Lite svårare extrauppgifter.

OBS: varje uppgift ska redovisas med fullständig lösning hos Joakim innan man går vidare till nästa uppgift.

Formelbladet kan vara nödvändigt för att lösa vissa uppgifter.

Aritmetik

1. Beräkna $\mathbf{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{5})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{1}{98})(1-\frac{1}{99})(1-\frac{1}{100})}$

2. Kvadratroten ur ett tal a går att skriva som $\sqrt{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a}^{\frac{1}{2}}$

a) Undersök vad som händer med **exponenten** när du tar kvadratroten ur $\sqrt{a}$ $\sqrt{\sqrt{\boldsymbol{a}}}$ och sedan kvadratroten ur det uttrycket $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\boldsymbol{a}}}}$ och så vidare.

b) Skriv ett generellt potens-uttryck med a som bas för det n:te kvadratroten ur talet a.

3. Hur många siffror innehåller talet $2^{13} \cdot 3^2 \cdot 5^{10}$ (**Alla typer av miniräknare är förbjudna på den här uppgiften)**

4. a) Förenkla $\sqrt{a^2\sqrt{b^4\sqrt{c^8}}}$

b) Om du har fått rätt svar på a) ser du att ditt svar har en viss struktur eller följd. Vilka tal ska vara på x och y för att samma struktur eller följd ska uppstå när man förenklar följande uttryck. Förklara också varför dina tal på x och y ger den önskade strukturen eller följden.

Mahifi.se

$$\sqrt{a^2\sqrt{b^4\sqrt{c^8\sqrt{d^x\sqrt{e^y}}}}}$$

c) **Bonusfråga (du behöver inte göra den här):** Om vi hade tänkt oss att uttrycket ovan bara hade fortsatt med kvadratroten ur a^2, kvadratroten ur b^4, kvadratroten ur c^8 , … kvadratroten ur ä$^{\beta}$, kvadratroten ur ö$^{\gamma}$. Vad hade ö haft för exponent om svaret när man förenklat uttrycket skulle ha samma struktur eller följd som a) och b). Svara som en potens.

5. Joakim har 4 syskon som alla är under 18 år och har olika åldrar. Produkten av alla syskons åldrar är 882. Vad är summan av Joakims syskons åldrar?

6. Skriv följande uttryck $16^{3x} \cdot 27^{4x}$ som en potens med basen 6

7. För vilka tal på a om $0 \leq a \leq 10$ är uttrycket $a^{2000} + a^{2001}$ delbart med:

a) 5
b) 3

8. p, q och r är positiva heltal. Följande samband gäller: $p + \frac{1}{q+\frac{1}{r}} = \frac{25}{19}$

Bestäm produkten pqr

9. $a^2 - b = 4$ skriv uttrycket $2a + b$ i enbart b $\qquad a, b > 1$

10. Vilken är den sista siffran i talet $4^{16} \cdot 3^3 \cdot 5^{32}$ som inte är noll? (**Alla typer av miniräknare är förbjudna på den här uppgiften**)

11. Skriv följande uttryck som en potens med a som bas $a^{\frac{3}{7}} \cdot (b^{-3})^{\frac{5}{12}} \cdot \; a^{\frac{-5}{11}} \cdot \sqrt{b^{\frac{5}{2}}}$

12. Visa att summan av tre på varandra följande tal alltid är delbart med 3.

13. Vilket är det minsta positiva heltal som är delbart med alla siffror?

14. Beräkna $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{3} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{-(n-1)} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{(n-1)}$

Mahifi.se

15. A, B och **C** är rationella tal av formen $\frac{a}{b}$ vi vet att:

A + **B** = $\frac{23}{18}$

A + C = $\mathbf{\frac{9}{5}}$

2C – B = $\mathbf{\frac{82}{45}}$

Bestäm **A, B och C.**

16. Visa att $\sqrt{a \cdot \sqrt{\frac{a}{a^{-1}}}} = a$

17. Beräkna $\mathbf{\frac{2^{5000}+2^{5001}+2^{5002}+2^{5003}-2^{5004}}{2^{5000}}}$

18. Visa att $\sqrt{\mathbf{20}} + \sqrt{\mathbf{45}} = \sqrt{\mathbf{125}}$

19. Skriv följande potenser i storleksordning med den minsta först: 2^{50} 3^{40} 5^{30} 10^{20}

20. Undersök följande serie av tal $1, \frac{-1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{-1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{-1}{243}$ ... Bestäm ett generellt uttryck för det n:te talet i serien

