

Övningsprov 2 – Ma5

1. a) Ge en enkel formel för följande talföljd

1, 5, 9, 13, 17, 21...

- b) Ge en rekursionsformel för samma talföljd

(2/1/0)

2. Avgör om talföljderna är aritmetiska talföljder eller geometriska talföljder och bestäm dess formel

a) 1, 11, 21, 31, 41 ...

b) 2, 6, 18, 54 ...

c) 125, 25, 5, 1 ...

(3/0/0)

3. Skriv rekursionsformler till samtliga talföljder i uppgift 2.

(3/2/0)

4. Bestäm följande

a) Bestäm MGM för talen 12 och 21

b) Bestäm SGF för talen 99 och 198

(2/0/0)

5.

a) Vilket är det minsta heltalet på a då $a > 0$ som kan vara kongruent med 34 modulo 7

b) Vilket är det minsta heltalet på a då $a > 0$ som kan vara kongruent med 102 modulo 7

(3/0/0)

6. Bestäm summorna

a)

$$\sum_{n=1}^4 3n + 1$$

b)

$$\sum_{n=3}^7 20 \cdot 2^n$$

(3/1/0)

7. Skriv talet $11101_{\text{två}}$ i talbasen

a) Tio

b) Sju

(2/2/0)

8. Undersök om följande tal är delbara med 9 med kongruensberäkning

a) $10 + 5 + 12 + 18 + 45$

b) $35 \cdot 21 \cdot 80 \cdot 99$

c) $3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4$

d) $44^{32} + 17$

(3/3/1)

9. Visa att talet 15872 är delbart med 4 genom att undersöka $15800 + 72 \pmod{4}$

(0/2/0)

10. Joakims farfar var en generös man. Han la in ett okänd mängd pengar varje år från hans födsel på ett sparkonto med en årlig ränta på 6%. När Joakim var 18 år fick han ut de 154 528 kr som hans farfar hade sparat ihop. Hur mycket lade Joakims farfar in varje år om vi antar att han lade in lika mycket varje år?

(0/2/0)

11. Bevisa att $43^n - 1$ är delbart med 3 för alla $n > 0$ då $n \in \mathbb{N}$

(0/1/1)

12. Joakim sätter in 3000 kr varje månad i en fond som har en månadsränta på 0,8%. Efter en tid har han sparat ihop 357 345 kr och tar då ut pengarna. Hur mycket har Joakim sparat? Svara i år.

(0/2/0)

13. En av Joakims elever skriver upp talet $41^{234312} - 9$ på tavlan och säger att det är ett primtal. Joakim som den kunniga matteläraren han är säger att han är helt säker på att det inte är ett primtal. Hur kan han veta det? Motivera utan miniräknare.

(0/0/2)

14. Bestäm den sista siffran i talet $2^{384} + 3^{32}$

(0/0/2)

Övningsprov 2 - ma 5

1. a) $a_1 = 1$ och det adderas 4 i varje steg

$$a_n = -3 + 4n \quad \text{alt.} \quad a_n = 1 + 4(n-1)$$

b) $a_{n+1} = a_n + 4 \quad a_1 = 0$

2. a) Adderas 10 i varje ^{ste}steg - Aritmetisk talföljd

b) Multipliceras med 3 i varje steg - Geometrisk talföljd

c) Multipliceras med $\frac{1}{5}$ i varje steg - Geometrisk talföljd

3. a) $a_{n+1} = a_n + 10 \quad a_1 = 1$ b) $a_{n+1} = a_n \cdot 3 \quad a_1 = 2$

c) $a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{5} \quad a_1 = 125$

4. a) $\text{MCM}(12, 21)$ Primtalsfaktorisera

$$12 = 3 \cdot 2 \cdot 2$$

$$21 = 3 \cdot 7$$

$$\text{MCM}(12, 21) = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 84$$

Svar: 84

b) $\text{SGF}(99, 198)$ Primtalsfaktorisera

$$99 = 33 \cdot 3 = \underline{3 \cdot 11 \cdot 3}$$

$$198 = 2 \cdot 99 = 2 \cdot \underline{3 \cdot 3 \cdot 11} \quad \text{SGF}(99, 198) = 99$$

