Övningsprov – Ma4 – fram till kapitel 3

1. Derivera funktionerna

a) $f(x) = 3sin(2x)$

b) $f(x) = -\frac{2cos(6x)}{5}$

c) $f(x) = x \cdot e^{2x}$

d) $f(x) = \frac{x}{x+2}$

e) $f(x) = 2(3x^2 + 1)^{10}$

(4/1/0)

2. Lös ekvationerna

a) $sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ (2/0/0)

b) $cos\left(x - \frac{4\pi}{3}\right) = -1$ (2/0/0)

c) $e^{2x} \cdot x^2 - e^{2x} = 0$ (1/1/0)

d) $2sin(x + \pi) \cdot cos(x + \pi) = sin^2(x + \pi) + cos^2(x + \pi)$ (0/2/0)

3. Skissa grafen till funktionen $f(x) = 2cos(x - \pi)$

(3/0/0)

4. Bestäm $f'(2)$ för funktionen $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$ (2/0/0)

5. Undersök om funktionen $f(x) = x^2 \cdot e^x + 3$ har en extrempunkt

(0/2/0)

6. Bestäm den räta linjen som tangerar $f(x) = \sqrt{3x - 2}$ i $x = 1$

(1/2/0)

7. Beräkna integralen

$$\int_0^1 2x \cdot e^{2x} + 2x^2 \cdot e^{2x} dx$$

(0/2/0)

8. Bestäm $f''(x)$ för funktionen $f(x) = sin(lnx)$ och bestäm $f''(1)$

(0/3/0)

9. Bestäm samtliga asymptoter för följande funktion $\frac{2x^2+x}{x^2-8x+16}$ (0/1/1)

10. $f(x) = \ln\big(g(x)\big)$, $f'(x) = \frac{1}{2}$. Bestäm $g(x)$ om $g(0) = 2$

(0/1/1)

11. Derivera $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ med hjälp av derivatans definition

(0/1/2)

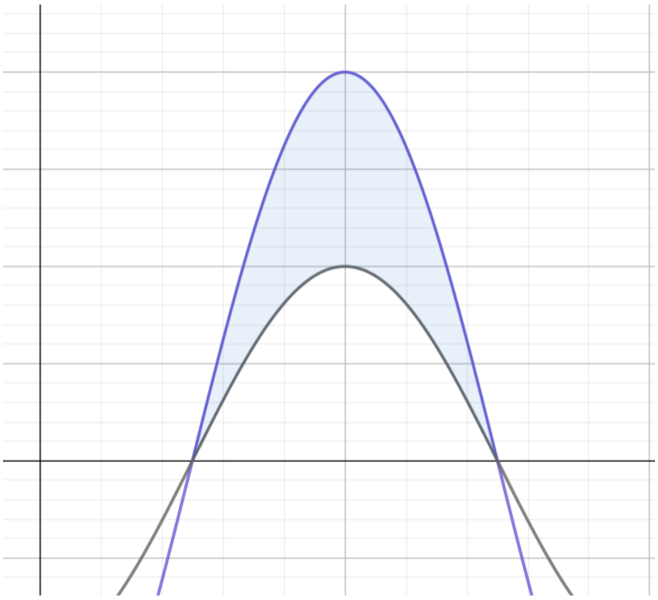
12. Beräkna integralen

$$\int_0^{2\pi} 3sin^3(x)\ dx$$

(0/0/2)

13. Nedan visas graferna till funktioner $f(x) = \frac{4cos^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-4sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}$

och $g(x) = \frac{3-6sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{3}$. Bestäm den markerade arean

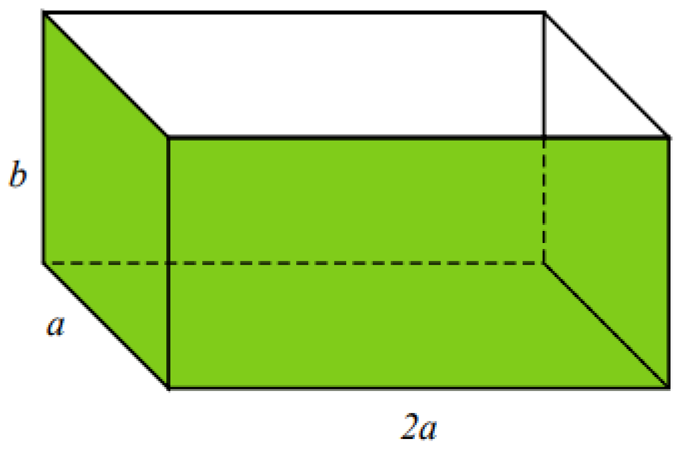


(0/1/2)

14. Lös ekvationen $\sqrt{3}cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot sin(x)+cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot cos(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

(0/1/2)

15. Ett rätblock utan lock har volymen $36m^2$. För vilka sidlängder på $2a, a\ och\ b$ har rätblockets sammanlagda sidor den minsta arean men fortfarande den bestämda volymen på $36m^2$. Bestäm också den arean.



