

Exempelprov - Matte 3c

OBS: Det här övningsprovet innefattar inte alla moment vi har gått igenom därför **ska man inte bara plugga på det här övningsprovet!!**

1. Derivera funktionerna

a) $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 150$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100x^2 - 12x + 1$

c) $f(x) = 30e^{2x} + e^x + e^{-x}$

d) $f(x) = e^{10x} + 4e^{10x} + 22x - 11$

e) $f(x) = 10\sqrt{x} + \frac{1}{x^4} - \frac{3}{x}$

f) $f(x) = \frac{4}{15} \cdot x^{\frac{21}{3}} + \frac{10}{7} \cdot x^{\frac{1}{7}}$ (5/2/0)

2. När är det rationella uttrycket odefinierat?

a) $\frac{x^2+5}{x^2-16}$

b) $\frac{x-1}{x^3-4x^2-12x}$

(2/1/0)

3. Lös ekvationerna

a) $|x| = 7$

b) $|x + 3| = 8$

c) $|x^2 - 8| = 1$ (1/2/1)

4. Bestäm om $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f'(x) = 0$ för funktionen $f(x) = x^2 - 4x$ i punkterna

a) $x = 1$

b) $x = -2$

c) $x = 2$

d) $x = \frac{1}{2}$ (4/0/0)

5. Bestäm en funktion $f(x)$ som uppfyller kravet $f'(1) = 3$

(0/2/0)

6. Undersök om de räta linjerna L_1 och L_2 är vinkelräta mot varandra

L_1 går igenom punkterna $(1, 4)$, $(3, 12)$

L_2 går igenom punkterna $(-1, -\frac{1}{12})$, $(1, -\frac{3}{12})$

(3/0/0)

7. Skissa grafen till $f(x) = x^2 + 2x - 3$

(3/1/0)

8. Förenkla de rationella uttrycken

a) $\frac{x^3 - 4x}{x^3 - 2x^2 - 8x}$

b) $\frac{x^4 - 20x^2 + 64}{x^2 + 2x - 8}$

(1/6/0)

9. Lös ekvationerna

a) $(x - 2)(x + 3)(x^2 - 16) = 0$

b) $\sqrt{-x^2 + 20} = x + 2$

(1/2/0)

10. Bestäm lutningen för $f(x) = x^2$ i $x = 2$ med hjälp av derivatans definition

(1/2/0)

11. Skriv i faktorform

a) $x^2 + 6x - 16$

b) $x^3 - 8x^2 - 9x$

c) $2x^4 + 20x^3 + 18x^2$

(1/3/0)

12. Bestäm ekvationen till den räta linjen som tangerar $f(x) = \sqrt{x} + 10x$ i $x = 4$

(1/2/0)

13. Bestäm med hjälp av derivatans definition $f'(x)$ av $f(x) = ax^2 + bx - c$

(0/1/2)

14. Bestäm gränsvärdet

a) $\lim_{h \rightarrow -2} \frac{h^4 - 2h^3 - 8h^2}{h^4 - 4h^2}$

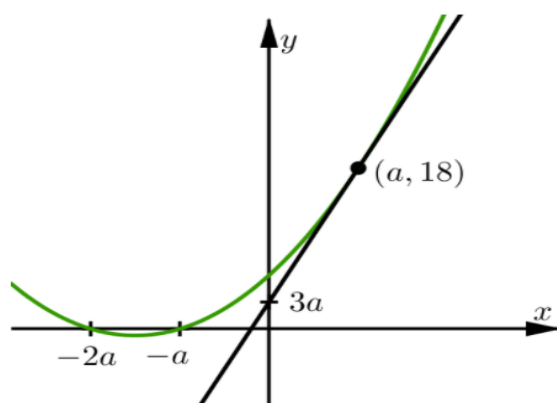
b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{35x^3 - 2x^2 + 4x - 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{16x^4 - 43x^3}}{\sqrt{25x^4 + 1643x^2}}$

(0/3/4)

15.

