

Mittkursövningsprov – Ma2b

1. Lös ekvationerna, svara exakt

a) $x^2 - 36 = 0$

b) $x^2 - 4x = 0$

c) $x^2 = 8x$

d) $x^2 + 4x + 3 = 0$

e) $2x^2 - 4x - 16 = 0$

f) $10^x = 40$

g) $3^x = 100$

h) $\lg x = 3$

(10/0/0)

2. Lös ekvationssystemet

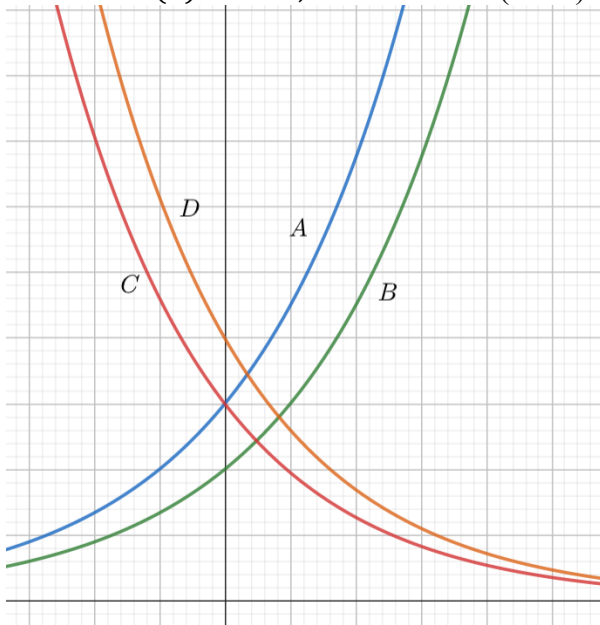
a)
$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2y + x = 7 \end{cases}$$

(2/0/0)

3. Para ihop följande funktionsekvationer med funktionerna på bilderna nedan

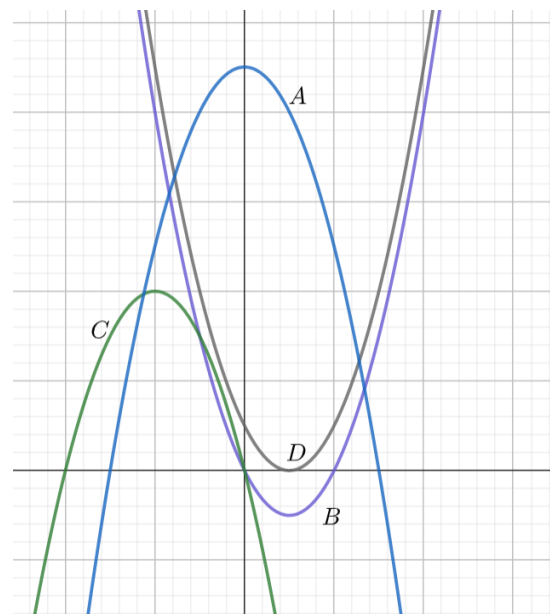
- a) 1. $f(x) = 2 \cdot 1,5^x$
 2. $g(x) = 3 \cdot 0,65^x$
 3. $h(x) = 4 \cdot 0,65^x$
 4. $a(x) = 3 \cdot 1,5^x$

(2/0/0)



- b) 1. $f(x) = -x^2 + 9$
 2. $g(x) = x^2 - 2x$
 3. $h(x) = x^2 - 2x + 1$
 4. $a(x) = -x^2 - 2x$

(2/0/0)



4. Bestäm det exakta värdet för följande uttryck

a) $\lg 1000$

b) $3\lg 10 + 2\lg 100$

c) $10^{\lg 17}$

d) $\frac{3^8 \cdot 3^3 \cdot 3^0}{3^9}$

(4/0/0)