21. Beräkna bråken

a) $\frac{ab}{cd} + \frac{ef}{gh} + \frac{ij}{kl}$

b) $\frac{\frac{xy}{ab}}{\frac{z}{cd}} + \frac{a}{a+b}$

Algebra

1. Bestäm x

$$\mathbf{3^5 \cdot 25^{10} = 15^x \cdot 5^{15}}$$

2. Bestäm n.

$$\mathbf{2^n + 2^n + 2^n + 2^n = 2^{20}}$$

3. Antag att $x^2yz^3 = 16^5$ och $xy^2 = 4^2$ Bestäm xyz, svara som en potens

4. Om $a + 1 = b + 2 = c + 3 = d + 4 = a + b + c + d + 5$. Vad blir då $a + b + c + d$?

5. Bestäm x så att likheten stämmer $\dfrac{\left(\frac{1}{y}\right)^{2x}}{y^{2x}} = (y^4)^4$

6. Beräkna $a + b + c$ om du vet att: $a = \frac{1}{3}$ $\quad a \cdot b = \frac{2}{9}$ $\quad a \cdot b \cdot c = \frac{7}{36}$

7. Lös ekvationen $\frac{4}{x} + \frac{16}{8} = \frac{4+x^2}{2}$

8. Bestäm x $\quad 16^5 \cdot 25^5 = 100^5 \cdot 32^x$

9. Beräkna uttrycket

$$\left(\frac{\frac{1}{\frac{1}{a}}}{1}\right)^{\delta} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{a}}}\right)^{\delta} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{b}}}\right)^{\delta} \cdot \left(\frac{\frac{1}{\frac{1}{b}}}{1}\right)^{\delta} \cdot \left(\frac{\frac{1}{\frac{1}{c}}}{1}\right)^{\delta} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{c}}}\right)^{\delta} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{d}}}\right)^{\delta} \cdot \left(\frac{\frac{1}{\frac{1}{d}}}{1}\right)^{\delta} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{z}}}\right)^{\delta} \cdot \left(\frac{\frac{1}{\frac{1}{z}}}{1}\right)^{\delta}$$

10. Lös ekvationen $x^3(x^2 + 73) = 27(9 + 73)$

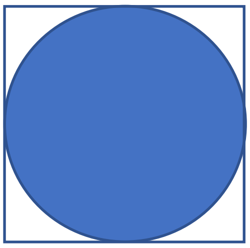
11. Lös ekvationen $\sqrt{16x^2} + \sqrt{36x^2} = 100$ $\qquad x \geq 0$

12. Lös ekvationen $x\left(x + \frac{6}{x^2}\right) = \frac{24}{2x} + \frac{21}{x}$

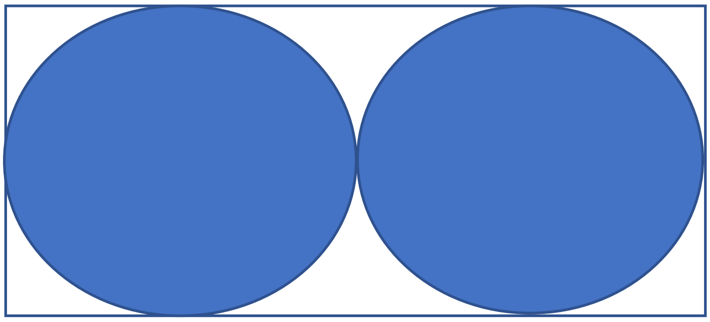
13. Bestäm x, $\mathrm{x}(5+\mathrm{y}) = 2(5+\mathrm{y}) + 4(\mathrm{y}+5) - 3(\mathrm{y}+5) + (5+\mathrm{y}) + (\mathrm{y}+5) + 7(\mathrm{y}+5) + 10(5+\mathrm{y}) - 11(\mathrm{y}+5) + 4(5+\mathrm{y})$

Geometriska problem och trigonometri

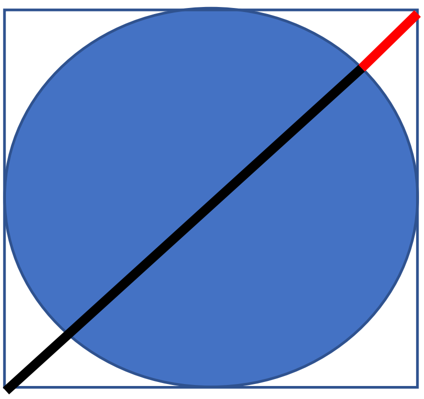
1. Bestäm hur stor andel av kvadratens area som täcks av cirkelns area.