Figuren visar andragradsfunktionen $f(x)$ och tangenten i punkten $(a, 18)$



$f'(a) = 15$

(0/1/2)

Bestäm funktionen $f(x)$.

16. En andragradsfunktion har nollställena i b och $5b$. Funktionen har en tangent T_1 med lutningen 4 i $x = 1$ som är vinkelrät med T_2 som tangerar funktionen i $x = \frac{25}{8}$. Bestäm funktionen $f(x)$

(0/1/3)

Exempel/Prov

1. a) $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 150$

$f'(x) = 6x^2 + 8x$ 1E

d) $f(x) = e^{10x} + 4e^{10x} + 22x - 11$

$f'(x) = 10e^{10x} + 40e^{10x} + 22$ 1E

b) $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + 100x^2 - 12x + 1$

$f'(x) = x^2 + 200x - 12$ 1E

e) $f(x) = 10\sqrt{x} + \frac{1}{x^4} - \frac{3}{x}$

$= 10x^{\frac{1}{2}} + x^{-4} - 3x^{-1}$

$f'(x) = 5x^{-\frac{1}{2}} - 4x^{-5} + 3x^{-2}$

$= \frac{1}{5\sqrt{x}} - \frac{4}{x^5} + \frac{3}{x^2}$ 1C

c) $f(x) = 30e^{2x} + e^x + e^{-x}$

$f'(x) = 60e^{2x} + e^x - e^{-x}$ 1E

f) $f(x) = \frac{4}{15}x^{\frac{21}{3}} + \frac{10}{7} \cdot x^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{84}{45}x^{\frac{18}{3}} + \frac{10}{49}x^{-\frac{6}{2}}$

$= \frac{84}{45}x^6 + \frac{10}{49}x^{-3}$ 1C

2. a) $\frac{x^2 + 5}{x^2 - 16}$

odef. da $x^2 - 16 = 0$

$x^2 - 16 = 0 \quad x = \pm 4 \quad \text{Svar: } x = \pm 4$ 1E

b) $\frac{x-1}{x^3 - 4x^2 - 12x}$

odef. da $x^3 - 4x^2 - 12x = 0$

$x^3 - 4x^2 - 12x = 0$

$x(x^2 - 4x - 12) = 0 \quad x_1 = 0$ 1E

$x^2 - 4x - 12 = 0$

$x = 2 \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + 12}$

$= 2 \pm \sqrt{16}$

$= 2 \pm 4$

$x_2 = 6$

$x_3 = -2$

Svar: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = -2 \end{cases}$ 1C

3. a) $|x| = 7$

$x = \pm 7$

Svari: $x = \pm 7$ 1E

b) $|x+3| = 8$

två fall:

I) $x+3 = 8$

$x = 5$

II) $x+3 = -8$

$x = -11$

Svari: $\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -11 \end{cases}$ 1E

c) $|x^2 - 8| = 1$

två fall:

I) $x^2 - 8 = 1$ $x^2 = 9$ $x = \pm 3$

1c II) $x^2 - 8 = -1$ $x^2 = 7$ $x = \pm\sqrt{7}$

Svari: $\begin{cases} x_{1,2} = \pm 3 \\ x_{3,4} = \pm\sqrt{7} \end{cases}$ 1A

4. $f(x) = x^2 - 4x$

$f'(x) = 2x - 4$

a) $f'(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2$ $f'(1) < 0$ 1E

b) $f'(-2) = 2 \cdot (-2) - 4 = -8$ $f'(-2) < 0$ 1E

c) $f'(2) = 2 \cdot 2 - 4 = 0$ $f'(2) = 0$ 1E

d) $f'(\frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{1}{2} - 4 = -3$ $f'(\frac{1}{2}) < 0$ 1E

5. Tex $f(x) = x^2 + x$ finns ändligt många

$f'(x) = 2x + 1$ $f'(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ 1c Motivering