5. Utgå från andragradsfunktionen på formen $f(x) = ax^2 + bx + c$ nedan och bestäm följande

a) Funktionens nollställen

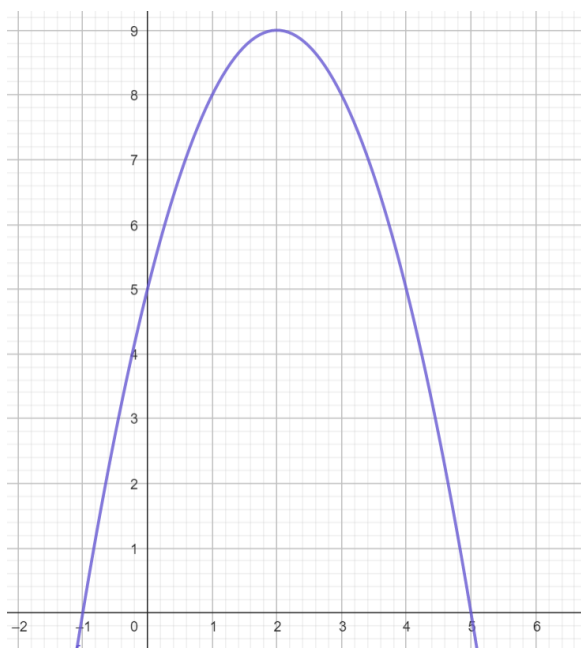
b) Funktionens symmetrilinje

c) Bestäm $f(4)$

d) Lös ekvationen $f(x) = 0$

e) Bestäm med en motivering om konstanten a är större eller mindre än konstanten c

f) Bestäm b om $f(b + 1) = 5$



(4/1/1)

6. Utveckla följande uttryck med kvadreringsregeln eller konjugatregeln

a) $(x + 5)^2$

b) $(x - 3)(x + 3)$

c) $\left(\frac{x}{2} - \sqrt{2}\right)\left(\frac{x}{2} + \sqrt{2}\right)$

(2/1/0)

7. Lös ekvationerna, svara exakt

a) $5 \cdot 3^x = 20$

b) $3x^2 - 10x - 10 = x^2 - 2x + 14$

c) $4^{2x} \cdot 4^x = 17$ (2/4/0)

8. Joakim tänker på två tal. Summan av talen är 20 och det större talet är 3 gånger större än det mindre talet. Vilka tal tänker Joakim på? *Prövning ger inga poäng.*

(0/2/0)

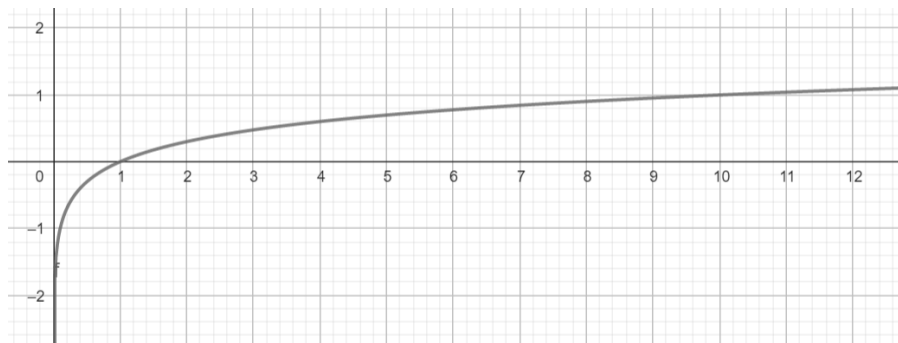
9. För följande andragradsekvationer saknar en reella lösningar, en har enbart en lösning och en har två lösningar. Bestäm vilken som har vilken egenskap.

A $x^2 + 4x + 4 = 0$

B $x^2 - 2x + 10 = 0$

C $x^2 - 6x - 7 = 0$ (3/1/0)

10. Nedan ser du funktionen $f(x) = \lg x$. Du kan notera funktionen går igenom punkterna (1, 0) och (10, 1) vilken är den nästa punkten som funktionen går igenom där både x - och y -koordinaten är positiva heltal?



