

Matematik 5

Elevhäfte

Delprov B	Uppgift 1-11. Endast svar krävs.
Delprov C	Uppgift 12-19. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter för Delprov B och Delprov C tillsammans.
Hjälpmedel	Formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D).
Tillsammans kan de ge 60 poäng varav 22 E-, 20 C- och 18 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget

E: 15 poäng

D: 23 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå

C: 31 poäng varav 12 poäng på minst C-nivå

B: 40 poäng varav 6 poäng på A-nivå

A: 48 poäng varav 10 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: _____

Födelsedatum: _____

Gymnasieprogram/Komvux: _____

Delprov B: Digitala verktyg är inte tillåtna. *Endast svar krävs.* Skriv dina svar direkt i provhäftet.

1. På en restaurang kan du välja mellan 4 förrätter, 6 huvudrätter och 3 efterrätter. På hur många sätt kan du sätta ihop en middag om den ska bestå av en förrätt, en huvudrätt och en efterrätt?

_____ (1/0/0)

2. Beräkna $\frac{10!}{8!}$

_____ (1/0/0)

3. Beräkna $\sum_{k=1}^3 (2k+1)$

_____ (1/0/0)

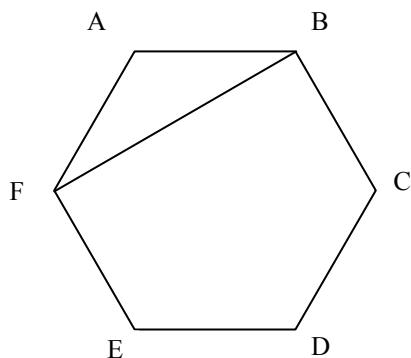
4. Bestäm den största gemensamma delaren till 140 och 42

_____ (1/0/0)

5. Ett visst år infaller den svenska nationaldagen på en fredag. Vilken veckodag är det 150 dagar efter nationaldagen?

_____ (1/0/0)

6. Bestäm en Hamiltoncykel i grafen nedan.



_____ (1/0/0)

7. Tre mängder är givna

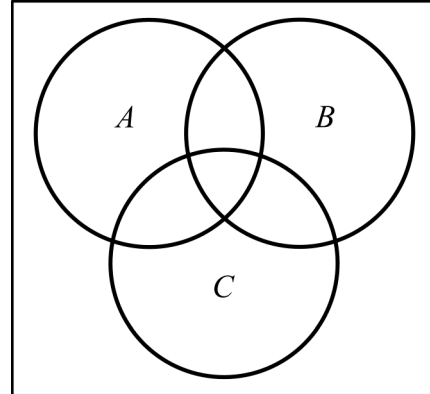
A : Personer som använder Facebook

B : Personer som använder Instagram

C : Personer som använder Twitter.

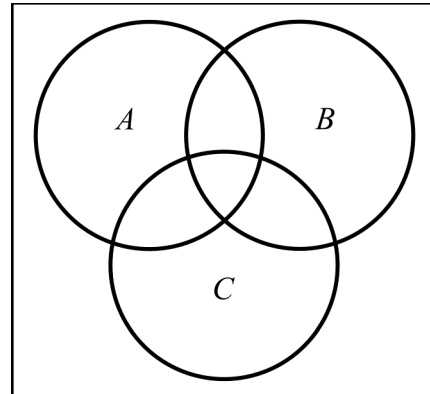
- a) Markera i Venndiagrammet det område som motsvaras av $(A \cup B) \cap C$

(1/0/0)



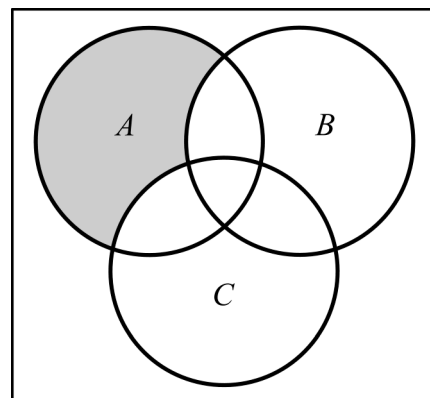
- b) Markera i Venndiagrammet det område som representerar de personer som använder Facebook och Instagram men inte Twitter.

(1/0/0)



- c) Använd mängdsymboler för att beskriva det markerade området i figuren.

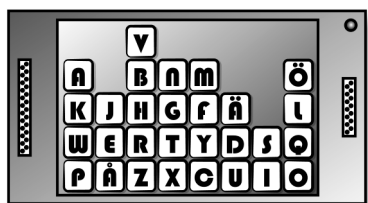
_____ (0/1/0)



8. Bestäm det minsta positiva talet x för vilket $30 \equiv x \pmod{7}$

_____ (1/0/0)

9. I ett företag som tillverkar appar är man oroad över att dagsförsäljningen av en av deras populäraste appar varit konstant i några månader. Därför genomför man en annonskampanj som resulterar i att dagsförsäljningen ökar. Efter annonskampanjen är ändringstakten i dagsförsäljningen, enligt en förenklad modell, proportionell mot roten ur dagsförsäljningen vid varje tidpunkt.