6. vinkelräta: $k_1 \cdot k_2 = -1$ $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$L_1: k_1 = \frac{12-4}{3-1} = \frac{8}{2} = 4$ 1E

$L_2: k_2 = \frac{-3 + \frac{1}{12}}{1+1} = \frac{\left(\frac{-2}{12}\right)}{\frac{2}{1}} = \frac{-1}{12}$ 1E

$k_1 \cdot k_2 \neq -1$ de är inte vinkelräta 1E

7. $f(x) = x^2 + 2x - 3$

Viktiga punkter: Nollställen

Skärning i y

Vertex

$f(x) = 0 \quad x^2 + 2x - 3 = 0$

$x = -1 \pm \sqrt{1+3}$
 $= -1 \pm 2$

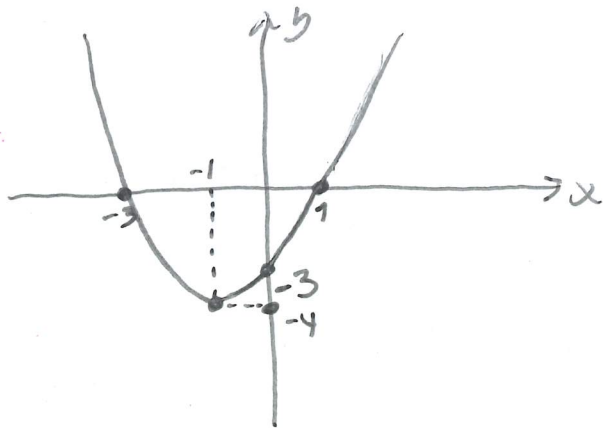
Vertex: symmetrilinjen: $x = -1$

$x_1 = 1$

$x_2 = -3$ 1E

$f(-1) = 1 + 2 \cdot (-1) - 3 = -4$ 1E

Skär y i $y = -3$



1E, 1C

8. a) $\frac{x^3 - 4x}{x^3 - 2x^2 - 8x} = \frac{\cancel{x}(x^2 - 4)}{\cancel{x}(x^2 - 2x - 8)} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2 - 2x - 8} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-4)(x+2)} = \frac{(x-2)}{(x-4)}$ 1E, 1C

Skriv $x^2 - 2x - 8$ i faktorform:

$x^2 - 2x - 8 = 0$ $x = 1 \pm \sqrt{1+8}$

$x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$

$= 1 \pm 3$

$x_1 = 4$

$x_2 = -2$

$$8. b) \frac{x^4 - 20x^2 + 64}{x^2 + 2x - 8}$$

Skriv täljare och nämnare i faktorerform

$$x^4 - 20x^2 + 64 = 0 \quad x^2 = t \quad t^2 - 20t + 64 = 0$$

$$t = 10 \pm \sqrt{100 - 64}$$

$$= 10 \pm \sqrt{36}$$

$$= 10 \pm 6$$

$$t_1 = 4$$

$$t_2 = 16$$

$$x_{1,2}^2 = 4$$

$$x_{1,2} = \pm 2$$

$$x_{3,4}^2 = 16$$

$$x_{3,4} = \pm 4$$

$$x^4 - 20x^2 + 64 = (x-2)(x+2)(x-4)(x+4) \quad 2C$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x = -1 \pm \sqrt{1+8}$$

$$= -1 \pm 3$$

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = 2$$

$$x^2 + 2x - 8 = (x+4)(x-2) \quad 1C$$

$$\frac{x^4 - 20x^2 + 64}{x^2 + 2x - 8} = \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)\cancel{(x-4)}(x+4)}{\cancel{(x+4)}\cancel{(x-2)}} = x^2 - 2x - 8 \quad 1C$$

