Problemlösning differentialekvationer

1. En behållare innehåller 70 liter rent vatten och 30 liter färgmedel. Det tillförs en blandning med 80% färgmedel och 20% vatten med en hastighet av 10 liter/minut. Samtidigt lämnar blandningen i behållaren med hastigheten 12 liter/minut. Ställ upp en differentialekvation med nödvändiga villkor där $y(t)$ definierar mängden färg i behållaren efter t minuter.

2. Joakim konstruerar en modell för att beskriva hur en befolkning förändras från år 2023. Han konstruerar följande modell $y' = 0{,}4y\left(1 - \frac{y}{50000}\right)$, $y(0) = 25\,000$

a) Ökar eller minskar befolkningen då befolkningen är 30 000 personer

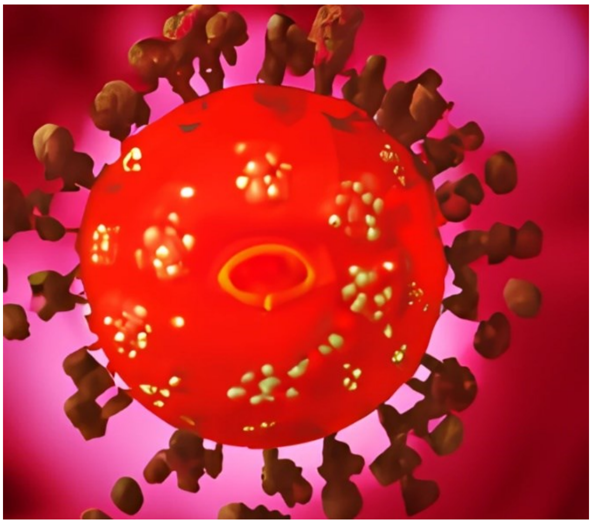
b) Förklara vad faktorn $\left(1 - \frac{y}{50000}\right)$ innebär för tillväxten när y blir stort

c) Bestäm följande gränsvärde $\lim_{x \to \infty} y(x)$

d) Joakim justerar modellen till $y' = 0{,}4y\left(1 - \frac{y}{50000}\right) - 100$. Vad förändras praktiskt i befolkningsförändringen när Joakim lägger till -100 i modellen och beskriv i ord vad det innebär.

3. Vi har en 7 meter hög tank som är full med vatten, och öppnar en kran längst ner. Då minskar vattendjupet med en hastighet som är proportionell mot tredje roten ur vattendjupet. Skriv upp en differentialekvation och ett begynnelsevillkor som beskriver detta samband.

4. En virussjukdom sprider sig snabbt i det lilla samhället Joakimköping med 10 000 invånare. Smitthastigheten är proportionell mot produktionen av antalet smittade och antalet icke-smittade. Du vet att smitthastigheten för smittade är 50 personer per dag då antalet smittade är 1000 personer. Ställ upp en differentialekvation som beskriver sambandet med tydliga definitioner.



5. Glukos förbrukas i kroppen med en hastighet som är proportionell mot mängden glukos i kroppen. Under en sjukdomsbehandling tillsätter också läkare β mängd glukos varje dag för att kunna stabilisera mängden glukos under tid eftersom det krävs för att Joakim ska bli frisk snabbt. Anta att Joakim har α mängd glukos i kroppen när han kommer in till sjukhuset.

   a) Ställa upp en differentialekvation som beskriver förändringen av glukos med nödvändiga definitioner

   b) Skriv ut den generella funktionen som beskriver hur mängden glukos förändras.

6. En skalbaggepopulation i ett område ökar med en hastighet som är proportionell mot antalet skalbaggar med en proportionalitetskonstant som är 0,36. Samtidigt tillkommer 100 skalbaggar varje vecka och 3% av skalbaggarna dör varje vecka av naturliga orsaker (hot från andra arter eller näringsbrist).

   a) Ställ upp en differentialekvation som beskriver sambandet.

   b) Bestäm funktionen som beskriver antalet skalbaggar om du vet att det 2023 finns 5 000 individer i populationen.