Ange en differentialekvation som beskriver ändringstakten i dagsförsäljningen

- a) före annonskampanjen. _____ (0/1/0)
- b) efter annonskampanjen. _____ (0/1/0)

10. Ge en rekursiv beskrivning av den aritmetiska talföljden 2, 20, 38, 56, ...

_____ (1/1/0)

11. Låt grundmängden vara mängden av positiva heltal större än 1.
 Delmängderna A och B definieras på följande sätt:
 $A = \{x \mid \text{SGD}(x, 12) = 1\}$ (SGD betyder största gemensamma delare)
 $B = \{x \mid x \text{ är ett primtal}\}$

Bestäm det minsta talet i mängden $A \setminus B$

_____ (0/0/1)

Delprov C: Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

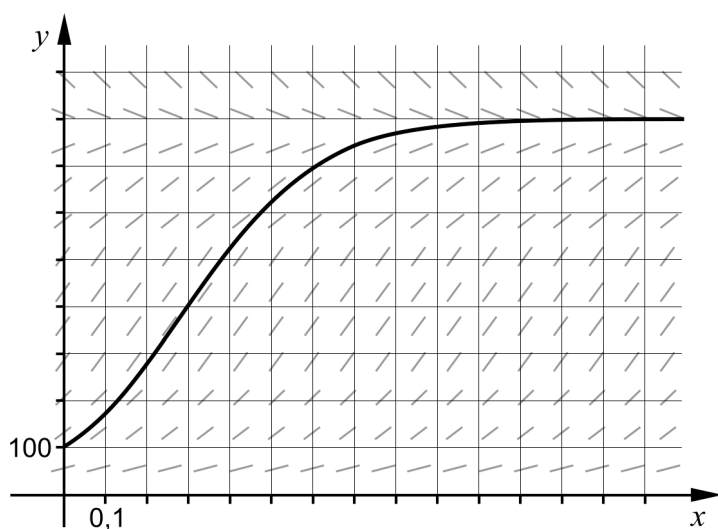
12. På en arbetsplats läser alla anställda Sydsvenskan eller Svenska Dagbladet. Några läser båda tidningarna. Antalet som läser Sydsvenskan är 31, antalet som läser Svenska Dagbladet är 13 och antalet som läser båda tidningarna är 5. Hur många anställda finns det på arbetsplatsen? (2/0/0)

13. En talföljd definieras rekursivt på följande sätt:
$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_{k+1} = a_k + \frac{1}{2^{k+1}} \end{cases} \quad \text{där } k \geq 1$$
- a) Bestäm a_3 (2/0/0)

- b) Ange en sluten (explicit) formel för a_k i talföljden.

Endast svar krävs (0/1/0)

14. En population kaniner har observerats under en längre tid. Populationens utveckling beskrivs av differentialekvationen $y' = 0,008y(800 - y)$, där y är antal kaniner x år efter observationens början. Nedan ser du riktningsfältet till differentialekvationen och en lösningskurva.



- a) Ange ett begynnelsevillkor som ger den inritade lösningskurvan. *Endast svar krävs* (1/0/0)
- b) Använd differentialekvationen, $y' = 0,008y(800 - y)$, för att bestämma hur stor populationen är då tillväxthastigheten är som störst. (0/2/0)
- c) I diagrammet syns det att populationens storlek stabiliseras med tiden. Förklara detta med hjälp av differentialekvationen. (0/0/1)
- d) Skissa, i figuren ovan, lösningskurvan om det istället fanns 300 kaniner från början. (1/0/0)

15. Bestäm koefficienten för x^3 -termen i utvecklingen av $(2x + 3)^5$ (0/2/0)
16. Bestäm resten då $123^{45} + 67^{89}$ divideras med 11 (0/1/1)
17. Förenkla uttrycket $\frac{(n+1)! + n!}{(n+2) \cdot (n-1)!}$ så långt som möjligt. (0/0/2)
18. Talet $50!$ beräknas. Undersök hur många nollor det finns i slutet av detta tal. (0/1/2)
19. Finns det heltal $n > 1$ så att $6^{2n} - 25$ är ett primtal? Motivera. (0/0/2)

Matematik 5

Elevhäfte

Delprov D	Uppgift 20-28. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter.
Hjälpmedel	Digitala verktyg, formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D).
Tillsammans kan de ge 60 poäng varav 22 E-, 20 C- och 18 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget

E: 15 poäng

D: 23 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå

C: 31 poäng varav 12 poäng på minst C-nivå

B: 40 poäng varav 6 poäng på A-nivå

A: 48 poäng varav 10 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: _____

Födelsedatum: _____

Gymnasieprogram/Komvux: _____

Delprov D: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

20. Beräkna $\binom{21}{12}$ *Endast svar krävs* (1/0/0)

21. I en aritmetisk talföljd med elementen a_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ är $a_4 = 260$ och $a_{10} = 740$
Bestäm a_1 (2/0/0)



22. En skidtränare har 7 skidåkare att välja bland till ett stafettlag. Stafettlaget ska bestå av 4 skidåkare där var och en ska åka en delsträcka. Hon är oense med sin tränarkollega om antalet sätt att ta ut laget. De beräknar det med två olika metoder:

Tränaren: Antal sätt $= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

Tränarkollegan: Antal sätt $= \binom{7}{4} = 35$

Båda kan ha rätt. Beskriv hur de kan ha tänkt. (1/0/0)