(0/1/0)

11. Befolkningsförändringen från 2023 i staden Joakimköping beskrivs med följande funktion $f(x) = 30\,000 \cdot 0,93^x$ där x är antal år från 2023. Bestäm följande

a) Hur många människor bor det i Joakimköping 2023?

b) Hur många procent ökar eller minskar befolkning med varje år?

c) Efter hur många år är befolkningen i Joakimköping 15 000?

(3/1/0)

12. En ingenjör har gjort en modell för en bro. Hans modell går att beskriva med följande funktion $f(x) = -0,001x(x - 500)$. Där x är antalet meter längst med vattnet och y är höjden på bron från starten av bron. Bestäm följande

a) Hur långt längst med vattnet sträcker sig bron?

b) Hur högt når bron i förhållande till starten av bron?

(1/3/0)

13. Förenkla följande uttryck

a) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$

b) $\frac{4x^2-4x+1}{2x-1} - x + 1$

c) $\frac{3\lg x + \lg y^3}{3\lg xy}$

d) $(\sqrt{x+1} - 4)^2 - x + 4$

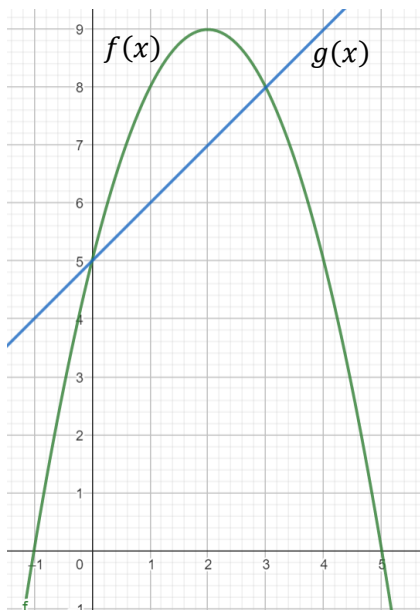
(1/4/2)

14. Nedan ser du två funktioner $f(x)$ och $g(x)$ bestäm följande:

a) $f(x) - g(x) = 0$

b) $f(x) > g(x)$

c) $f(g(0))$



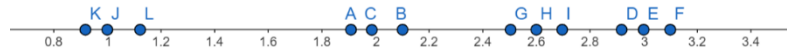
(0/2/1)

15. Bestäm för vilka x -värden funktionerna $f(x) = 3x^2 - 4x - 29$ och $g(x) = 2x + 16$ skär varandra algebraiskt.

(0/3/0)

16. Para ihop lösningen till följande ekvationer med punkterna på tallinjen

1. $10^x = 99$
2. $9^x = 99$
3. $11^x = 99$



17. Lös ekvationssystemet

(0/4/0)

$$\begin{cases} \frac{2y}{3x} = 5 \\ \frac{x+1}{y} = 2 \end{cases}$$

(0/2/0)

18. Inom vilket intervall A-D bör talet $\lg 2023$ ligga inom?

- A $1 < \lg 2023 < 2$
- B $2 < \lg 2023 < 3$
- C $3 < \lg 2023 < 4$
- D $4 < \lg 2023 < 5$

(0/1/0)

19. Bestäm $A^2 - B^2$ om $A = 1234^x + 1234^{-x}$ och $B = 1234^x - 1234^{-x}$

(0/0/2)

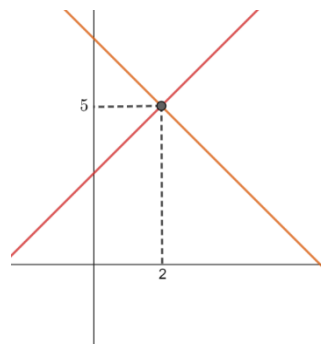
20. Funktionen $f(x) = x^2 + 1$ är given. Undersök om följande likhet gäller för något a

$$f(a+2) = f(a-1)$$

(0/1/1)

