

Övningsprov 3 – Ma 5

1. Lös differentialekvationerna och partikulärlösningen om ett begynnelsevillkor står

a) $y' = 4y, y(0) = 10$

b) $y' + 9y = 1$

c) $2 \frac{dy}{dx} = 7y$

d) $y' + y = x + 5, y(0) = 20$

e) $2y' - 4y = 2x^2 - 6x$ (5/2/1)

2. Verifiera att följande funktioner är lösningar till differentialekvationerna som står i parentes bredvid

a) $y = 10e^{12x}$ ($y' - 12y = 0$)

b) $y = e^x - x^2 - 2x - 2$ ($y' = y + x^2$) (3/0/0)

3. Visa att likheten stämmer med hjälp av induktionsbevis

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 \dots 2n = n^2 + n \quad (2/1/0)$$

4. En valpopulations tillväxthastighet går att beskriva med differentialekvationen

$$\frac{dy}{dx} = y - \frac{y^2}{1000}. \text{ Där } y \text{ är antalet valar och } x \text{ är antalet år.}$$

a) 2023 fanns det 200 individer i populationen vad var tillväxthastigheten då?

b) Efter hur många individer börjar populationen är tillväxthastigheten noll?

c) Vid hur många individer är tillväxthastigheten 250 individer/år?



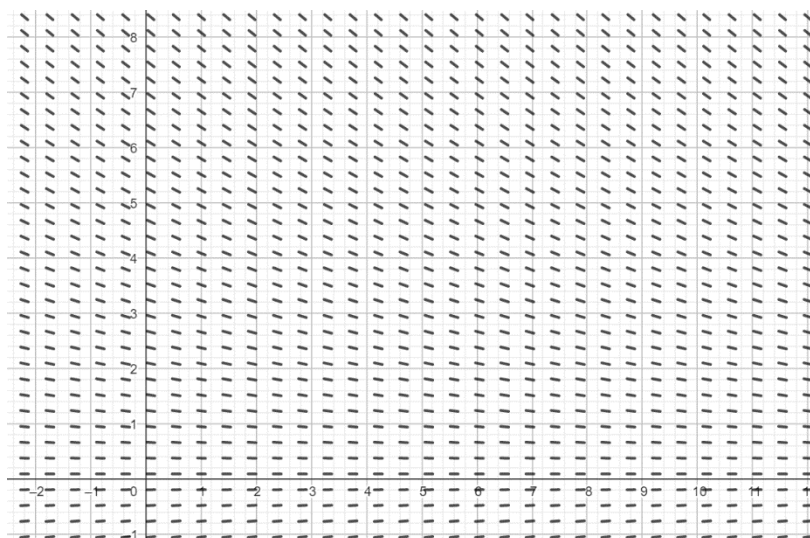
(2/2/0)

5. En bakteriekultur växer med en hastighet bakterier/dag som är proportionell mot mängden. Där proportionalitetskonstanten är 0,03.
- Bestäm en funktion som beskriver bakteriernas tillväxt där x är antal dagar.
 - Om du vet att forskarna planterade 1200 bakterier från början. Hur många bakterier kommer det finnas efter två veckor.



(3/1/0)

6. Nedan ser du ett riktningsfält för lösningskurvorna till en differentialekvation.
- Förklara varför differentialekvationen $y' - 5y = 0$ inte kan representeras i riktningsfältet.
 - Skissa lösningskurvan som har begynnelsevillkoret $y(0) = 5$ (gör en ungefärlig skiss i ditt eget block)
 - Ge ett exempel på vilken differentialekvation vars allmänna lösning som skulle kunna vara representerad i riktningsfältet (behöver inte vara exakt)



7. För en inhomogen differentialekvation vet du att $y_h = C \cdot e^{-0,02x}$ samtidigt vet du att $\frac{dy}{dx} = 10$ då $y = 1000$. Ge ett exempel på en sådan differentialekvation.

8. Joakims färgföretag ska experimentera fram ett nytt färgämne som kräver två ingredienser. Den ena är vatten och den andra är ett färgmedel som en forskare på företaget tagit fram. Experimentet är att de ska fylla en tank innehållande 100 liter vatten med färgmedel. Man tillför 5 liter färgmedel varje minut samtidigt som 5 liter blandning av vatten och färgämne lämnar tanken varje minut för att blandningen ska luftas för bästa resultat.

a) Formulera en differentialekvation som beskriver förändringshastigheten för färgmedlet i tanken.

b) Forskaren på företaget menar att det ska finnas 75% färgmedel i tanken för bästa resultat. Hur lång tid kommer det ta?