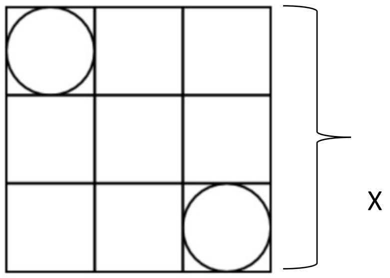
2. Bestäm hur stor andel av rektangels area som täcks av cirklarnas area. Cirklarna är identiska.



3. Nedan ser du en cirkel inskriven i en kvadrat. Visa att den röda sträckan kan formuleras som $\frac{\sqrt{2}a-a}{2}$ där a är kvadratens sidlängd.



4. Vilket är det kortaste avståndet mellan de två cirklarna i följande figur. Den stora kvadratens sidlängd är x



5. Joakim påstår att en kvadrats area blir fyra gånger större om man fördubblar alla sidor. Visa att hans påstående stämmer och visa att det också stämmer för en triangel om man fördubblar basen och höjden. Undersök sedan vad som händer med arean man förlänger kvadraten och triangeln med x, vilket samband ser du?

6. En triangel har sträckorna AB, AC och BC. Sträckan AB är 26 längdenheter och vinkeln B är 73 grader. Vi vet också att vinkeln A kan uttryckas som $A = 12 + B$. Bestäm triangelns höjd samt alla sidor och vinklar.

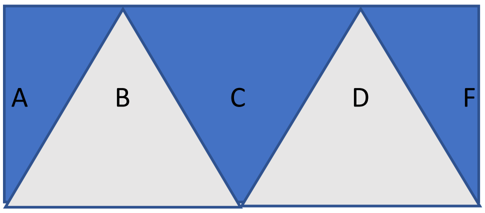
7. Lös ekvationerna

a) $sin(x + 20) = \frac{15}{26}$

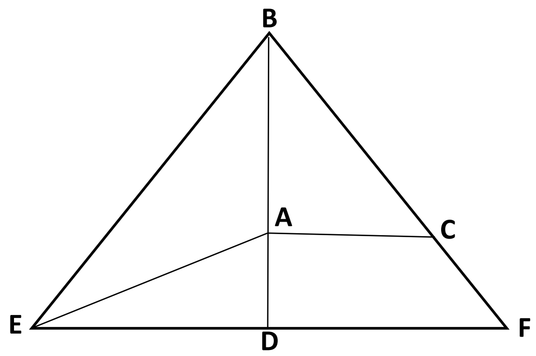
b) $tan(x^2 - 36) = 1$

c) $cos(90 - x) = 1$

8. Nedan ser du en rektangel med 3 liksidiga trianglar (B, C, D) och två räta trianglar (A, F) i. Bestäm längden av de liksidiga trianglarna och rektangelns långsida om du vet att rektangelns kortsida är 1 längdenhet.



9. Triangeln BEF är liksidig. Sträckan BD är 12 längdenheter. Förhållandet mellan sträckan BD och AD är 3:1. Bestäm samtliga längder och vinklar i trianglarna ADE och ABC. Figuren är inte skalenlig. **OBS:** I den här uppgiften ska du enbart använda trigonometri för att lösa problemet.



Generell problemlösning

1. Joakim cyklar från punkt **A** till punkt **B** med konstant hastighet. Om Joakim hade cyklat 3 m/s fortare hade han kommit fram till **B** 3 gånger så snabbt. Hur många gånger snabbare skulle Joakim kommit fram till **B** om han ökat sin hastighet med 6 m/s?

2.

a) Joakim har ett cornflakesföretag och i samband med en reklamkampanj sänker Joakim priset på cornflakespaketen, först med 25% sedan med ytterligare 10%. Samtidigt ökades vikten på cornflakespaketet med 25%. Hur många procent sänktes kilopriset?

b) Hur många procent fler cornflakespaket måste Joakim sälja för att reklamkampanjen ska resultera i vinst?

3. Salthalten i en tunna med vatten är 1%. Hur stor andel av vattnet måste avdunsta för att salthalten ska stiga till 5%?