21. Följande ekvationssystem har lösningen som visas i koordinatsystemet. Bestäm konstanterna a och b

$$\begin{cases} 2ax + 3by = 46 \\ ay - 5bx = 0 \end{cases}$$



(0/0/2)

22. Lös ekvationen

$$2\lg 2x + \lg 4x + \lg 1 + \lg 1 = 0$$

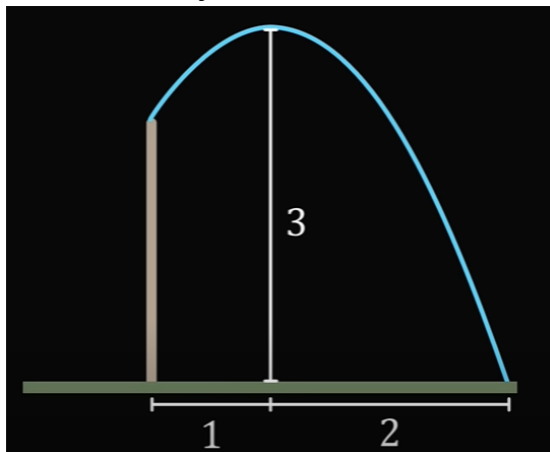
(0/0/2)

23. Antalet ålar har minskat kraftigt under många år. Om man jämför med 1950 finns idag bara 3% av beståndet kvar. Man räknar med att ålens bestånd minskar exponentiellt.

- Konstruera en funktion som beskriver minskningen av antalet ålar.
- Bestäm också vilket år det enbart finns 1% kvar av beståndet från 1950.

(0/0/2)

24. En fontän har en okänd höjd. Den sprutar ut en vattenstråle som når 3 meter över marken som max och landar sedan 3 meter från fontänen. Se bild nedan. Bestäm fontänens höjd. Anta att vattenstrålen rör sig som en andragsgradsfunktion.



(0/0/3)

25. För funktionen $f(x) = ax^2 + 4x + \frac{c}{a}$ vet du att grafen till funktionen skär y -axeln i $y = 10$ samt att funktionen har symmetrilinjen $x = -12$. Bestäm funktionens nollställen.

(0/0/3)

Lösungsvorlesung - Mathematik

1. a) $x^2 - 36 = 0$ b) $x^2 - 4x = 0$ c) $x^2 = 8x$
 $x^2 = 36$ $x(x-4) = 0$ $x^2 - 8x = 0$
 $x = \pm 6$ $x_1 = 0$ $x_2 = 4$ $x(x-8) = 0$
 $x_1 = 0$ $x = 8$

d) $x^2 + 4x + 3 = 0$ e) $2x^2 - 4x - 16 = 0$ f) $10^x = 40$
 $x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = -2 \pm \sqrt{4 - 3} = -2 \pm 1$
 $x_1 = -2 + 1 = -1$
 $x_2 = -2 - 1 = -3$
g) $2x^2 - 2x - 8 = 0$ $\lg 10^x = \lg 40$
 $x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 8}}{2} = 1 \pm \sqrt{9} = 1 \pm 3$
 $x_1 = 1 + 3 = 4$
 $x_2 = 1 - 3 = -2$
Stanna dör!

h) $\lg x = 3$
 $x = 10^3$
 $x = 1000$

i) $3^x = 100$
 $\lg 3^x = \lg 100$
 $x \lg 3 = 2$
 $x = \frac{2}{\lg 3}$
Stanna dör!