(1/3/1)

9. Visa med hjälp av induktion att summan

$$\sum_{n=1}^k (2n - 1)$$

alltid resulterar i ett kvadrattal för alla heltal $k \geq 1$

(0/1/2)

10. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y' = 2y + \sin x + x$$

(0/1/2)

11. I Joakimsköping har stadens dystra profil gjort att antalet födselar och dödsfall i staden gör att befolkningsminskningen varje år är 3% av befolkningen. Samtidigt noterar man utvandringen från staden har ökat varje år med 5% och förväntas göra det i framtiden. 2023 är befolkningen 46 000 personer och utvandringen var 2000 personer. Ställ upp en differentialekvation som beskriver situationen för Joakimsköping med tydliga definitioner. *Du behöver inte lösa differentialekvationen.*

(0/0/2)

12. Ni har lärt er regeln nedan under kursen. Visa att den stämmer med hjälp av induktionsbevis.

**Geometrisk
summa**

$$s_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1} \text{ där } a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$$

(0/0/3)

13. Bonusfråga (ligger utanför kursens ramar men en intressant tillämpning på differentialekvationer)

Differentialekvationer kan användas för att beskriva relationer mellan till exempel arter i naturen. Om vi antar att ett område i naturen framförallt innehåller två arter vargar och rådjur. Enligt naturens lagar kommer vargarna livnära sig på rådjuren och därför kommer antalet rådjur respektive vargar påverkas av hur många det finns i respektive population. Man kan därför ställa upp ett system av differentialekvationer som beskriver hur antalet rådjur respektive vargar påverkar varandra. Nedan följer en förenklad modell som beskriver situationen. Beskriv hur modellen fungerar och skissa två grafer hur populationerna förändras utifrån modellen. $r(t)$ står för storleken på populationen för rådjur i tusental, $v(t)$ står för populationen för av vargar i tusental. Anta att $r(0) = 0,5$ och $v(0) = 0,2$

$$\begin{cases} r'(t) = 0,5r(t) - 0,3r(t) \cdot v(t) \\ v'(t) = -0,2v(t) + 0,1v(t) \cdot r(t) \end{cases}$$

Lösungsansatz für lineare Differenzialgleichungen

1. a) $y' = 4y$ $y(0) = 10$

$$y' - 4y = 0 \quad y = C e^{4x} \quad y(0) = 10 \quad y = 10 e^{4x}$$

b) $y' + 9y = 1$ Inhomogen! $y = y_h + y_p$ y_h aus dō

$$y' + 9y = 0 \quad y_h = C e^{-9x} \quad \text{Ansatz } y_p = a$$
$$y_p' = 0$$

$$0 + 9a = 1 \quad a = \frac{1}{9}$$
$$y = y_h + y_p = C e^{-9x} + \frac{1}{9}$$

c) $2 \frac{dy}{dx} = 7y$ $2y' = 7y$

$$y' - \frac{7y}{2} = 0 \quad y = C e^{\frac{7x}{2}}$$

d) $y' + y = x + 5$ Inhomogen $y = y_h + y_p$

y_h aus dō $y' + y = 0$ $y_h = C e^{-x}$ Ansatz: $y_p = ax + b$

$$y_p' = a$$

$$a + ax + b = x + 5$$

$$a = 1$$

$$a + b = 5 \quad b = 4 \quad y_p = x + 4 \quad y = y_h + y_p = C e^{-x} + x + 4$$

$$y(0) = 20 \quad C + 4 = 20 \quad C = 16 \quad y = 16 e^{-x} + x + 4$$

$$c) \quad 2y' - 4y = 2x^2 - 6x$$

$$y' - 2y = x^2 - 3x \quad \text{Inhomogen!} \quad y = y_h + y_p$$

$$y_h = C e^{2x} \quad \text{Ansatz} \quad y_p = ax^2 + bx + c$$

$$y'_p = 2ax + b$$

$$2ax + b - 2(ax^2 + bx + c) = x^2 - 3x$$

$$2ax + b - 2ax^2 - 2bx - 2c = x^2 - 3x \quad \begin{cases} -2a = 1 & a = -\frac{1}{2} \\ 2a - 2b = -3 & \textcircled{I} \\ b - 2c = 0 & \textcircled{II} \end{cases}$$