7. En oljeolycka gjorde att olja rann ut i ett vattendrag med först en hastighet av 100 liter per timme. Därefter minskar flödet av olja med 5 liter per timme. Vattendraget har också ett utflöde som alltid är lika stort det inflöde som vattendragen utsätts för. Anta att oljan är det enda inflödet i vattendraget. Skriv upp en differentialekvation som beskriver sambandet de första 20 timmarna där y är mängden olja och V är den totala mängden blandning i vattendraget.

8. Du tar ut ett paket glass ur din $-16°$ kalla frys klockan 10.00 en sommardag då är det 20 grader i din lägenhet och temperaturen förväntas öka varje timme med 1 grad Celsius. Enligt Newtons värmelag värms glassen upp med en hastighet som är proportionell mot temperaturskillnaden mellan glassen och omgivningen.

   a) Ställ upp en differentialekvation som beskriver glassens temperatur, inklusive begynnelsevillkor.

   b) Vad finns det för brister i din modell?

   c) Om du vet att proportionalitetskonstanten är 0,8 bestäm då funktionen som beskriver glassens temperatur.

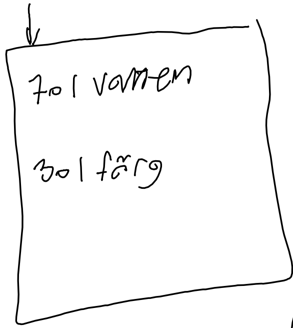
9. Information sprids från mun till mun i en population. Man kan anta att antalet personer som känner till informationen ökar med en takt som är proportionell mot produkten av antalet som känner till informationen och antalet som inte gör det. Låt $y(t)$ vara antalet personer som känner till informationen vid tiden t, och M vara populationens storlek. Från början vet bara en person informationen som sprids. Skriv upp en differentialekvation som beskriver situationen med nödvändiga definitioner.

10. Joakim försöker skapa en befolkningsförändringsmodell för staden Joakimköping. I Joakimköping bor det 25 000 personer 2023. Joakim observerar att befolkningsförändringens hastighet är proportionell mot differensen mellan födelseantalet och dödsantalet. Man räknar med att födelseantalet är 5% av befolkningen och att dödsantalet är kvadratroten ur födelseantalet. Ställ upp en differentialekvation som beskriver befolkningsförändringen med nödvändiga villkor och definitioner

Problemlösning diff.ekvationer

1. $y' = IN - UT$

IN 8 liter färg (10 liter tot.)



UT → Andel av 12 liter

(Notera, minskar med 2 liter per minut)

$$y' = 8 - 12 \cdot \frac{y}{100-2t}$$ — minskar med 2 liter per minut

total mängd blandning vid $t=0$

$y(0) = 30$

2. $y' = 0{,}4y\left(1 - \frac{y}{50000}\right)$ $y(0) = 25000$

a) $y' = 0{,}4 \cdot 30000\left(1 - \frac{30000}{50000}\right) > 0$, det växer

b) Det innebär en begränsning om $y = 50000$ kommer tillväxthastigheten bli noll således ingen ökning, befolkningen planar ut.

c) $\lim_{x \to \infty} y(x) = 50000$

2 d) Det minskar med 100 personer varje år

man kan tolka det som att 100 personer lämnar staden (området) varje år.