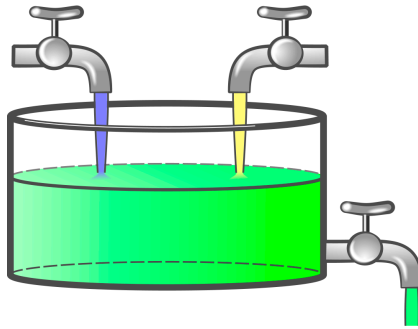
23. I ett lotteri med 100 lotter finns 10 vinstlotter.
Hur stor är sannolikheten att du får exakt två vinstlotter om du köper 5 lotter? (0/3/0)

24. På hur många olika sätt kan tio personer delas in i två lika stora grupper? (0/1/1)

25. I en geometrisk talföljd med elementen a_k , $k = 1, 2, 3, \dots$ är de första elementen $e^{10}, e^9, e^8, e^7, \dots$

- a) Bestäm en sluten (explicit) formel för a_k *Endast svar krävs* (1/0/0)
- b) Sätt $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Bestäm en sluten formel för s_n *Endast svar krävs* (0/1/0)
- c) Visa att $s_n < 35000$ för alla positiva heltal n . (0/0/1)

26. En tank innehåller från början en blandning av 30 liter blå och 20 liter gul färg som blandats väl. För att åstadkomma olika nyanser av grönt tillförs blå färg med hastigheten 2 liter per minut och gul färg med hastigheten 3 liter per minut under kraftig omröring. Samtidigt tappas det ur färgblandning med hastigheten 5 liter per minut.



Olle vill ta reda på hur färgsammansättningen i tanken förändras med tiden. Han antar att det finns y liter blå färg i tanken efter t minuter och ställer upp följande

differentialekvation: $\frac{dy}{dt} = 2 - 0,1y$

- a) Visa algebraiskt att $y = 20 + C \cdot e^{-0,1t}$ är en lösning till differentialekvationen. (1/0/0)
- b) Efter hur lång tid finns det lika mycket blå som gul färg i tanken? (0/3/0)
- c) Ge en förklaring till hur Olle kan ha tänkt när han ställde upp differentialekvationen. (0/0/2)

27. Visa med hjälp av induktion att

$$\frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} = \frac{n-1}{n} \text{ för } n \geq 2 \quad (0/1/3)$$

28. De två talföljderna som beskrivs av a_n och b_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ definieras rekursivt på följande sätt:

$$a_1 = 500, \quad a_n = a_{n-1} + 2000 \text{ för } n \geq 2$$

$$b_1 = 50\,000, \quad b_n = \frac{b_{n-1}}{1,001} \text{ för } n \geq 2$$

Bestäm det största värdet på n för vilket $a_n < b_n$ (0/0/2)

Matematik 5

Bedömningsanvisningar

Allmänna riktlinjer för bedömning

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges den poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som provas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den *huvudsakliga* som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E_{PL} och A_R ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

För uppgifter av kortsvartstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

För uppgifter av långsvartstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

Bedömningsanvisningar

Bedömningsanvisningarna till långsvartsuppgifterna är skrivna enligt två olika modeller. Avvikelser från dessa kommenteras i direkt anslutning till uppgiften i förekommande fall.

Modell 1:

Godtagbar ansats, t.ex. ...	+1 E_P
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (...)	+1 E_P

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen utfaller först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.

Modell 2:

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. ... 1 E_R	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. ... 1 E_R och 1 C_R	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. ... 1 E_R , 1 C_R och 1 A_R

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).

Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga

Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för betyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

För uppgifter där elevens skriftliga kommunikativa förmåga ska bedömas gäller de allmänna kraven nedan.

Kommunikationspoäng på C-nivå (C_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.

Dessutom ska

1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.

Dessutom ska

1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

För uppgifter där det kan delas ut kommunikationspoäng på C- eller A-nivå kan symboler, termer, hänvisningar och figurer förekomma i lösningen. Följande tabell kan då vara till stöd vid bedömningen av skriftlig kommunikativ förmåga:

Symboler	t.ex. $=, <, >, \leq, \geq, \approx, \pm, \in, \subset, \cup, \cap, \Sigma, \{, \}, \backslash, \rightarrow, , !, f'(x), f''(x), VL, HL$
Termer	t.ex. index, induktionsbas, induktionsantagande, induktionssteg, slutsats, VSB, venndiagram, mängd, kongruens, graf, hamiltoncykel, eulerväg, rekursion, differentialekvation, begynnelsevillkor, ekvation, andel, derivata, verifiera, fakultet, kombinationer, permutationer, sannolikhet, gynnsamma utfall, möjliga utfall, union, snitt, differens, komplement
Hänvisningar	t.ex. till binomialsatsen, geometrisk talföljd, aritmetisk talföljd,
Övrigt	t.ex. figurer (med införda beteckningar), definierade variabler, tabeller, angivna enheter

Provsammanställning – Kunskapskrav

Tabell för delprov B, C och D som visar hur antal poäng fördelas på målen på respektive nivå E, C och A.

Mål	Nivå			Totalt
	E	C	A	
B	10	2	1	13
P	5	4	3	12
PM	6	10	8	24
RK	1	4	6	11
Σ	22	20	18	60

Kravgränser

Provet består av tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D).