4. En kompis frågar Joakim om taxi-företaget Taxilund. Han frågar om han minns kilometerpriset och eventuella startavgifter. Joakim kommer inte ihåg men minns att han har två kvitton i plånboken från företaget. På det första kvittot står det att han åkte 15 km och fick betala 1650 kr. På det andra kvittot står det åkte han 6km och fick betala 750 kr. Vad är kilometerpriset och eventuella startavgiften för att åka taxi med Taxilund? Företaget ändrade inte priset mellan första och andra åkningen med Joakim.

5. Joakims familj består av en mamma, en pappa, en lillebror och Joakim själv. Alla har olika långa i familjen. Joakim är dubbelt så lång som sin lillebror. Summan av Joakims mammas och pappas längd är dubbelt så långt som Joakims längd. Joakims pappa är 95 cm längre än hans lillebror och allas längd summeras till 595 cm. Hur långa är varje person i familjen?
6. En grupp med 20 kompisar går in på ett café. En del av gruppen köpte en smörgås som kosta 35 kr. Resten köpte en sallad som kosta 60 kr. Totalt betala gruppen 935 kr. Hur många köpte smörgås respektive sallad?
7. Joakim och hans kompis Pelle ska mötas upp i staden Jönköping som ligger mellan Norrköping och Göteborg. Mellan Norrköping och Göteborg är det 310 km. De startar samtidigt och sedan åker Pelle med en medelhastighet på 83 km/h och Joakim med en medelhastighet på 72 km/h. De kommer samtidigt fram till Jönköping. Hur långt är det mellan Norrköping och Jönköping respektive Göteborg och Jönköping.
8. Joakim häller upp en kopp kaffe. Efter 7 minuter har 40% av den ursprungliga värmen i kaffet försvunnit. Hur långt tar det innan den har minskat med 60%. Anta av värmen avtar exponentiellt.

Sannolikhet

1. Joakim har fått en godispåse i födelsedagspresent. Problemet är bara att hans mamma inte riktigt vet vilka godisar Joakim tycker om. 14% av de godisar som finns i påsen tycker Joakim inte om och det finns 50 godisbitar i påsen. Om han tar upp en godis som han inte gillar lägger han tillbaka den i påsen, om han får upp en godis han tycker om äter han den. Joakim tar upp 10 godisar, äter upp de som han gillar och lägger tillbaka de som han inte gillar. Nu är det 15,9% chans att Joakim får en godis som han inte gillar. Bestäm hur många av de 10 han tog upp som han tyckte om respektive inte tyckte om.

2. Joakim har en träffsäkerhet på 70% när han skjuter på skjutbanan men efter 5 skjutna skott minskar hans träffsäkerhet med 5 procentenheter för varje skott. Under en serie sköt Joakim 10 skott. Sannolikheten att han sköt just den här serien utifrån hans skottsäkerhet är ungefär 0,283257%. Seriens träffar (T) och missar (M) visas i

tabellen nedan. Problemet är bara att de två sista skotten är oläsliga om de var träff eller miss. Undersök om du kan avgöra om Joakims sista två skott var träff, miss eller både och.

Skott 1	T
Skott 2	T
Skott 3	M
Skott 4	T
Skott 5	T
Skott 6	T
Skott 7	M
Skott 8	T
Skott 9	[illegible]
Skott 10	[illegible]

3. Joakim har en tärning som har 12 sidor. Sidorna är numrerade 1,2,3,4…11,12. Vad är sannolikheten att summan av två kast är minst 20.

4. Joakim ska anordna en frågesport med 15 frågor. Varje fråga har 4 svarsalternativ där endast ett svarsalternativ är rätt. 400 personer deltog i frågesporten

a) Vad är sannolikheten att man har fel på alla frågor om man chansar på alla Joakims 15 frågor?
b) Vad är sannolikheten att man har rätt på minst en fråga om man chansar på alla Joakims 15 frågor?
c) Hur många hade fått minst två rätt om alla chansade på alla frågor?

5. Joakim har köpt en godispåse med 30 godisbitar som innehåller 3 olika godissorter. Ferraribilar, sura nappar och lakrits. Det finns 15 ferraribilar, 10 sura nappar och 5 lakritsbitar. Joakim vill äta 3 godisar och tar upp 1 godis i taget. Men Joakim gillar inte lakrits (de är för hans partner), därför om han får upp en lakrits lägger han tillbaka den. Beskriv alla tänkbara utfall med sannolikheter med hjälp av ett träddiagram.