II) $2y + x = 7$
 $4 + x = 7$
 $x = 3$ Svari: $x = 3$
 $y = 2$

2. $\begin{cases} 3x - 2y = 5 & \text{I} \\ 2y + x = 7 & \text{II} \end{cases}$
II) $2y + x = 7$
 $x = 7 - 2y$

I) $3x - 2y = 5$
 $3(7 - 2y) - 2y = 5$
 $21 - 6y - 2y = 5$
 $21 - 8y = 5$
 $8y = 16$ $y = 2$

3. a) 1-B, 2-C, 3-D, 4-a

b) 1-A, 2-B, 3-D, 4-C

4. a) $\lg 1000$ vad ska vi höja upp 10 i för att få 1000

$\lg 1000 = 3$

b) $3\lg 10 + 2\lg 100 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$

c) $10^{\lg 17} = 17$

d) $\frac{3^8 \cdot 3^3 \cdot 3^0}{3^9} = \frac{3^{11}}{3^9} = 3^2 = 9$

5. a) $x_1 = -1$ b) Symmetrilinje: $x = 2$ c) $f(4) = 5$
 $x_2 = 5$

d) $f(x) = 0$ e) $a < 0$ eftersom $a < 0$ så vi har
 $x_1 = -1$ $x_2 = 5$ en maximipunkt.

f) $f(b+1) = 5$ Vilket x har vi då $y = 5$

det har vi vid $x_1 = 0$ och $x_2 = 4$

$b_1 + 1 = 0$ $b_2 + 1 = 4$ Svar: $b_1 = -1$

$b_1 = -1$ $b_2 = 3$ $b_2 = 3$

6. a) $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$ b) $(x-3)(x+3) = x^2 - 9$

c) $\left(\frac{x}{2} - \sqrt{2}\right)\left(\frac{x}{2} + \sqrt{2}\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - (\sqrt{2})^2 = \frac{x^2}{4} - 2$

$$7. a) 5 \cdot 3^x = 20$$

$$3^x = 4$$

$$\lg 3^x = \lg 4$$

$$x \cdot \lg 3 = \lg 4$$

$$x = \frac{\lg 4}{\lg 3}$$

Stanna där!

$$c) 4^{2x} \cdot 4^x = 17$$

$$4^{3x} = 17$$

$$\lg 4^{3x} = \lg 17$$

$$3x \lg 4 = \lg 17$$

$$x = \frac{\lg 17}{3 \lg 4}$$

$$9. A: x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$x = -2 \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 4}$$

$$= -2 \pm \sqrt{4 - 4}$$

$$= -2 \pm 0 \quad x_1 = -2$$

Enbart ett möjligt!

$$b) 3x^2 - 10x - 10 = x^2 - 2x + 14$$

$$2x^2 - 8x - 24 = 0$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + 12}$$

$$= 2 \pm \sqrt{4 + 12}$$

$$= 2 \pm \sqrt{16}$$

$$= 2 \pm 4 \quad x_1 = 2 + 4 = 6$$

$$x_2 = 2 - 4 = -2$$

$$8. x = \text{Eran taler} \quad y = \text{Andra taler}$$

$$\begin{cases} x + y = 20 & \textcircled{I} \\ 3x = y & \textcircled{II} \end{cases} \quad \textcircled{I} \quad x + y = 20$$

$$x + 3x = 20$$

$$4x = 20$$

$$x = 5$$

$$x + y = 20$$

$$5 + y = 20$$

$$y = 15$$

Svartalen är 5 och 15

$$9. B \quad x^2 - 2x + 10 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= 1 \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - 10} \\ &= 1 \pm \sqrt{1 - 10} \\ &= 1 \pm \sqrt{-9} \end{aligned}$$

Solutor reella ^{Negativt} under rotenhet
lösningar!