Tillsammans kan de ge 60 poäng varav 22 E-, 20 C- och 18 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget

E: 15 poäng

D: 23 poäng varav 7 poäng på minst C-nivå

C: 31 poäng varav 12 poäng på minst C-nivå

B: 40 poäng varav 6 poäng på A-nivå

A: 48 poäng varav 10 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

Provbetyg

En resultatfil kan hämtas på webbplatsen <http://www.edusci.umu.se/np/bs> enligt punkt 1-2 på sidan 6 i lärarinformationen och fyllas i av läraren efter genomfört prov.

I resultatfilen genereras elevens provbetyg samt en sammanställning över hur elevens prestationer fördelar sig över de mål och det centrala innehåll som provas i provet. Denna information kan vara ett stöd och komplement som senare ska ligga till grund för elevens kursbetyg.

Bedömningsanvisningar

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en symbol.

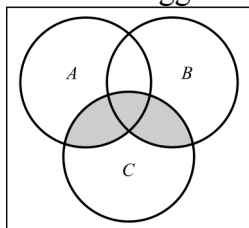
Delprov B

- | | |
|-----------------------------|--------------------|
| 1. | Max 1/0/0 |
| Korrekt svar (72) | +1 E _B |
|
 | |
| 2. | Max 1/0/0 |
| Korrekt svar (90) | +1 E _P |
|
 | |
| 3. | Max 1/0/0 |
| Korrekt svar (15) | +1 E _B |
|
 | |
| 4. | Max 1/0/0 |
| Korrekt svar (14) | +1 E _B |
|
 | |
| 5. | Max 1/0/0 |
| Korrekt svar (måndag) | +1 E _{PL} |
|
 | |
| 6. | Max 1/0/0 |
| Korrekt svar (t ex ABCDEFA) | +1 E _B |

7.

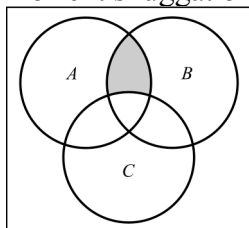
Max 2/1/0

a) Korrekt skuggat område



+1 E_B

b) Korrekt skuggat område



+1 E_B

c) Korrekt svar (t ex $A \setminus (C \cup B)$)

+1 C_B

8.

Max 1/0/0

Korrekt svar (2)

+1 E_B

9.

Max 0/2/0

a) Korrekt svar ($y' = 0$)

+1 C_M

b) Korrekt svar ($y' = k\sqrt{y}$)

+1 C_M

10.

Max 1/1/0

Anger korrekt formel för det rekursiva steget, $a_{n+1} = a_n + 18$

+1 E_B

Korrekt svar ($a_{n+1} = a_n + 18$, $a_1 = 2$)

+1 C_B

11.

Max 0/0/1

Korrekt svar (25)

+1 A_B

Delprov C

12.

Max 2/0/0

Godtagbar ansats, t ex ritar ett godtagbart Venndiagram där åtminstone ett antal, t ex 5, är inplacerat i rätt område

+1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (39)

+1 E_{PL}

13.

Max 2/1/0

a) Godtagbar ansats, bestämmer a_2

+1 E_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($\frac{7}{8}$)

+1 E_P

b) Korrekt svar (t ex $a_k = \frac{2^k - 1}{2^k}$)

+1 C_{PL}

14.

Max 2/2/1

a) Korrekt svar ($y(0) = 100$)

+1 E_B

b) Godtagbar ansats, t ex påbörjar bestämning av maximum till $0,008y(800 - y)$

+1 C_M

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (400)

+1 C_M

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.



c) Godtagbar förklaring som utgår från differentialekvationen

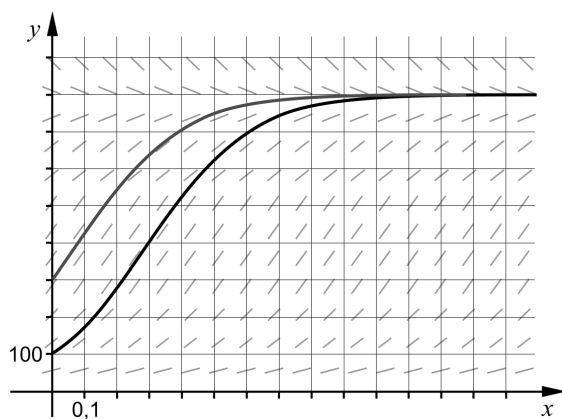
+1 A_M

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.



d) Godtagbart skissad lösningskurva som startar vid (0, 300), följer riktningsfältet och närmar sig $y = 800$

+1 E_B



15. Max 0/2/0

Godtagbar ansats, t ex anger ett korrekt uttryck för x^3 -termen, $\binom{5}{2}(2x)^3 \cdot 3^2$ +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (720) +1 C_P

16. Max 0/1/1

Godtagbar ansats, t ex bestämmer resten då 67^{89} divideras med 11 +1 C_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (0) +1 A_P

17. Max 0/0/2

Godtagbar ansats, t ex faktorerar täljaren +1 A_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (n) +1 A_P

18. Max 0/1/2

Godtagbar ansats, t ex kommer fram till att antalet nollor är större än fem +1 C_R

Redovisar en godtagbar metod, t ex anger att antalet nollor avgörs av hur många gånger faktorn 5 förekommer och kommer fram till att antalet nollor är minst tio +1 A_R

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (12) +1 A_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.