$$9. a) (x-2)(x+3)(x^2-16) = 0$$

$$x-2 = 0$$

$$x_1 = 2$$

$$x+3 = 0$$

$$x_2 = -3$$

$$x^2 - 16 = 0$$

$$x_{3,4} = \pm 4 \quad 1C$$

$$9. b) \sqrt{-x^2 + 20} = x + 2$$

$$-x^2 + 20 = x^2 + 4x + 4$$

$$2x^2 + 4x - 16 = 0$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x = -1 \pm \sqrt{1+8}$$

$$= -1 \pm 3$$

$$x_1 = 2 \quad 1E \quad \text{undersök falsk rot!}$$

$$x_2 = -4$$

$$x = 2 \quad \sqrt{-4+20} = 2+2$$

$$\sqrt{16} = 4$$

stämmer!

$$x = -4 \quad \sqrt{-16+20} = -4+2$$

$$\sqrt{4} = -2$$

stämmer inte $x = -4$ falsk rot!

1C

$$10. \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x) = x^2$$

$$x = 2$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} \quad 1E$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2^2 + 4h + h^2 - 2^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(4+h)}{\cancel{h}} = 4$$

$$\text{Svar: } f'(2) = 4 \quad 1E, 1C$$

$$11. a) x^2 + 6x - 16$$

$$x^2 + 6x - 16 = 0$$

$$x = -3 \pm \sqrt{9+16}$$

$$= -3 \pm \sqrt{25}$$

$$= -3 \pm 5 \quad x_1 = -8$$

$$x_2 = 2$$

$$x^2 + 6x - 16 = (x-2)(x+8) \quad 1E$$

$$b) x^3 - 8x^2 - 9x$$

$$x^3 - 8x^2 - 9x = 0$$

$$x(x^2 - 8x - 9) = 0 \quad x_1 = 0$$

$$x^2 - 8x - 9 = 0$$

$$x = 4 \pm \sqrt{16+9}$$

$$x = 4 \pm 5 \quad x_2 = 9$$

$$x_3 = -1$$

$$x^3 - 8x^2 - 9x = x(x-9)(x+1) \quad 1C$$

$$c) 2x^4 + 20x^3 + 18x^2$$

$$2x^4 + 20x^3 + 18x^2 = 0$$

$$2x^2(x^2 + 10x + 18) \quad x_1 = 0$$

$$x^2 + 10x + 18$$

$$x = -5 \pm \sqrt{25-18}$$

$$x_2 = -5 + \sqrt{7}$$

$$x_3 = -5 - \sqrt{7}$$

$$2x^4 + 20x^3 + 18x^2 =$$

$$= 2x^2(x+5-\sqrt{7})(x+5+\sqrt{7})$$

2C

$$12. f(x) = \sqrt{x} + 10x = x^{\frac{1}{2}} + 10x$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} + 10 = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 10 \quad \text{1E} \quad f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} + 10 = \frac{1}{4} + 10$$

$$= \frac{41}{4} \leftarrow k\text{-värdet!}$$

Sök y-värdet för $y = kx + m$

$$f(4) = \sqrt{4} + 40 = 42 \quad \text{1C}$$

$$y = kx + m \Rightarrow 42 = \frac{41}{4} \cdot 4 + m$$

$$42 = 41 + m$$

$$m = 1$$

$$\underline{y = \frac{41}{4}x + 1} \quad \text{1C}$$

$$13. \quad \boxed{f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}} \quad f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h)^2 + b(x+h) + c - (ax^2 + bx + c)}{h} \quad \text{1C}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{ax^2} + 2axh + ah^2 + \cancel{bx} + bh + c - \cancel{ax^2} - \cancel{bx} - c}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2axh + ah^2 + bh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2ax + ah + b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2ax + ah + b$$

$$= \underline{2ax + b} \quad \text{1A}$$

1A Snabbt och korrekt kommunicerat

$$14. a) \lim_{h \rightarrow -2} \frac{h^4 - 2h^3 - 8h^2}{h^4 - 4h^2}$$

Nömnaren går mot noll då $h \rightarrow -2$

$$\lim_{h \rightarrow -2} \frac{h^2(h^2 - 2h - 8)}{h^2(h^2 - 4)} = \lim_{h \rightarrow -2} \frac{h^2 - 2h - 8}{h^2 - 4} = \lim_{h \rightarrow -2} \frac{h^2 - 2h - 8}{(h-2)(h+2)} \quad 1c$$