$$C \quad x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + 7} \\ &= 3 \pm \sqrt{16} \\ &= 3 \pm 4 \end{aligned}$$

$$x_1 = 7, \quad x_2 = -1$$

10. Det kommer vara

där $x = 100$ och därmed

$$y = 2 \text{ alltså } y(100) = 2$$

$$(100, 2)$$

$$12. f(x) = -0,001x(x - 500)$$

a)

$$= -0,001x^2 + 0,5x$$

$$\text{Sätt } f(x) = 0$$

$$-0,001x^2 + 0,5x = 0$$

$$x^2 - 500x = 0$$

$$x(x - 500) = 0 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 500$$

Svar: 500 meter längre
med vattnet.

$$11. f(x) = 30000 \cdot 0,93^x$$

a) 30000 personer (startvärde)

b) Minskar med 7% varje
år

$$c) f(x) = 15000 \text{ Sätt upp}$$

en ekvation

$$15000 = 30000 \cdot 0,93^x$$

$$\frac{1}{2} = 0,93^x$$

$$\lg \frac{1}{2} = \lg 0,93^x$$

$$\lg \frac{1}{2} = x \cdot \lg 0,93$$

$$x = \frac{\lg \frac{1}{2}}{\lg 0,93} \approx 9,55$$

Svar: Efter ungefär 9,5
år

12. b) Vi söker extremvärdet för funktionen

Symmetrilinjen: $x = 250$

$$f(250) = -0,001 \cdot 250^2 + 0,5 \cdot 250 = 62,5$$

Svar: 62,5 meter hög är bron i förhållande till starten

$$13. a) \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} = \frac{(x+2)^2}{(x+2)(x-2)} = \frac{\cancel{(x+2)}(x+2)}{\cancel{(x+2)}(x-2)} = \frac{x+2}{x-2}$$

$$b) \frac{4x^2 - 4x + 1}{2x - 1} - x + 1 = \frac{(2\cancel{x-1})^2}{2\cancel{x-1}} - x + 1 =$$

$$= 2x - 1 - x + 1 = x$$

$$c) \frac{3\lg x + \lg y^3}{3\lg xy} = \frac{\lg x^3 + \lg y^3}{\lg(xy)^3} = \frac{\lg x^3 \cdot y^3}{\lg(xy)^3} = \frac{\lg(\cancel{x}y)^3}{\lg(\cancel{x}y)^3} = 1$$

$$d) (\sqrt{x+1} - 4)^2 - x + 4 = (\sqrt{x+1})^2 - 8\sqrt{x+1} + 16 - x + 4$$

$$= \cancel{x+1} - 8\sqrt{x+1} + 16 - \cancel{x+4} = -8\sqrt{x+1} + 21$$

$$14. a) f(x) - g(x) = 0$$

$$f(x) = g(x) \text{ för vilka } x \text{ är } f(x) = g(x)$$

$$\text{Svari } x_1 = 0 \quad x_2 = 3$$

$$b) 0 < x < 3 \text{ för vilka } x \text{ är } f(x) \text{ större än } g(x)$$

$$c) f(g(0)) \text{ undersök } g(0), g(0) = 5 \text{ sätta in}$$

$$5 \text{ i } f(x) \quad f(5) = 0$$

$$f(g(0)) = 0$$

$$15. f(x) = 3x^2 - 4x - 29 \quad g(x) = 2x + 16$$

$$\text{Skär varandra: } f(x) = g(x)$$

$$3x^2 - 4x - 29 = 2x + 16$$

$$3x^2 - 6x - 45 = 0$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x = \frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + 15}$$

