11^{\frac{1}{4}}$$

$$c) x^{\frac{1}{3}} = 2$$

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^3$$

$$x = 8$$



17. a) $f(x) = 4 \cdot 1,2^x$ $f(3) = 4 \cdot 1,2^3 = 6,912$

b) $f(-1) = 4 \cdot 1,2^{-1} = 3,333$

c) Svari: 4 (den står g i 4)

d) Svari: 20 %

18. a) $f(x) = 10 \cdot 0,93^x$ b) $f(x) = 10000 \cdot 1,1^x$

c) $f(x) = 200000 \cdot 0,95^x$ elvationen: $100000 = 200000 \cdot 0,95^x$

19. $f(x) = 1000 \cdot a^x$ $f(5) = 2000$

$$2000 = 1000 \cdot a^5$$

$$2 = a^5$$

20. a) $f(x) = C \cdot a^x$

$a = 2^{\frac{1}{5}} = 1,1486$ Svari: $a = 1,1486$

$C = 2$ s tt in en punkt
vi vet till exempel: $f(1) = 4$

b) $f(x) = C \cdot a^x$ $C = 8$

punkt vi vet $f(1) = 4$

$$4 = 2 \cdot a^1$$

$$4 = 8 \cdot a^1$$

$$a = 2 \quad f(x) = 2 \cdot 2^x$$

$$\frac{1}{2} = a \quad \text{svari } f(x) = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Logaritmer

21. a) $10^x = 16$

$$x = \lg 16 \approx 1,20$$

b) $10^x = 0,01$

$$x = \lg 0,01 = -2$$

c) $3^x = 20$

$$\lg 3^x = \lg 20$$

$$x \cdot \lg 3 = \lg 20$$

$$x = \frac{\lg 20}{\lg 3} \approx 2,73$$

$$21. d) 2 \cdot 5^x = 18$$

$$5^x = 9$$

$$\lg 5^x = \lg 9$$

$$x \cdot \lg 5 = \lg 9$$

$$x = \frac{\lg 9}{\lg 5} \approx 1,37$$

$$e) 15^x + 10 = 15$$

$$15^x = 5$$

$$\lg 15^x = \lg 5$$

$$x \cdot \lg 15 = \lg 5$$

$$x = \frac{\lg 5}{\lg 15} \approx 0,59$$

$$f) \lg x = 3$$

$$x = 10^3 = 1000$$

$$g) \lg x = -1 \quad h) 10^{19x} = 4$$

$$x = 10^{-1}$$

$$x = 4$$

$$x = \frac{1}{10}$$

22. a) $\lg 1000$ (vad ska jag kalla upp i för att få 1000? Jo, 3)

$$\lg 1000 = 3$$

$$b) \lg 0,1 = -1$$

$$c) 10^{197} = 7$$

$$d) 10^{192} = 2,2 \quad e) \lg 4 + \lg 25 =$$

$$= \lg 4 \cdot 25 = \lg 100 = 2$$

$$f) \frac{10^{195} \cdot 10^{192}}{2} = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5$$

$$23. 10000 \cdot 1,04^x = 20000$$

$$1,04^x = 2$$

$$\lg 1,04^x = \lg 2$$

$$x \cdot \lg 1,04 = \lg 2$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg 1,04} \approx 17,67 \quad \text{Svaret är alltså 17 år}$$

$$24. 100000 \cdot 0,9^x = 0,3 \cdot 100000$$

$$0,9^x = 0,3$$

$$\lg 0,9^x = \lg 0,3$$

$$x \cdot \lg 0,9 = \lg 0,3$$

$$x = \frac{\lg 0,3}{\lg 0,9} \approx 11,42 \text{ svar: Ungefär 11 år}$$

25. Använd regressionsanalysföreläsningen på geologiska

$$y = 2,4x + 9,6$$

$$26. y = 2,96 \cdot 2,13^x$$

27. linjär funktion: $y = 0,33x + 2,75$ funkar bra

$$28. \text{medelvärden: } \frac{2+4+6+7+10+10+11}{7} = 7,14$$

$$\text{median: } 7 \quad \text{b) medelvärde: } \frac{1+1+1+2+6+7+10+12}{8} = 5$$