(0/1/2)

Övningsprov ma4 - Lösningsförslag

1. a) $f(x) = 3\sin(2x)$ $\quad f'(x) = 6\cos(2x)$

b) $f(x) = -\dfrac{2\cos(6x)}{5}$ $\quad f'(x) = \dfrac{12\sin(6x)}{5}$

c) $f(x) = x \cdot e^{2x}$ $\quad f'(x) = e^{2x} + 2x e^{2x} = e^{2x}(1+2x)$

d) $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ $\quad f'(x) = \dfrac{x+2-x}{(x+2)^2} = \dfrac{2}{x^2+4x+4}$

e) $f(x) = 2(3x^2+1)^{10}$ $\quad f'(x) = 10 \cdot 2 \cdot 6x(3x^2+1)^9 = 120x(3x^2+1)^9$

2. a) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

I $\quad x + \frac{\pi}{4} = 0 + 2\pi \cdot n$

$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot n$

II $\quad x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi \cdot n$

$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi \cdot n$

Svar: $x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot n$

$x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi \cdot n$

b) $\cos\left(x - \frac{4\pi}{3}\right) = -1$

$x - \frac{4\pi}{3} = \pm\pi + 2\pi \cdot n$

$x = \pm\pi + \frac{4\pi}{3} + 2\pi \cdot n$

$x = \pm\frac{7\pi}{3} + 2\pi \cdot n$

Svar: $x_1 = \frac{7\pi}{3} + 2\pi \cdot n$

$= \frac{\pi}{3} + 2 \cdot \pi \cdot n$

$x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2 \cdot \pi \cdot n$

c) $e^{2x} \cdot x^2 - e^{2x} = 0$

$e^{2x}(x^2 - 1) = 0$ $\quad e^{2x}$ kan inte vara noll

$(x^2-1) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$ $\quad$ Svar $x = \pm 1$

d) $\underbrace{2\sin(x+\pi)\cdot\cos(x+\pi)}_{\sin(2(x+\pi))} = \underbrace{\sin^2(x+\pi)+\cos^2(x+\pi)}_{\text{trig. ettan}}$

formel: $\sin 2v = 2\sin v\cdot\cos v$

$\sin(2x+2\pi)=1$

$\underline{x = \frac{-3\pi}{4} + \pi\cdot n}$

I $\quad 2x+2\pi = \frac{\pi}{2} + 2\pi\cdot n$

$2x = \frac{\pi}{2} - 2\pi + 2\pi\cdot n$

$2x = \frac{-3\pi}{2} + 2\pi\cdot n$

$x = \frac{-3\pi}{4} + \pi\cdot n$

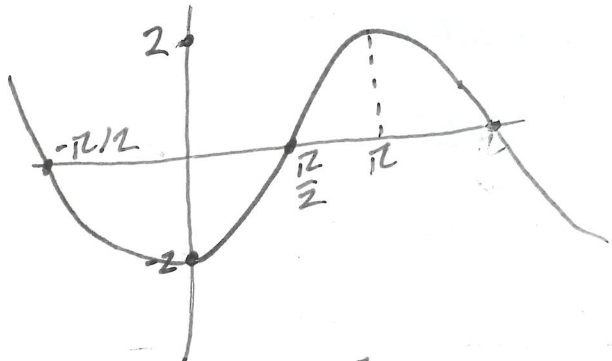
II $\quad 2x+2\pi = \pi - \frac{\pi}{2} + 2\pi\cdot n$

$2x = \frac{\pi}{2} - 2\pi + 2\pi\cdot n$

x är samma som I

3. $f(x) = 2\cos(x-\pi)$

Amplitud: 2, förskjutning: $-\pi$



4. $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$ $\quad f'(x) = \frac{2x\cdot x-(x^2-1)}{x^2} = \frac{2x^2-x^2+1}{x^2}$