Skriv $h^2 - 2h - 8$ i faktorform

$$h^2 - 2h - 8 = 0$$

$$h = 1 \pm \sqrt{1+8} \\ = 1 \pm 3$$

$$h_1 = 4 \\ h_2 = -2$$

$$\lim_{h \rightarrow -2} \frac{(h-4)(\cancel{h+2})}{(h-2)(\cancel{h+2})} = \lim_{h \rightarrow -2} \frac{(h-4)}{(h-2)} = \frac{-6}{-4} \\ = \frac{3}{2} \quad 2c$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{35x^3 - 2x^2 + 4x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^3 \left(35 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{35 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^3}} \quad 1A$$

Då $x \rightarrow \infty$ försummas alla termer med x i nämnaren

$$= \frac{1}{35} \quad 1A$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{16x^4 - 43x^3}}{\sqrt{25x^4 + 1643x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{16x^4 - 43x^3}{25x^4 + 1643x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^4 \left(16 - \frac{43}{x}\right)}{x^4 \left(25 + \frac{1643}{x}\right)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{16 - \frac{43}{x}}{25 + \frac{1643}{x}}} \quad 1A$$

Då $x \rightarrow \infty$ försummas $\frac{43}{x}$ och $\frac{1643}{x}$

$$= \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \quad 1A$$

$$15. f(x) = k(x+a)(x+2a) = k(x^2 + 3ax + 2a^2) \quad 1c$$

$$f(a) = k(a^2 + 3a^2 + 2a^2) = 6ka^2 = 18$$

$$f'(x) = 2kx + 3ka$$

$$f'(a) = 2ka + 3ka = 5ka = 15$$

$$\begin{cases} 6ka^2 = 18 \\ 5ka = 15 \end{cases}$$

$$k = \frac{15}{5a} = \frac{3}{a}$$

$$\frac{3}{a} \cdot 6a^2 = \frac{18a^2}{a} = 18$$

1A

$$18a = 18 \quad a = 1$$

$$5k = 15 \quad k = 3$$

$$f(x) = 3(x+1)(x+2) = 3(x^2 + 3x + 2) = \underline{3x^2 + 9x + 6} \quad 1A$$

$$16. f(x) = k(x-b)(x-5b) = k(x^2 - 6bx + 5b^2)$$

$$= kx^2 - 6kbx + 5kb^2 \quad 1C$$

$$f'(x) = 2kx - 6kb$$

$$T_1: f'(1) = 2k - 6kb = 4$$

$$T_2: f'\left(\frac{25}{8}\right) = \frac{25k}{4} - 6kb = -\frac{1}{4}$$

om T_1 och T_2 ska vara
vinkelräta krävs $k_1 \cdot k_2 = -1$

$$4 \cdot k_2 = -1 \quad k_2 = -\frac{1}{4} \quad 1A$$

$$f'(1) - f'\left(\frac{25}{8}\right) = 2k - 6kb - \left(\frac{25k}{4} - 6kb\right) = 2k - \frac{25k}{4} = 4 - \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$2k - \frac{25k}{4} = \frac{16}{4} + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$$

$$k\left(2 - \frac{25}{4}\right) = \frac{17}{4}$$

$$k\left(-\frac{17}{4}\right) = \frac{17}{4}$$

$$k = \frac{\frac{17}{4}}{-\frac{17}{4}} = -1 \quad 1A$$

$$-2 + 6b = 4 \quad b = 1$$

$$f(x) = -x^2 + 6x - 5 \quad 1A$$