Toppvärde: 10

$$\text{median: } \frac{2+6}{2} = 4$$

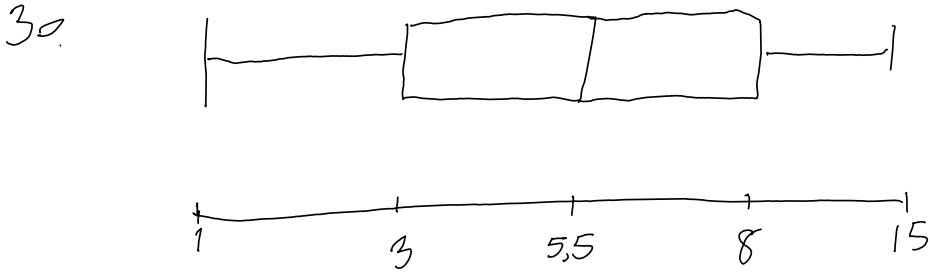
Toppvärde: 1

Löslösningar

29. a) median: 11 största 20 minsta: 11 kvartilavstånd: $16 - 4 = 12$

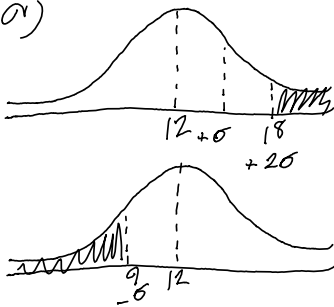
variationsbredd: $20 - 1 = 19$ $P_{25} = 4, P_{50} = 11, P_{75} = 16$

29 b) median: 550 största: 1000 minsta: 100
 kvartilavstånd: $800 - 300 = 500$ variationsbredd: $1000 - 100 = 900$
 $P_{25} = 300, P_{50} = 550, P_{75} = 800$



Standardavvikelse
 31. $\mu = 100, \sigma = 6$ (kolla formelboken)

32. a)



$\mu + 2\sigma$ utgör 2,3%

$\mu - \sigma$ utgör $13,6 + 2,3 = 15,9\%$

33. a) kurvor förskjuts åt höger men har samma form
 b) kurvor stannar men trycks ihop (blir smal)
 c) kurvor förskjuts åt vänster och breddar ut sig (blir mer bred)

Geometri begrepp och sortser

34. a) Addera vinklarna $x + 3x + x + 10^\circ = 180^\circ$

$$5x = 170^\circ$$

b) yttre vinkel/sortsen:

$$x = 34^\circ$$

$$8x = 85^\circ + 3x$$

$$5x = 85^\circ$$

$$x = 17^\circ$$

c) $90^\circ + x + x + 20^\circ = 180^\circ$

$$2x = 70^\circ$$

$$x = 35^\circ$$

d) $2x - 100^\circ + 135^\circ + x + 29^\circ + x = 360^\circ$

$$4x + 64^\circ = 360^\circ$$

$$4x = 296^\circ$$

$$x = 74$$

35. a) $\Leftrightarrow$ b) $\Leftarrow$ c) $\Rightarrow$ d) $\Leftrightarrow$

36. a) $4x + 6x = 110^\circ$ b) $x + 66^\circ = 123^\circ$

$$10x = 110^\circ$$

$$x = 57^\circ$$

$$x = 11^\circ$$

37. a) $x = 2 \cdot 34$

$$x = 34$$

b) $y = 24^\circ$

för att

triangeln

är likbent

(radio)

c) $y = 64^\circ$ $x = 128^\circ$

$$x = 66$$

$$d) \quad x + 110^\circ = 180^\circ \quad y + 75^\circ = 180^\circ$$

$$x = 70^\circ \quad y = 105^\circ$$

$$e) \quad x = 90^\circ \text{ (medelpunktsvinkeln för } 180^\circ)$$

$$y + 90^\circ + 62^\circ = 180^\circ$$

$$y = 28^\circ$$

$$38. \quad 4,5^2 + 2,8^2 = x^2$$

$$20,5 + 60,84 = x^2$$

$$x^2 = 81,34$$

$$x \approx 9,01$$

Svar: 9,01 cm

$$x^2 + x^2 = 8^2$$

$$2x^2 = 64$$

$$x^2 = 32$$

$$x \approx 5,65$$

Svar: ungefär 5,65 cm

$$\text{Arean: } \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

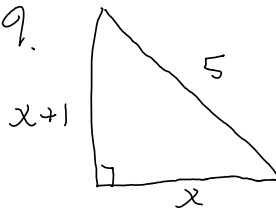
$$b) \quad x^2 + 12^2 = 15^2$$

$$x^2 + 144 = 225$$

$$x^2 = 81$$

$x = 9$ Svar: 9 meter

39.