19. Max 0/0/2

Godtagbar ansats, faktorerar uttrycket med konjugatregeln +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (Det finns inga $n > 1$ så att uttrycket är ett primtal) +1 A_{PL}

Delprov D

20. Max 1/0/0

Korrekt svar (293930) +1 E_P

21. Max 2/0/0

Godtagbar ansats, t ex bestämmer differensen mellan två på varandra
följande element, 80 +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (20) +1 E_{PL}

22. Max 1/0/0

Godtagbar beskrivning av båda metoderna (t ex ”Den första metoden tar
hänsyn till startordningen men det gör inte den andra.”) +1 E_M

23. Max 0/3/0

Godtagbar ansats, t ex tecknar ett uttryck för antalet möjliga eller antalet
gynnsamma utfall +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (0,070) +1 C_{PL}

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 C_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.



24. Max 0/1/1

Godtagbar ansats, t ex bestämmer antal sätt att välja ut 5 av 10, $\binom{10}{5}$ +1 C_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (126) +1 A_{PL}

25. Max 1/1/1

a) Korrekt svar ($a_k = \frac{e^{11}}{e^k}$) +1 E_P

b) Korrekt svar ($s_n = e^{10} \cdot \frac{(1 - e^{-n})}{(1 - e^{-1})}$) +1 C_P

c) Godtagbart bevis +1 A_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.



26. **Max 1/3/2**

- a) Godtagbart genomförd verifiering +1 E_R
- b) Godtagbar ansats, t ex bestämmer konstanten C , $C = 10$ +1 C_M
med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (6,9 min) +1 C_M
Lösningen (deluppgift a och b) kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 C_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.



- c) Godtagbar ansats, t ex ger en godtagbar förklaring av två av de tre termerna i differentialekvationen +1 A_M
med i övrigt godtagbart slutförd förklaring +1 A_M

27. **Max 0/1/3**

- Visar att likheten gäller för $n = 2$ samt formulerar induktionsantagandet korrekt +1 C_R
Påbörjar behandling av induktionssteget där induktionsantagandet används korrekt +1 A_R
med i övrigt godtagbart genomfört bevis +1 A_R
Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4 +1 A_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.



28. **Max 0/0/2**

- Godtagbar ansats, t ex bestämmer slutna formler för talföljderna och ställer upp korrekt ekvation eller olikhet *eller* undersöker de rekursivt givna talföljderna med digitalt hjälpmedel +1 A_{PL}
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (25) +1 A_{PL}

Bedömda elevlösningar

Uppgift 14b

Elevlösning 1 (1 C_M)

14b) $y' = 0,008y(800 - y) = y' = 0$
 $\rightarrow 0 = 0,008y(800 - y)$
 $y_1 = 0$ eller $800 - y = 0$
 $\rightarrow y = 800$ $\frac{800 - 0}{2} = 400$
 $y' =$

Kommentar: Lösningen inleds med att sätta $y' = 0$ men förklaring till detta saknas. Även ett svar saknas. Trots detta bedöms lösningen erhålla en modelleringspoäng på C-nivå.

Elevlösning 2 (2 C_M)

14b) $y' = 0.008y(800 - y)$
 y' är som störst mellan nollställena
 $0.008y(800 - y) = 0$
 $y_1 = 0$ $y_2 = 800$
 $\frac{800 - 0}{2} = 400$
 y' är som störst då $y = 400$

Kommentar: Lösningen bedöms nått och jämnt erhålla två modelleringspoäng på C-nivå eftersom det i lösningen inte förklaras varför y' är störst mellan nollställena (underförstått att det handlar om en andragsgradsfunktion).

Uppgift 14c

Elevlösning 1 (0 poäng)

14c)

$$y' = 0,008y(800-y)$$

När y -värdet $\rightarrow 800$ kommer
 $(800-y) \rightarrow 0$ och då avtar
kurvans lutning dvs. y' .

Kommentar: Elevlösningen beskriver hur modellen uppför sig då y går mot 800. I lösningen nämns också att "kurvans lutning avtar", men inget om att $y' \rightarrow 0$. Sammantaget anses lösningen inte uppfylla kravet på en godtagbar förklaring.

Elevlösning 2 (1 A_M)

14c) Detta är sant eftersom man kollar på differentiationen ser man: $y' = 0,008y(800-y)$
De två delarna som kan varieras är:
 y och $(800-y)$. Om då $y \rightarrow 800$
kommer den delen att resultera i noll
vilket betyder att även ökningen/sänkningen (y')
kommer stabilisera sig som 0 och om
förändringen är 0 kommer inget hända
om x blir större.

Kommentar: Förklaringen är något knapphändig och beskrivningen av vad som händer med derivatan då $y \rightarrow 800$ är otydlig. Lösningen anses ändå nätt och jämnt uppfylla kraven för en modelleringspoäng på A-nivå.