$$= 1 \pm \sqrt{16}$$

$$= 1 \pm 4 \quad x_1 = 5 \\ x_2 = -3$$

$$\text{Svari: De skär varandra vid} \\ x_1 = 5 \text{ och } x_2 = -3$$

16. 1. $10^x = 99$

$$\lg 10^x = \lg 99$$

$$x = \lg 99$$

$\lg 99$ är mindre
än 2 med bara lite
A, B, C är rimlig

2. $9^x = 99$

$$\lg 9^x = \lg 99$$

$$x \lg 9 = \lg 99$$

$$x = \frac{\lg 99}{\lg 9}$$

$\lg 99$ är nästan

2 och $\lg 9$ är precis
mindre än 1 därför

$$\text{är } \frac{\lg 99}{\lg 9} > \lg 99$$

3. $11^x = 99$

$$\lg 11^x = \lg 99$$

$$x \lg 11 = \lg 99$$

$$x = \frac{\lg 99}{\lg 11}$$

$\lg 11$ är lite större än

1 där är det mindre
är både $\lg 99$ och $\frac{\lg 99}{\lg 9}$

Svar: $\lg 99$ Punkt C

$$\frac{\lg 99}{\lg 9} \text{ Punkt B}$$

$$\frac{\lg 99}{\lg 11} \text{ Punkt A}$$

17.

$$\begin{cases} \frac{2y}{3x} = 5 & \textcircled{I} \end{cases}$$

$$\textcircled{I} \quad \frac{2y}{3x} = 5$$

$$2y = 15x$$

$$y = \frac{15x}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{x+1}{y} = 2 & \textcircled{II} \end{cases}$$

fortsättning

17 fort.

$$\textcircled{\text{II}} \quad \frac{x+1}{y} = 2$$

$$x+1 = 2y$$

$$x+1 = 2 \cdot \frac{15x}{2}$$

$$x+1 = 15x$$

$$x = \frac{1}{14}$$

$$\textcircled{\text{I}} \quad \frac{2y}{3x} = 5$$

$$\frac{2y}{3 \cdot \frac{1}{14}} = 5$$

$$\frac{2y}{\left(\frac{3}{14}\right)} = 5$$

$$2y = \frac{15}{14}$$

$$y = \frac{15}{28}$$

18. 192023

bör ligga mellan

3 och 4

eftersom $\lg 1000 = 3$

och $\lg 10000 = 4$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{14} \\ y = \frac{15}{28} \end{cases}$$

$$19. \quad A^2 - B^2 \quad A = 1234^x + 1234^{-x}, \quad B = 1234^x - 1234^{-x}$$

$$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B) =$$

$$= (1234^x + 1234^{-x} - (1234^x - 1234^{-x})) (1234^x + \cancel{1234^x} + 1234^{-x} - \cancel{1234^{-x}})$$

$$= (\cancel{1234^x} + 1234^{-x} - \cancel{1234^x} + 1234^{-x}) (2 \cdot 1234^x)$$

$$= (2 \cdot 1234^{-x}) (2 \cdot 1234^x) = 4 \cdot 1234^x \cdot 1234^{-x} = 4 \cdot 1234^{x-x} = 4$$

$$\text{Svori } A^2 - B^2 = 4$$

$$20. f(x) = x^2 + 1 \quad f(a+2) = f(a-1)$$

$$(a+2)^2 + 1 = (a-1)^2 + 1$$

$$(a+2)^2 = (a-1)^2$$

$$\cancel{a^2} + 4a + 4 = \cancel{a^2} - 2a + 1$$

$$6a = -3$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$21. \begin{cases} 2ax + 3by = 46 \\ ay - 5bx = 0 \end{cases}$$

Bilden visar att ekvationssystemet har lösningen $x=2$ $y=5$, sätt in i ekvationerna

$$\text{Lös} \rightarrow \begin{cases} 4a + 15b = 46 & \textcircled{I} \\ 5a - 10b = 0 & \textcircled{II} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{II} \quad 5a - 10b &= 0 \\ 5a &= 10b \\ a &= 2b \end{aligned}$$