$$x^2 + (x+1)^2 = 5^2$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 25$$

$$2x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12}$$

$$= -\frac{1}{2} \pm 3,5 \quad x = 3$$

Lierformighet

$$40. \frac{x}{3} = \frac{4}{2}$$

$$\frac{x}{3} = 2$$

$$x = 2 \cdot 3$$

$$x = 6$$

Svar: $x = 6 \text{ cm}$

$$41. a) \frac{x}{x+10} = \frac{11}{15} \text{ korsmulti}$$

$$15x = 11x + 110$$

$$4x = 110$$

$$x = 27,5 \text{ cm}$$

$$b) \frac{x}{10,8} = \frac{10,8}{7,2} \text{ korsmulti}$$

$$7,2x = 116,64$$

$$x = 16,2 \text{ svar: } x = 16,2 \text{ cm}$$

42. aftronsversalsatzen
(holla formelbrevet)

$$\frac{x}{1,4} = \frac{3,6}{2,4} \text{ korsmulti}$$

$$2,4x = 5,04$$

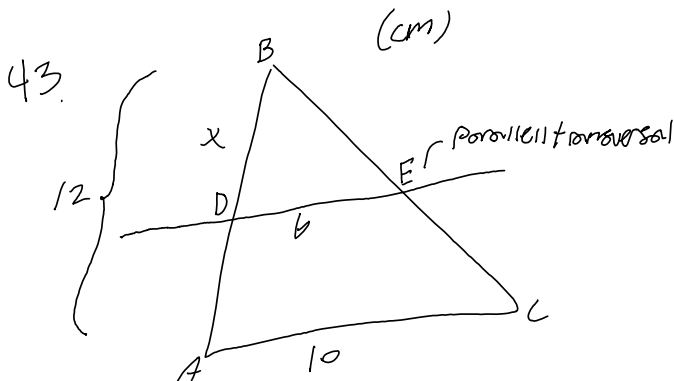
$$x = 2,1$$

Svar: $x = 2,1 \text{ cm}$

$$b) \frac{x}{12} = \frac{4}{10}$$

$$10x = 48$$

$$x = 4,8 \text{ svar: } x = 4,8 \text{ cm}$$



$$\frac{12}{10} = \frac{x}{6}$$

$$10x = 12 \cdot 6$$

$$10x = 72$$

$$x = 7,2$$

Svar: $7,2 \text{ cm}$

44.

a)

$$6 \cdot x = 12 \cdot 4$$

$$x = \frac{12 \cdot 4}{6} = 8$$

$$\text{Svar: } x = 8 \text{ dm}$$

$$b) 5 \cdot x = 7 \cdot 3$$

$$x = \frac{7 \cdot 3}{5} = \frac{21}{5}$$

$$\text{Svar: } x = \frac{21}{5} \text{ cm}$$

$$45. a) \frac{x}{7} = \frac{20}{28}$$

$$28x = 140$$

$$x = 5$$

$$\text{Svar: } x = 5 \text{ cm}$$

$$b) \frac{6}{5} = \frac{x}{15}$$

$$90 = 5x$$

$$x = 18 \text{ Svar: } x = 18 \text{ dm}$$

$$46. d = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

$$a) \sqrt{(7-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ l.e.}$$

$$b) \sqrt{(5-1)^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} \text{ l.e.}$$

Stanna där!