$= \frac{x^2+1}{x^2}$ $\quad f'(2) = \frac{5}{4}$

5. $f(x) = x^2\cdot e^x+3$ $\quad f'(x) = 2x\cdot e^x + x^2\cdot e^x$

$f'(x)=0 \Rightarrow 2x\cdot e^x + x^2\cdot e^x = 0$

$e^x(2x+x^2)=0$

$2x+x^2=0$

$x(2+x)=0$

$x_1=0$

$x_2=-2$

Svar $f(x)$ har extrempunkter i $x_1=0$ och $x_2=-2$

6. $f(x) = \sqrt{3x-2} = (3x-2)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x)\ \frac{1}{2} \cdot 3(3x-2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$ $\quad f'(1) = \frac{3}{2\sqrt{3 \cdot 1-2}} = \frac{3}{2}$

$y = \frac{3}{2} \cdot x + m$ $\quad f(1) = \sqrt{3 \cdot 1 - 2} = 1$

$1 = \frac{3}{2} \cdot 1 + m$

$m = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$ $\quad$ Räta linjen: $\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

$m = -\frac{1}{2}$

7. $\int_0^1 2x \cdot e^{2x} + 2x^2 \cdot e^{2x}\,dx$ Notera att det är en deriverad funktion

$f'(x) = 2x \cdot e^{2x} + 2x^2 \cdot e^{2x}\,dx$ $\quad f(x) = x^2 \cdot e^{2x}$ med Produktregeln

$\int_0^1 2xe^{2x} + 2x^2e^{2x}\,dx = \left[x^2 \cdot e^{2x}\right]_0^1 = e^2 - 0 = e^2$ $\quad$ Svar: e^2

8. $f(x) = \sin(\ln x)$ $\quad f'(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}$

$f''(x) = \frac{\frac{-\sin(\ln x)}{x} \cdot x - \cos(\ln x)}{x^2} = \frac{-\sin(\ln x) - \cos(\ln x)}{x^2}$

$f''(1) = \frac{-\sin(\ln 1) - \cos(\ln 1)}{1^2} = \frac{-\sin(0) - \cos(0)}{1} = \frac{-1}{1} = -1$

9. För vilka värden är det rationella uttrycket odef

$x^2 - 8x + 16 = 0$ $\quad$ Asymptot då $x = 4$

$(x-4)^2 = 0$

$x = 4$

Titta på stora $|x|$ $\quad \frac{2x^2 + x}{x^2 - 8x + 16} = \frac{x^2\left(2 + \frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1 + \frac{8}{x} + \frac{16}{x^2}\right)}$

$\lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{8}{x} + \frac{16}{x^2}} = 2$

Asymptot $y = 2$

Svar: Asymptot då $x = 4$ och $y = 2$

10. $f(x)=\ln(g(x))$ $\quad f'(x)=\dfrac{g'(x)}{g(x)}$ $\quad f'(x)=\frac{1}{2}$

$\dfrac{g'(x)}{g(x)}=\frac{1}{2}$ $\quad g'(x)=\frac{1}{2}g(x)$ $\quad g(x)=ce^{\frac{1}{2}x}$

$g(0)=2 \Rightarrow c\cdot e^{0}=2$ $\quad g(x)=2e^{\frac{x}{2}}$

$c=2$

11. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ $\quad f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

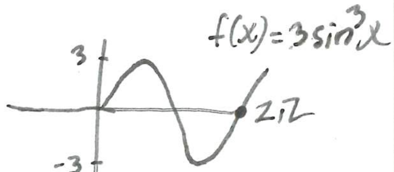
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x+h+1}{x+h-1}-\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{(x+h+1)}{(x+h-1)}\cdot\frac{(x-1)}{(x-1)}-\frac{(x+1)}{(x-1)}\cdot\frac{(x+h-1)}{(x+h-1)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x^2-x+hx-h+x-1}{x^2-x+hx-h-x+1}-\frac{(x^2+hx-x+x+h-1)}{x^2-x+hx-h-x+1}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\cancel{x^2}-\cancel{x}+\cancel{h}x-h+\cancel{x}-\cancel{1}-\cancel{x^2}-\cancel{hx}+\cancel{x}-\cancel{x}-h+\cancel{1}}{x^2-2x+hx-h+1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-2\cancel{h}}{x^2-2x+hx-h+1}}{\cancel{h}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2}{x^2-2x+hx-h+1}=\frac{-2}{x^2-2x+1}=\frac{-2}{(x-1)^2}$$