Uppgift 18

Elevlösning 1 (1 CR)

18. Jag provar om det finns en nolla
i slutet:
 $10 \mid 50$?
Ja, för $(2 \cdot 5)$ är faktorer i 50 !

Två nollor:
 $100 \mid 50$! ?
Ja för $2 \cdot 5 \cdot 10$ är faktorer i 50 !

Tre nollor:
 $1000 \mid 50$! ?
Ja för $2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 20$ är faktorer i 50 !

$1000000 \mid 50$! ?
Ja för $2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 30 \cdot 40 \cdot 50$ är
faktorer i 50 ! Alltså är $(2 \cdot 5)^6 (=1000000)$
en faktor i 50 !

Svar : 6 nollor

Kommentar: I lösningen ingår att $2 \cdot 5$ är en faktor i 50 ! men de övriga faktorerna förutom tiotalen saknas. Sammantaget ges lösningen en resonemangspoäng på C-nivå.

Elevlösning 2 (1 C_R och 1 A_R)

$$18. \quad 50! = 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot \dots \cdot 1$$

För varje tal som slutar på 0
läggs det till en 0:a i slutet av produkten.

$$10, 20, 30, 40, 50, 2 \cdot 5$$

$$15 \cdot 12, 25 \cdot 22, 35 \cdot 32, 45 \cdot 42$$

Samma sak gäller varje gång ett
tal med 5 som entalssiffra multipliceras
med ett annat jämt tal

→ 10 nollor

Kommentar: I lösningen beskrivs en metod för hur man ska ta fram antal nollor i slutet av talet och därmed anses lösningen få första resonemangspoängen på A-nivå. Sammantaget ges lösningen en resonemangspoäng på C-nivå och en resonemangspoäng på A-nivå.

Uppgift 23

Elevlösning 1 (2 C_{PL})

$$23. \quad \frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{90}{3}}{\binom{100}{5}} = 0,070$$

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet men det saknas förklaringar till delarna i uttrycket. Lösningen uppfyller därmed inte kraven för kommunikationspoäng på C-nivå. Sammantaget ges lösningen två problemlösningspoäng på C-nivå.

Elevlösning 2 (2 C_{PL} och 1 C_K)

23,

$$\left(\frac{10}{100} \cdot \frac{9}{99} \cdot \frac{90}{98} \cdot \frac{89}{97} \cdot \frac{88}{96} \right) \cdot \binom{5}{2} = 0,07022$$

|
|
|
|
|
|

vinst
vinst
nit
nit
nit
|

Antal sätt att
kombinera var
vinster kan komma.

Svar: 7,02%

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet. Lösningen är möjlig att följa och förstå, t ex förklaras de ingående faktorerna på ett godtagbart sätt. Sammantaget ges lösningen samtliga poäng inklusive en kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 25c

Elevlösning 1 (0 poäng)

25c

Med räknare får jag $S_{100} \approx 34845,35582$
och $S_{1000} \approx 34845,35582$, alltså samma
till åtminstone 5 decimaler. Jag vet att S_n
är strikt växande, men avplanande, eftersom
jag adderar allt mindre positiva tal, så jag
drar slutsatsen att S_n mindre än 35000 för
alla n .

Kommentar: Elevlösningen visar ett försök att med stora tal troliggöra att $s_n < 35000$. Metoden gäller dock inte för alla n och lösningen är därmed inget godtagbart bevis.

Elevlösning 2 (1 AR)

25c

$$S_n = \frac{e^{10}(e^{-n}-1)}{e^{-1}-1}$$

Då $n \rightarrow \infty$ går $e^{-n} \rightarrow 0$

$$S_{\infty} = \frac{e^{10}(-1)}{e^{-1}-1} \approx 34845,35582$$

som är mindre än 35000

Kommentar: Elevlösningen använder sig av en generell metod för att visa påståendet. Trots att vissa beteckningar inte är helt korrekta, t ex s_{∞} , så anses lösningen uppfylla kraven för en resonemangspoäng på A-nivå.

Uppgift 26a, b

Elevlösning 1 (1 ER och 2 CM)

$$\begin{aligned} 26a) \quad y' &= 2 - 0,1y = 2 - 0,1(20 + Ce^{-0,1t}) \\ &= 2 - 2 - 0,1Ce^{-0,1t} = -0,1Ce^{-0,1t} \\ y &= 20 + Ce^{-0,1t} \Rightarrow y' = -0,1Ce^{-0,1t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad y &= 20 + Ce^{-0,1t} \\ 30 &= 20 + Ce^{-0,1 \cdot 0} = 20 + C \cdot 1 \Rightarrow C = 10 \\ 25 &= 20 + 10e^{-0,1t} \\ \frac{5}{10} &= e^{-0,1t} \Rightarrow \frac{\ln 0,5}{-0,1} = t \\ t &\approx 6,9 \quad \text{Svar: efter ca 7 min} \end{aligned}$$

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet. Eftersom förklarande text saknas helt blir lösningen svår att följa och förstå. Lösningen anses därmed inte uppfylla kraven för kommunikationspoäng på C-nivå. Sammantaget ges lösningen en resonemangspoäng på E-nivå och två modelleringspoäng på C-nivå.