$$c) \sqrt{(35-17)^2 + (20-10)^2} = \sqrt{18^2 + 10^2} = \sqrt{424} \text{ l.e.}$$

$$47. a) x_m = \frac{7+1}{2} = 4 \quad y_m = \frac{4+2}{2} = 3 \quad \text{Svar: } (4, 3)$$

$$47 \text{ b) } x_m = \frac{-3+3}{2} = 0 \quad y_m = \frac{-4+6}{2} = 1 \quad \text{Svari}(0,1)$$

$$c) x_m = \frac{121+110}{2} = 115,5 \quad y_m = \frac{132+127}{2} = 129,5 \quad \text{Svari}(115,5,129,5)$$

$$48. \text{ a) } x^2 - 7x = 0$$

$$x(x-7) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 7$$

$$b) x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$x = 3 \pm \sqrt{3^2 - 5}$$

$$= 3 \pm \sqrt{4}$$

$$= 3 \pm 2 \quad x_1 = 5 \quad x_2 = 1$$

$$c) 4^x = 15$$

$$\lg 4^x = \lg 15$$

$$x \cdot \lg 4 = \lg 15$$

$$x = \frac{\lg 15}{\lg 4}$$

$$d) \lg x = 2$$

$$x = 100$$

$$49. f(x) = x^2 + 5x$$

$$a) f(0) = 0^2 + 5 \cdot 0 = 0$$

$$b) f(2) = 2^2 + 5 \cdot 2 = 14$$

$$c) f(-1) + f(1) = (-1)^2 + 5 \cdot (-1) + 1^2 + 5 \cdot 1 = 1 - 5 + 1 + 5 = 2$$

$$50. \text{ a) } \lg 100 + \lg 10 + \lg 1$$

$$b) 10^{\lg 5} = 5$$

$$= 2 + 1 + 0 = 3$$

$$51. \begin{cases} 2x+y=10 & \textcircled{I} \\ 2y-x=5 & \textcircled{II} \end{cases}$$

$$\textcircled{I} \quad 2x+y=10$$

$$y=10-2x$$

$$\textcircled{II} \quad 2y-x=5$$

$$2(10-2x)-x=5$$

$$20-4x-x=5$$

$$-5x=-15$$

$$x=3$$

$$\begin{cases} 12x+20y=40 \\ 10y+22x=56 \end{cases}$$

$$y=10-2x$$

$$y=10-6=4 \quad \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$$

53. Nej! Det kommer inte funka, det måste vara lika långt mellan nollställena och symmetrilinjen. För ena nollstället är det två steg och andra tre steg.

54. $f(x)=x^2+x+c$ går igenom punkten $(2,3)$

$$3=2^2+2+c \quad \text{Så var } c=-3$$

$$3=6+c$$

$$c=-3$$

$$55. \quad \frac{x}{10} = \frac{6}{12}$$

$$\frac{y}{10} = \frac{12}{6}$$

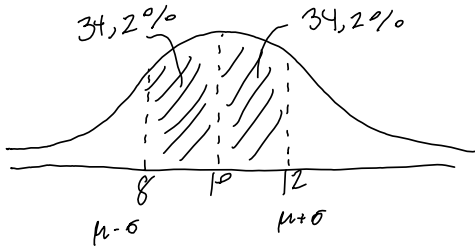
$$60=12x$$

$$\frac{y}{10}=2$$

$$x=5 \text{ cm}$$

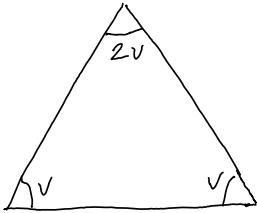
$$y=20 \text{ cm}$$

56.



Det markerade området utgör 68,4 % av måtdatarnas
Johann har rätt!

57.



$$2V + V + V = 180^\circ$$

$$4V = 180^\circ$$

$$V = 45^\circ$$

$2V = 90^\circ$ Svar: Ja, triangeln är
rätvinklig

58. $f(x) = C \cdot a^x$ ökning med 5%

$$f(x) = 1000 \cdot 1,05^x$$

startvärde

$$f(x) = 10000 = 1000 \cdot 1,05^x$$

$$10 = 1,05^x$$

$$\lg 10 = \lg 1,05^x$$

$$\lg 10 = x \cdot \lg 1,05$$

$$x = \frac{\lg 10}{\lg 1,05} = \frac{1}{\lg 1,05} \approx 47,194$$

Svar: Ungefär 47 dagar

59. a) $y = 44^\circ$

$$x = 2 \cdot 44^\circ = 88^\circ$$

b) $12 \cdot x = 6 \cdot 20$

$$x = \frac{6 \cdot 20}{12} = 10 \quad \underline{x = 10 \text{ cm}}$$

$$8 \cdot y = 6 \cdot 20$$

$$y = \frac{6 \cdot 20}{8} = 15 \quad \underline{y = 15 \text{ cm}}$$