$$y_p = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$$

$$y = C e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{I} \quad -1 - 2b = -3 \quad b = 1$$

$$\textcircled{II} \quad 1 - 2c = 0 \quad c = \frac{1}{2}$$

$$2a) \quad y = 10e^{12x} \quad y' = 120e^{12x}$$

$$y' - 12y = 0$$

$$120e^{12x} - 12 \cdot 10e^{12x} = 0 \quad \text{Wort!}$$

$$b) \quad y = e^x - x^2 - 2x - 2$$

$$y' = e^x - 2x - 2$$

$$y' = y + x^2$$

$$e^x - 2x - 2 = e^x - \cancel{x^2} - 2x - 2 + \cancel{x^2}$$

$$e^x - 2x - 2 = e^x - 2x - 2 \quad \text{Wort!}$$

$$3. \quad 2+4+6+8 \dots 2n = n^2 + n$$

$$\textcircled{1} \text{ Undersök } n=1 \quad 2 = 1^2 + 1 = 2 \quad VL = HL$$

$$\textcircled{2} \text{ Induktionsantagande} \quad 2+4+6 \dots 2P = P^2 + P$$

$$\textcircled{3} \text{ Undersök } P+1 \quad \underbrace{2+4+6 \dots 2P}_{P^2+P} + 2(P+1) = (P+1)^2 + P$$

Enligt antagande

$$VL = P^2 + P + 2P + 1 = P^2 + 3P + 1 \quad HL = (P+1)^2 + P = P^2 + 2P + 1 + P = P^2 + 3P + 1$$

$VL = HL$ linheterna stämmer! $\square$

$$4. \textcircled{a) \frac{dy}{dx} = y - \frac{y^2}{1000}} \quad \text{Undersök } y=200$$

$$y' = 200 - \frac{200^2}{1000} = 200 - \frac{40000}{1000} = 200 - 40 = 160$$

Svar: 160 värde/år

$$b) \quad y' = 0 \quad 0 = y - \frac{y^2}{1000} \quad y \left(1 - \frac{y}{1000} \right) = 0 \quad (y=0)$$

Svar: 0° antalet värde år 1000 st. $y=1000$

$$c) \quad y' = 250 \quad y - \frac{y^2}{1000} = 250 \quad y^2 - 1000y + 250000 = 0$$

$$y = 500 \pm \sqrt{500^2 - 250000} = 500 \pm \sqrt{250000 - 250000} = 500$$

Svar: När det är 500 värde

$$5. a) y' = 0,03y \quad y' - 0,03y = 0 \quad y = ce^{0,03x}$$

$$b) y(0) = 1200 \quad y = 1200e^{0,03x} \quad y(14) = 1200e^{0,03 \cdot 14} \approx$$

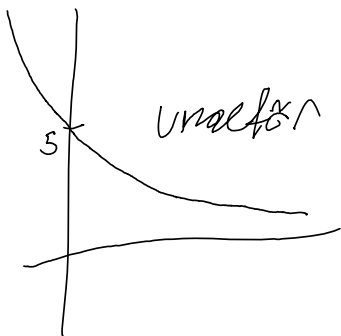
≈ 1353 svar: ungefär 1353 bilar

6. a) $y' - 5y = 0$ ger den allmänna lösningen

$y = ce^{5x}$ vilket är en växande funktion då

$c > 0$

b)



c) Till exempel

$$y' + \frac{y}{2} = 0$$

7. Inhomogen diff. ekvation $y' + 0,02y + f(x) = 0$

$$y' = 10 \quad y = 1000 \quad \text{sätt } f(x) \quad 10 + 0,02 \cdot 1000 + f(x) = 0$$

$$30 + 20 + f(x)$$

$$f(x) = -50$$

$$\text{Till exempel } y' + 0,02y - 50 = 0$$

8.



$y' = 1/N - UT$ y är mängden färgämne i tonlver

$IN: 5 \text{ liter/min}$ $UT: 5 \cdot \frac{y}{100} = \frac{y}{20}$ $y' = 5 - \frac{y}{20}$

$y' + \frac{y}{20} = 5$ Inhomogen diff. ekn. $y = y_p + y_h$

$y_h = -C e^{-\frac{x}{20}}$ Antag $y_p = a$ $0 + \frac{a}{20} = 5$
 $y_p' = 0$ $a = 100$

