Den inhomogena ekvationen $y' + ay = f(x)$

om vi har en funktion i HL (eller VL) har vi en såkallad inhomogen ekvation, då kan vi lösa den på följande sätt.

1. Finn en partikulärlösning y_p till den inhomogena ekvationen.

2. Bestäm den allmänna lösningen y_h till motsvarande homogena ekvation $y' + ay = 0$

3. Den allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen är då $y = y_p + y_h$

Exempel på partikulärlösningar för olika funktioner

om $f(x)$ är	Pröva med $y =$
7	a
$3x+3$	$ax+b$
$2x^2$	ax^2+bx+c
$3\cos 2x$	$a\sin 2x + b\cos 2x$
$5e^{2x}$	ae^{2x}

Ex) Bestäm samtliga lösningar till differnationen $y' + 3y = 3x + 1$

1. Hitta partikulärlösningen

$HL = 3x + 1$ Pröva med $y = ax + b$

$y' + 3y = 3x + 1$ ger då $a + 3(ax + b) = 3x + 1$

$a + 3ax + b = 3x + 1$

$\begin{cases} 3a = 3 \\ a + b = 1 \end{cases}$ $\quad a = 1$, $b = 0$ Partikulärlösning: $y_p = x$

2. Homogena ekvationen: $y' + 3y = 0$

Enligt formeln: $y_h = C \cdot e^{-3x}$

3. Allmän lösning: $y = y_p + y_h = x + Ce^{-3x}$

Ex) Bestäm den lösning till differentialekvationen

$\frac{dy}{dx} + 7y = e^{3x}$ som uppfyller villkoret $y(0) = 6$

1. Hitta partikulärlösningen $HL = e^{3x}$ Pröva med $y = ae^{3x}$

$\frac{dy}{dx} + 7y = e^{3x} = y' + 7y = e^{3x}$ $\quad y' - 7y = 3ae^{3x} + 7ae^{3x} = e^{3x}$

$$y' - 7y = 3ae^{3x} + 7ae^{3x} = e^{3x}$$

$$10ae^{3x} = e^{3x}$$

$$10a = 1$$

$a = \frac{1}{10}$ Partikulärlösningen: $y_p = \frac{e^{3x}}{10}$

2. Homogena lösningen: $y' + 7y = 0$

Enligt formel: $y_h = C \cdot e^{-7x}$

3. Allmän lösning: $y = y_p + y_h = \frac{e^{3x}}{10} + Ce^{-7x}$

Begynnelsevillkor: $y(0) = 6$

$$y(0) = \frac{e^0}{10} + C \cdot e^0 = 6$$

$$\frac{1}{10} + C = 6$$

$$C = 6 - \frac{1}{10}$$

$$C = \frac{59}{10}$$

$$y = \frac{e^{3x}}{10} + \frac{59e^{-7x}}{10} = \frac{e^{3x} + 59e^{-7x}}{10}$$