Elevlösning 2 (2 CM och 1 CK)

$$26 a) \quad \frac{dy}{dx} = 2 - 0,1y$$

$$y = 20 + Ce^{-0,1t} \quad y' = -0,1 \cdot Ce^{-0,1t}$$

$$y' = 2 - 0,1y$$

$$\begin{aligned} HL &= 2 - 0,1y = 2 - 0,1(20 + Ce^{-0,1t}) = \\ &= 2 - 2 - Ce^{-0,1t} = VL \quad \text{U.S.V.} \end{aligned}$$

b) Mängden gul färg = den totala

mängden - mängden gul färg:

$$50 - y = \text{mängden gul färg}$$

$\Rightarrow$ lika mycket blå som gul färg:

$$50 - y = y$$

$$50 = 2y$$

$$50 = 2(20 + 10e^{-0,1t})$$

$$25 = 20 + 10e^{-0,1t}$$

$$\frac{5}{10} = e^{-0,1t} \Rightarrow \ln \frac{5}{10} = -0,1t$$

$$t = \frac{\ln(\frac{5}{10})}{-0,1} \approx 6,93 \text{ min}$$

Svar efter ≈ 7 minuter

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet. Gällande kommunikation är lösningen möjlig att följa och förstå. Slutsatsen i lösningen för uppgift a) är inte korrekt och därför erhålls inte resonemangspoängen på E-nivå. Sammantaget ges lösningen två modelleringspoäng på C-nivå och en kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 27

Elevlösning 1 (1 C_R och 2 A_R)

$$27. S_n: \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} \quad \left(= \frac{n-1}{n} \right)$$

Basfall: $n = 2$

$$VL = \sum_{k=2}^2 = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} = HL$$

Basfallet gäller

Vi antar nu att S_p gäller $\left(S_p = \sum_{k=2}^p \frac{1}{p(p-1)} = \frac{p-1}{p} \right)$

$$VL = S_{p+1} = \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{p(p-1)} = S_p + \frac{1}{p(p+1)} =$$

$$\frac{p-1}{p} + \frac{1}{(p+1)p} = \frac{(p-1)(p+1) + 1}{p(p+1)} = \frac{p^2 - 1 + 1}{p(p+1)} = \frac{p^2}{p(p+1)} = \frac{p}{p+1} = HL$$

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet. Den formella hanteringen av bevisföringen är bristfällig då de olika stegen i induktionsbeviset är otydligt uppdelade och bristfälligt kommenterade. Dessutom saknas slutsats. Hanteringen av summatecknen är felaktiga bland annat då den ena summan inte innehåller något uttryck och den andra summan innehåller fel variabel. Lösningen uppfyller därmed inte kraven för kommunikationspoäng på A-nivå. Sammantaget ges lösningen nått och jämnt en resonemangspoäng på C-nivå och två resonemangspoäng på A-nivå.

Elevlösning 2 (1 CR, 1 AR och 1 AK)

$$27. \quad \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = \frac{n-1}{n}$$

① Basfall $n=2$

$$VL \quad \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{2(2-1)} = \frac{1}{2}$$

$$HL \quad \frac{n-1}{n} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

② Induktionsantagandet I.A

Anta att påståendet är sant för $n=p$

$$\sum_{k=2}^p \frac{1}{k(k-1)} = \frac{p-1}{p}$$

③ Induktionssteg I.S

Visa att påståendet är sant för $n=p+1$

$$\sum_{k=2}^{p+1} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{(p+1)-1}{p+1} = \frac{p}{p+1}$$

$$\sum_{k=2}^{p+1} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^p \frac{1}{k(k-1)} + \frac{1}{(p+1)(p+1-1)} \stackrel{\text{Enligt I.A}}{=}$$

$$= \frac{p-1}{p} + \frac{1}{(p+1)p} = \frac{p}{p+1}$$

Kommentar: Elevlösningen behandlar uppgiften i sin helhet. I lösningen redovisas inte hur den "sista" likheten uppnått. Lösningen uppfyller därmed inte kraven för den andra resonemangspoängen på A-nivå. Lösningen är i huvudsak fullständig och lätt att följa och förstå. Lösningen uppfyller därmed kraven för kommunikationspoäng på A-nivå trots att slutsats saknas.

Ur ämnesplanen för matematik

Matematiken har en flertusenårig historia med bidrag från många kulturer. Den utvecklas såväl ur praktiska behov som ur människans nyfikenhet och lust att utforska matematiken som sådan. Kommunikation med hjälp av matematikens språk är likartad över hela världen. I takt med att informationstekniken utvecklas används matematiken i alltmer komplexa situationer. Matematik är även ett verktyg inom vetenskap och för olika yrken. Ytterst handlar matematiken om att upptäcka mönster och formulera generella samband.

Ämnets syfte

Undervisningen i ämnet matematik ska syfta till att eleverna utvecklar förmåga att arbeta matematiskt. Det innefattar att utveckla förståelse av matematikens begrepp och metoder samt att utveckla olika strategier för att kunna lösa matematiska problem och använda matematik i samhälls- och yrkesrelaterade situationer. I undervisningen ska eleverna ges möjlighet att utmana, fördjupa och bredda sin kreativitet och sitt matematikkunnande. Vidare ska den bidra till att eleverna utvecklar förmåga att sätta in matematiken i olika sammanhang och se dess betydelse för individ och samhälle.