3. $y' = -k \cdot \sqrt[3]{y}$ (minskar) $\quad y(0) = 7$

4. 10000 personer i Joakimköping $\quad y$ är antalet smittade

$$y' = ky\underbrace{(10000 - y)}_{\text{Antal icke-smittade}}$$

Vi vet att $y' = 50$ då $y = 1000$

Sök konstanten k

$$50 = k \cdot 1000(10000 - 1000)$$

$$k = \frac{50}{9000000} \qquad y' = \frac{50}{9000000} y(10000 - y)$$

5. a) $y' = -ky + \beta \quad y(0) = \alpha$

b) $y' + ky = \beta \qquad y = y_h + y_p \qquad y_h: \; y' + ky = 0 \qquad y_h = C_1 e^{-kx}$

y_p: Antagande: $y_p = a$ (en konstant) $\quad y_p' = 0$

$$0 + ka = \beta$$

$$a = \frac{\beta}{k} \qquad y_p = \frac{\beta}{k} \qquad y = C_1 \cdot e^{-kx} + \frac{\beta}{k} \qquad y(0) = \alpha$$

$$C_1 + \frac{\beta}{k} = \alpha \qquad C_1 = \alpha - \frac{\beta}{k} \qquad \boxed{y = \left(\alpha - \frac{\beta}{k}\right)e^{-kx} + \frac{\beta}{k}}$$

6. a) $y' = k \cdot y + 100 - 0{,}03y$ $\quad k = 0{,}36$

100 skalbaggar tillkom

3% dör varje vecka

$$y' = 0{,}36y + 100 - 0{,}03y = 0{,}33y + 100$$

b) $y' - 0{,}33y = 100$ Inhomogen. $y = y_h + y_p$

$y(0) = 5000$

y_h: $y' - 0{,}33y = 0$ $\quad y_h = Ce^{0{,}33x}$

y_p: $y_p = a$ antagande (en konstant)

$y_p' = 0$ $\quad 0 + 0{,}33a = 100$

$a = 303$ $\quad y_p = 303$

$y = Ce^{0{,}33x} + 303$ $\quad y(0) = 50$ $\quad C + 303 = 50$

$C = -253$

$$\boxed{y = -253e^{0{,}33x} + 303}$$

7. $y' = IN - UT$

från början

minskar med 2 liter varje timme

IN: $100 - 2t$

y – mängd olja

UT: $(100 - 2t) \cdot \dfrac{y}{V}$

V – total mängd

Samma flöde in som ut

$$y' = (100 - 2t) - (100 - 2t)\frac{y}{V}$$

8. a) Newton (nu) uppvärmningslag

$T' = -k(T - T_r) = k(T_r - T)$

T_r = temperaturen i rummet =

$= 20 + x$
  x är uppvärmningen för varje

timme

$T' = k((20+x) - T)$ $T(0) = -16$

b) Vi har ingen begränsning på x och därmed
ökar värmen i rummet med konstant hastighet.
Inte så realistiskt

c) $T' = 0{,}5((20+x) - T)$ $T(0) = -16$

$T' = 10 + \frac{x}{2} - \frac{T}{2}$ Inhomogen. $T = T_h + T_p$

$T' + \frac{T}{2} = 10 + \frac{x}{2}$ $T_h: T' + \frac{T}{2} = 0$ $T_h = Ce^{-\frac{x}{2}}$

$T_p = ax + b$ $a + \frac{a}{2}x + \frac{b}{2} = 10 + \frac{x}{2}$ $\frac{a}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1$

$T_p' = a$

$a + \frac{b}{2} = 10$ $\frac{b}{2} = 9$ $b = 18$

$T_p = x + 18$ $T = T_h + T_p = Ce^{-\frac{x}{2}} + x + 18$

$T(0) = 16$ $C + 18 = -16$ $T = -34e^{-\frac{x}{2}} + x + 18$

$C = -34$

9. $y' = k\,y\,(m - y)$ $\qquad y(0) = 1$

Antal som vet!

Antal människor som inte vet info

En person vet från början

10. $y' = k(F - D)$ $\qquad F = 0{,}05y$

Antal födslar

Antal dödsfall

5% av befolkning

$D = \sqrt{0{,}05y}$

$$y' = k\left(0{,}05y - \sqrt{0{,}05y}\right) \qquad y(0) = 25000$$