$y = y_h + y_p = C e^{-\frac{x}{20}} + 100$ $y(0) = 0$ $C = -100$

$y = -100 e^{-\frac{x}{20}} + 100$ $y(x) = 75$

$-100 e^{-\frac{x}{20}} + 100 = 75$

$-100 e^{-\frac{x}{20}} = -25$

$e^{-\frac{x}{20}} = \frac{1}{4}$

$\ln e^{-\frac{x}{20}} = \ln \frac{1}{4}$

$\frac{-x}{20} = \ln \frac{1}{4}$

$x = -20 \cdot \ln \frac{1}{4} \approx 27,73 \text{ min}$

$$7. \sum_{n=1}^h (2n-1) = 1 + 3 + 5 \dots (2h-1)$$

① Enkelt fall $h=1$ så för vi $\sum_{n=1}^1 (2n-1) = 1$
ett kvadrattal

② Induktionsomtagande $h=P$ är ett kvadrattal

$$\sum_{n=1}^P (2n-1) = P^2$$

③ Undersök $P+1$ $\sum_{n=1}^{P+1} (2n-1) = P^2 + (2(P+1)-1) =$

$$= P^2 + 2P + 2 - 1 = P^2 + 2P + 1 = (P+1)^2, \text{ det är ett kvadrattal}$$

Det resulterar alltså alltid i ett kvadrattal!

10. $y' = 2y + \sin x + x$ Inhomogen $y = y_h + y_p$

$$y' - 2y = \sin x + x \quad y_h = C \cdot e^{2x}$$

Antag $y_p = a \sin x + b \cos x + cx + d$
 $y'_p = a \cos x - b \sin x + c$

$$y' - 2y = a \cos x - b \sin x + c - 2(a \sin x + b \cos x + cx + d) = \sin x + x$$

$$= a \cos x - b \sin x + c - 2a \sin x - 2b \cos x - 2cx - 2d = \sin x + x$$

$$a \cos x - b \sin x + c - 2a \sin x - 2b \cos x - 2cx - 2d = \sin x + x$$

$$\begin{cases} a - 2b = 0 & \textcircled{I} \\ -b - 2a = 1 & \textcircled{II} \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2b & \textcircled{I} \\ -b - 4b = 1 & \textcircled{II} \end{cases} \quad \begin{aligned} a &= -\frac{2}{5} \\ b &= -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} c - 2d = 0 \\ -2c = 1 \end{cases}$$

$$c = -\frac{1}{2}$$

$$d = -\frac{1}{4}$$

$$y_p = -\frac{2}{5} \sin x - \frac{1}{5} \cos x - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

$$y = y_h + y_p = C e^{2x} - \frac{2}{5} \sin x - \frac{1}{5} \cos x - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

Det vor Jobbigt!

$$11. \quad y' = -0,03y - 2000 \cdot 1,05^x \quad y(0) = 46000$$

$$12. \quad S_n = a_1 \frac{k^n - 1}{k - 1}, \quad a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$$

$$\textcircled{1} \text{ Enkelt fall } a_1 = 1 \quad k = 0,5 \quad n = 1 \quad \sum_{n=1}^1 1 \cdot 0,5^1 = 1$$

$$S_1 = 1 \cdot \frac{0,5^1 - 1}{0,5 - 1} = 1 \quad \text{Det är samma!}$$

$\textcircled{2}$ Induktionsantagande: Det stämmer för

$$\sum_{n=1}^P a_1 \cdot k^{n-1} = a_1 \cdot \frac{k^P - 1}{k - 1}$$

③ Undersök $P+1$

$$\underbrace{\sum (a_1 \cdot k^{P-1}) + a_1 \cdot k^P}_{a_1 \cdot \frac{k^P - 1}{k-1}} = a_1 \cdot \frac{k^{P+1} - 1}{k-1}$$

$a_1 \cdot \frac{k^P - 1}{k-1}$
Antagande

$$a_1 \cdot \frac{k^P - 1}{k-1} + a_1 \cdot k^P = a_1 \cdot \frac{k^{P+1} - 1}{k-1}$$

$$VL = a_1 \cdot \frac{k^P - 1}{k-1} + \frac{a_1 k - a_1 k^P}{k-1}$$

$$= \frac{\cancel{a_1 k^P} - a_1 + a_1 k^{P+1} - \cancel{a_1 k^P}}{k-1} = \frac{a_1 k^{P+1} - a_1}{k-1}$$

$$= a_1 \frac{k^{P+1} - 1}{k-1}$$

$VL = HL$ likheten stämmer □

13. Tänk eller prova med Jorlim!

TIPS:

Tänk typ