$$\textcircled{I} \quad 4a + 15b = 46$$

$$4 \cdot 2b + 15b = 46$$

$$8b + 15b = 46$$

$$23b = 46$$

$$b = 2$$

$$\textcircled{II} \quad 5a - 10b = 0$$

$$5a - 20 = 0$$

$$5a = 20$$

$$a = 4$$

$$\text{Svar: } a = 4 \\ b = 2$$

$$22. \quad 2\lg 2x + \lg 4x + \underbrace{\lg 1 + \lg 1}_0 = 0$$

$$2\lg 2x + \lg 4x = 0$$

$$\lg 2x^2 = -\lg 4x$$

$$\lg 2x^2 = \lg(4x)^{-1}$$

$$2x^2 = (4x)^{-1}$$

$$2x^2 = \frac{1}{4x}$$

$$8x^3 = 1$$

$$x^3 = \frac{1}{8}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

23. a) Exponentiell förändring $f(x) = C \cdot a^x$

Vi vet inte C men modellen gör att konstruera
 ändå $f(73) = 0,03C$ vilket ger $0,03C = C \cdot a^{73}$

är från
1950

$$0,03 = a^{73}$$

$$(0,03)^{\frac{1}{73}} = (a^{73})^{\frac{1}{73}}$$

$$f(x) = C \cdot 0,9531^x$$

$$a \approx 0,9531$$

$$b) \quad f(x) = 0,01C$$

$$x = \frac{\lg 0,01}{\lg 0,9531}$$

$$0,01C = C \cdot 0,9531^x$$

$$0,01 = 0,9531^x$$

$$\lg 0,01 = \lg 0,9531^x$$

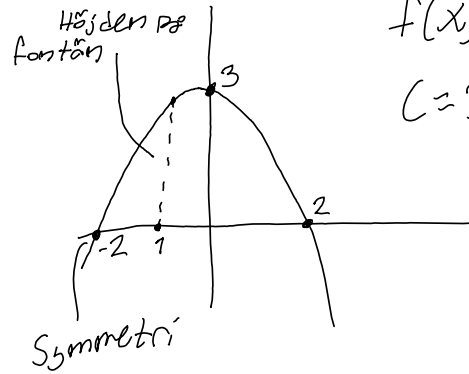
$$\lg 0,01 = x \cdot \lg 0,9531$$

$$x \approx 95,8$$

$$1950 + 95 = 2045$$

Svar: 2045

24. Sökt i fontänen i ett koordinatsystem



$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$c = 3 \quad f(x) = ax^2 + bx + 3$$

$$f(2) = 0 \quad 2^2a + 2b + 3 = 0$$

$$4a + 2b + 3 = 0$$

$$f(-2) = 0 \quad (-2)^2a - 2b + 3 = 0$$

$$4a - 2b + 3 = 0$$

$$\begin{cases} 4a + 2b + 3 = 0 & \text{I} \\ 4a - 2b + 3 = 0 & \text{II} \end{cases}$$

$$\text{II} \quad 4a - 2b + 3 = 0$$

$$4a = 2b - 3$$

$$\text{I} \quad 4a + 2b + 3 = 0$$

$$2b - 3 + 2b + 3 = 0$$

$$4b = 0$$

$$b = 0$$

$$\text{I} \quad 4a + 2b + 3 = 0$$

$$4a + 3 = 0$$

$$a = -\frac{3}{4}$$

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3 \quad \text{sökt i } x = 1$$

$$f(1) = -\frac{3}{4} + 3 = -\frac{3}{4} + \frac{12}{4} = \frac{9}{4}$$

Svar: Fontänen är $\frac{9}{4}$ meter hög

$$25. f(x) = ax^2 + 4x + \frac{c}{a}$$

Roten till funktionen står y i $y=10$

$$\frac{c}{a} = 10 \quad \text{Sen symmetrilinjen: } x = -12$$

Hitta symmetrilinjen: $f(x) = 0$

$$ax^2 + 4x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{4x}{a} + \frac{c}{a^2} = 0$$

$$x = \left(\frac{-4}{2a} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2a} \right)^2 - \frac{c}{a^2}}$$

(symmetrilinjen)

$$\frac{-4}{2a} = -12$$

$$-4 = -24a$$

$$a = 6$$