Undervisningen ska innehålla varierade arbetsformer och arbetssätt, där undersökande aktiviteter utgör en del. När så är lämpligt ska undervisningen ske i relevant praxisnära miljö. Undervisningen ska ge eleverna möjlighet att kommunicera med olika uttrycksformer. Vidare ska den ge eleverna utmaningar samt erfarenhet av matematikens logik, generaliserbarhet, kreativa kvaliteter och mångfacetterade karaktär. Undervisningen ska stärka elevernas tilltro till sin förmåga att använda matematik i olika sammanhang samt ge utrymme åt problemlösning som både mål och medel. I undervisningen ska eleverna dessutom ges möjlighet att utveckla sin förmåga att använda digital teknik, digitala medier och även andra verktyg som kan förekomma inom karaktärsämnen.

Undervisningen i ämnet matematik ska ge eleverna förutsättningar att utveckla förmåga att:

1. använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen.
2. hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg.
3. formulera, analysera och lösa matematiska problem samt värdera valda strategier, metoder och resultat.
4. tolka en realistisk situation och utforma en matematisk modell samt använda och utvärdera en modells egenskaper och begränsningar.
5. följa, föra och bedöma matematiska resonemang.
6. kommunicera matematiska tankegångar muntligt, skriftligt och i handling.
7. relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang.

Kunskapskrav Matematik kurs 5

Betyget E

Eleven kan **översiktligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **några** representationer samt **översiktligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnen i **bekanta situationer**. I arbetet hanterar eleven **några enkla** procedurer och löser uppgifter av standardkaraktär **med viss säkerhet**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem **av enkel karaktär**. Dessa problem inkluderar **ett fåtal** begrepp och kräver **enkla** tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att tillämpa **givna** matematiska modeller. Eleven kan med **enkla** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier och metoder.

Eleven kan föra **enkla** matematiska resonemang och värdera med **enkla** omdömen egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal och skrift **med inslag av** matematiska symboler och andra representationer.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **kursens innehåll** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **enkla** resonemang om exemplens relevans.

Betyget D Betyget D innebär att kunskapskraven för E och till övervägande del för C är uppfyllda.

Betyget C

Eleven kan **utförligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **några** representationer samt **utförligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnen. I arbetet hanterar eleven **flera** procedurer, **inklusive avancerade och algebraiska uttryck**, och löser uppgifter av standardkaraktär **med säkerhet**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att **välja och** tillämpa matematiska modeller. Eleven kan med **enkla** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem**. Eleven kan föra **välgrundade** matematiska resonemang och värdera med **nyanserade** omdömen egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. **Vidare kan eleven genomföra enkla matematiska bevis**. Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal och skrift **samt använder** matematiska symboler och andra representationer **med viss anpassning till syfte och situation**.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **några av kursens delområden** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **välgrundade** resonemang om exemplens relevans.

Betyget B Betyget B innebär att kunskapskraven för C och till övervägande del för A är uppfyllda.

Betyget A

Eleven kan **definiera och utförligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **flera** representationer samt **utförligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa **komplexa** matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnen. I arbetet hanterar eleven **flera** procedurer, **inklusive avancerade och algebraiska uttryck**, och löser uppgifter av standardkaraktär **med säkerhet och på ett effektivt sätt**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem **av komplex karaktär**. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar. **I problemlösning upptäcker eleven generella samband som presenteras med symbolisk algebra**. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att **välja, tillämpa och anpassa** matematiska modeller. Eleven kan med **nyanserade** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem**.

Eleven kan föra **välgrundade och nyanserade** matematiska resonemang, värdera med **nyanserade** omdömen **och vidareutveckla** egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. **Vidare kan eleven genomföra matematiska bevis**. Dessutom uttrycker sig eleven **med säkerhet** i tal och skrift **samt använder** matematiska symboler och andra representationer **med god anpassning till syfte och situation**. Genom att ge exempel relaterar eleven något i **några av kursens delområden** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **välgrundade och nyanserade** resonemang om exemplens relevans.

Centralt innehåll Matematik kurs 5

Undervisningen i kursen ska behandla följande centrala innehåll:

Samband och förändring

- F22** Strategier för att ställa upp och tolka differentialekvationer som modeller för verkliga situationer.
- F23** Användning och lösning av differentialekvationer med digitala verktyg inom olika områden som är relevanta för karaktärsämnena.

Diskret matematik

- D1** Begreppet mängd, operationer på mängder, mängdlärans notationer och venndiagram.
- D2** Begreppet kongruens hos hela tal och kongruensräkning.
- D3** Begreppen permutation och kombination.
- D4** Metoder för beräkning av antalet kombinationer och permutationer samt motivering av metodernas giltighet.
- D5** Begreppet graf, olika typer av grafer och dess egenskaper samt några kända grafteoretiska problem.
- D6** Begreppen rekursion och talföljd.
- D7** Induktionsbevis med konkreta exempel från till exempel talteoriområdet.

Problemlösning

- P1** Strategier för matematisk problemlösning inklusive användning av digitala medier och verktyg.
- P5** Omfångsrika problemsituationer inom karaktärsämnena som även fördjupar kunskaper om integraler och derivata. Matematikens möjligheter och begränsningar som verktyg i dessa situationer.
- P4** Matematiska problem med anknytning till matematikens kulturhistoria.