12. $\int_0^{2\pi}3\sin^3(x)$ Tänk efter! Skiss över graf



en hel Period är 2π därför bör också areorna över och under x-axeln vara lika stora därför bör $\int_0^{2\pi}3\sin^3(x)=0$

Svar: 0

13. $f(x) = \frac{4\cos^2(x+\frac{\pi}{2}) - 4\sin^2(x+\frac{\pi}{2})}{2} = 2(\cos^2(x+\frac{\pi}{2}) - \sin^2(x+\frac{\pi}{2})$

$= 2\cos(2(x+\frac{\pi}{2})) = 2\cos(2x+\pi)$

$g(x) = \frac{3 - 6\sin^2(x+\frac{\pi}{2})}{3} = 1 - 2\sin^2(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(2(x+\frac{\pi}{2}))$

$= \cos(2x+\pi)$

Vi är intresserade på $\int_a^b f(x) - g(x)\,dx$ hitta gränserna a,b

genom att lösa $\cos(2x+\pi) = 0$

$\cos(2x+\pi) = 0 \Rightarrow \quad 2x+\pi = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi\cdot n$

$2x = \pm - \frac{\pi}{2} + 2\pi\cdot n$

$x = \pm - \frac{\pi}{4} + \pi\cdot n$

$x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi\cdot n$

$x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi\cdot n$

Vi söker nu de första 2 nollställena för $\cos(2x+\pi)$ $\quad x_1 = \frac{\pi}{4}$ och $x_2 = \frac{3\pi}{4}$ (undersök för olika n) då $x > 0$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 2\cos(2x+\pi) - \cos(2x+\pi)\,dx = \left[\sin(2x+\pi) - \frac{\sin(2x+\pi)}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$= \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\pi\right) - \frac{\sin(\frac{3\pi}{2}+\pi)}{2} - \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right) - \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\pi)}{2}\right) =$$

$$= \underbrace{\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)}_{1} - \underbrace{\frac{\sin(\frac{5\pi}{2})}{2}}_{\frac{1}{2}} - \underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{-1} + \underbrace{\frac{\sin(\frac{3\pi}{2})}{2}}_{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 1$$

Svar: arean är 1 a.e

14. $\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin(x)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\underbrace{\left(\sqrt{3}\sin(x)+\cos(x)\right)}_{\text{Skriv om!}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{3}\sin(x)+\cos(x)$ $\quad a\sin(x)+b\cos(x)=c\sin(x+v)$ där $c=\sqrt{a^2+b^2}$,

$\tan v=\frac{b}{a}$ $\quad c=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$ $\quad \tan v=\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad v=\frac{\pi}{6}$

$\sqrt{3}\sin(x)+\cos(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot 2\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\left[\text{Sin för dubbla vinkeln}\right]=\sin\left(2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

① $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+2\pi\cdot n$

$2x=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot n$

$2x=-\frac{\pi}{12}+2\pi\cdot n$

$x=-\frac{\pi}{24}+\pi\cdot n$

② $2x+\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{4}+2\pi\cdot n$

$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}+2\pi\cdot n$

$2x=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot n$

$2x=\frac{5\pi}{12}+2\pi\cdot n$

$x=\frac{5\pi}{24}+\pi\cdot n$

$$\begin{cases} x_1=-\frac{\pi}{24}+\pi\cdot n \\ x_2=\frac{5\pi}{24}+\pi\cdot n \end{cases}$$

15. Volym: $2a\cdot a\cdot b=36\ m^2$ $\quad b=\frac{36}{2a^2}$

$2a^2b=36\ m^2$

Area: $2a\cdot b+2ab+a\cdot b+a\cdot b+2a^2=6ab+2a^2$

substituera med $b \Rightarrow \frac{108}{a}+2a^2$ $\quad A(a)=\frac{108}{a}+2a^2$

$A'(a)=-\frac{108}{a^2}+4a$ $\quad A'(a)=0 \Rightarrow -\frac{108}{a^2}+4a=0$ $\quad 4a=\frac{108}{a^2}$

$a^3=27$ $\quad a=3$ $\quad A''(a)=\frac{216}{a^3}+4$ $\quad A''(a)>0$ för alla $a>0$

verifiera!

$A(3)=\frac{108}{3}+2\cdot 3^2=36+18=54m^2$ $\quad$ Svar: $a=3$ $b=2$ och minsta arean $54m^2$