5. a) $34 \equiv a \pmod{7}$ ^{minsta $a \geq 0$}

$$34 \equiv 6 \pmod{7} \quad a = 6$$

b) $102 \equiv a$ ^{minsta $a \geq 0$}

$$102 \equiv 4 \pmod{7} \quad a = 4$$

$$6. a) \sum_{n=1}^4 3n+1 = S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$$

$$a_1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$$

$$a_4 = 3 \cdot 4 + 1 = 13$$

$$S_4 = \frac{4(4+13)}{2} = 34$$

$$b) \sum_{n=3}^7 20 \cdot 2^n = S_n = \frac{a_1 \cdot (n^2 - 1)}{n - 1}$$

$$a_1 = 20 \cdot 2^3 = 160$$

$$S_5 = \frac{160(2^5 - 1)}{2 - 1} = 4960$$

$$7. a) 11101_{\text{två}} \quad \begin{array}{cccccc} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \end{array}$$

$$16 + 8 + 4 + 1$$

$$11101_{\text{två}} = 29_{\text{tio}} \quad \text{Svar: } 29_{\text{tio}}$$

b) Går till talbors sju

Skapar 29 i talbors 7.

$$\begin{array}{cc} 7^1 & 7^0 \\ 7 & 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 4 & 1 \end{array} \quad 41_{\text{sju}}$$

Svar: 41_{sju}

$$8. a) 10 + 5 + 12 + 18 + 45 \equiv 1 + 5 + 3 + 0 + 0 = 9 \equiv 0 \pmod{9}$$

Det är delbart med 9

$$b) 35 \cdot 21 \cdot 80 \cdot 99 \equiv 8 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 0 = 0 \pmod{9}$$

Det är delbart med 9

$$c) 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 = 3 + 6 + 12 + 24 + 48 \equiv 3 + 6 + 3 + 6 + 3$$

$$= 21 \equiv 3 \pmod{9} \text{ inte delbart med 9.}$$

$$d) 44^{32} + 17 \equiv 8^{32} + 8 = (8^2)^{16} + 8 = 64^{16} \equiv 1^{16} + 8 = 9 \equiv 0 \pmod{9}$$

Det är delbart med 9.

$$9. \quad 15800 + 72 \equiv 158 + 0 = 158 \equiv 0 \pmod{4}$$

$$10. \quad S_n = \frac{a_1(n-1)}{n-1} \quad S_{18} = 154528 = \frac{a_1(1,06^{18}-1)}{1,06-1}$$

$$\frac{(1,06-1) \cdot 154528}{(1,06^{18}-1)} = a_1 \approx 5000$$

Svar: Han lade in 5000 kr varje år

$$11. \quad 43^n - 1 \equiv 1^n - 1 = 1 - 1 = 0 \pmod{3}$$

kommer alltid
bli ett

$$12. \quad S_n = \frac{a_1(n-1)}{n-1} \quad S_n = 357345 = \frac{3000(1,008^n - 1)}{1,008 - 1} = \frac{3000 \cdot 1,008^n - 3000}{0,008}$$

$$\frac{357345 \cdot 0,008 + 3000}{0,008} = 1,008^n$$

$$\lg\left(\frac{357345 \cdot 0,008 + 3000}{0,008}\right) = n \cdot \lg(1,008)$$

$$n = \frac{\lg\left(\frac{357345 \cdot 0,008 + 3000}{0,008}\right)}{\lg(1,008)} \approx 84 \text{ månader} \quad \text{är: } \frac{84}{12} = 7$$

Svar: 7 år

$$13. \quad \text{Visa att } 41^{234312} - 9 \text{ inte är ett primtal}$$

$$\text{metod 1: faktorisera uttrycket} \quad 41^{234312} - 9 = [\text{konjugatregeln}]$$

$$= (41^{117156} - 3)(41^{117156} + 3) \text{ talet går att faktorisera alltså är}$$

det inte ett primtal

Metod 2. Undersök delbarhet i någon modulo

$$41 \overset{234312}{-} 9 \equiv -1 \overset{234312}{-} 1 = 1-1 = 0 \pmod{2}$$

Talet är delbart med 2

$2 \overset{384}{+} 3 \overset{32}$ Sista siffran ges av resten i mod 10

$$\begin{aligned} 2 + 3 &= \overset{384}{2} + \overset{32}{3} = (2^2)^{192} + (3^2)^{16} = (4^2)^{96} + 9 = 16 + 9 \equiv 6 + 9 \equiv 6 + (-1) = 6 + 1 = (6^2)^{48} + 1 = \\ &= 36 + 1 \equiv 6 + 1 = (6^2)^{24} + 1 \equiv 6^2 + 1 = (6^2)^{12} + 1 \equiv 6^{12} + 1 = (6^2)^6 + 1 \equiv 6^6 + 1 = (6^2)^3 + 1 \equiv 6^3 + 1 \\ &= 6^3 + 1 = 216 + 1 \equiv 7 \pmod{10} \end{aligned}$$

Svar: Sista siffran är 7.