6. Joakim har köpt en godispåse med 30 godisbitar som innehåller 3 olika godissorter. Ferraribilar, sura nappar och lakrits. Det finns 15 ferraribilar, 10 sura nappar och 5 lakritsbitar. Joakim vill äta 3 godisar och tar upp 1 godis i taget. Men Joakim gillar inte lakrits (de är för hans partner), därför om han får upp en lakrits lägger han tillbaka den. Beskriv alla tänkbara utfall med sannolikheter med hjälp av ett träddiagram.

7. Joakim ska kasta en sex-sidig träning 5 gånger. Vad är sannolikheten att han får minst 2 sexor?

Vektorer

1. Joakim och hans 3 kompisar ska tävla i dragkamp. Men det är en annorlunda typ av dragkamp eftersom repet har 4 ändar dvs. man kan dra i repet från 4 olika håll. Joakim och kompis 1 ska tävla mot kompis 2 och kompis 3. Joakim ställer upp sig bredvid kompis 1 så det uppstår en vinkel på 30° mellan dem. Kompis 2 och 3 ställer upp sig likadant fast i motsatt riktning. Joakim är svagast i kompisgänget, kompis 1 är 20% starkare än Joakim, kompis 2 är 20% starkare än kompis 1 och kompis 3 är 20% starkare än kompis 2. Beskriv och rita upp följande scenario med vektorer och skriv också ut resultaten för dragkampen.

Funktioner

1. $f(x)$ är en rät linje som skär y-axeln i 5. Du vet att $f(a+1) = 5$ och $f(a-3) = -3$. Bestäm ekvationen för den räta linjen.

2. En exponentiell funktion $f(x)$ har definitionsmängden $0 \leq x \leq 5$ och följande samband $f(0) = a$ och $f(3) = 1{,}25a$. Bestäm funktionens värdemängd uttryckt i a

3. $\boldsymbol{f(x) = 2x + 4}$ och $g(x) = 4x - 2$, lös ekvationen $f\big(g(x)\big) = 0$

4. $\boldsymbol{f(x) = 4x - 8}$ och $g(x) = x^2$, lös ekvationen $f\big(g(x)\big) = 0$

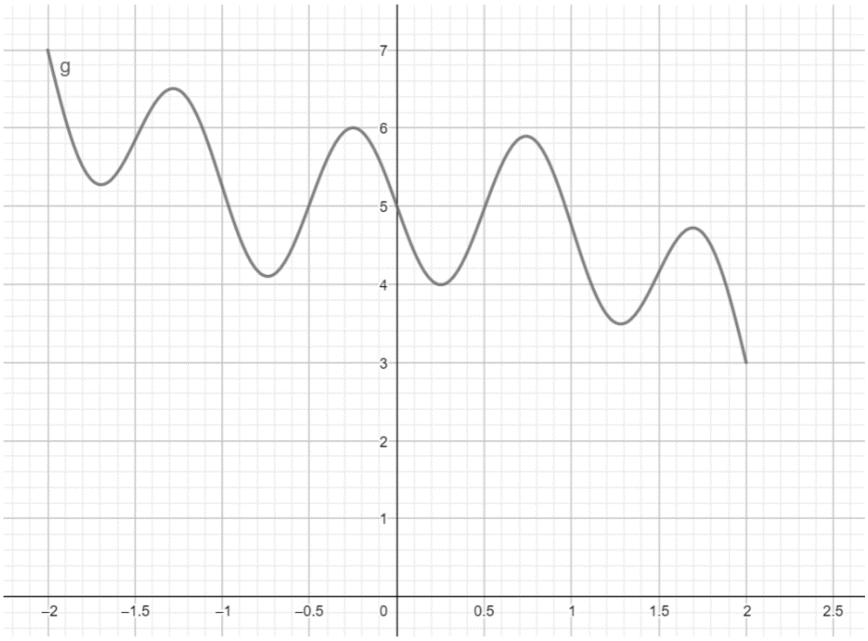
5. En exponentiell funktion $f(x) = 10a^x$ och en rät linje $g(x) = kx$ tangerar (skär varandra) i en punkt $(4, b)$. $g(b) = 2k$. Bestäm a

6. Två exponentiella funktioner $f(x) = 5a^x$ och $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ skär varandra i en punkt $(5, b)$. Bestäm funktionernas ekvationer. Svara exakt.

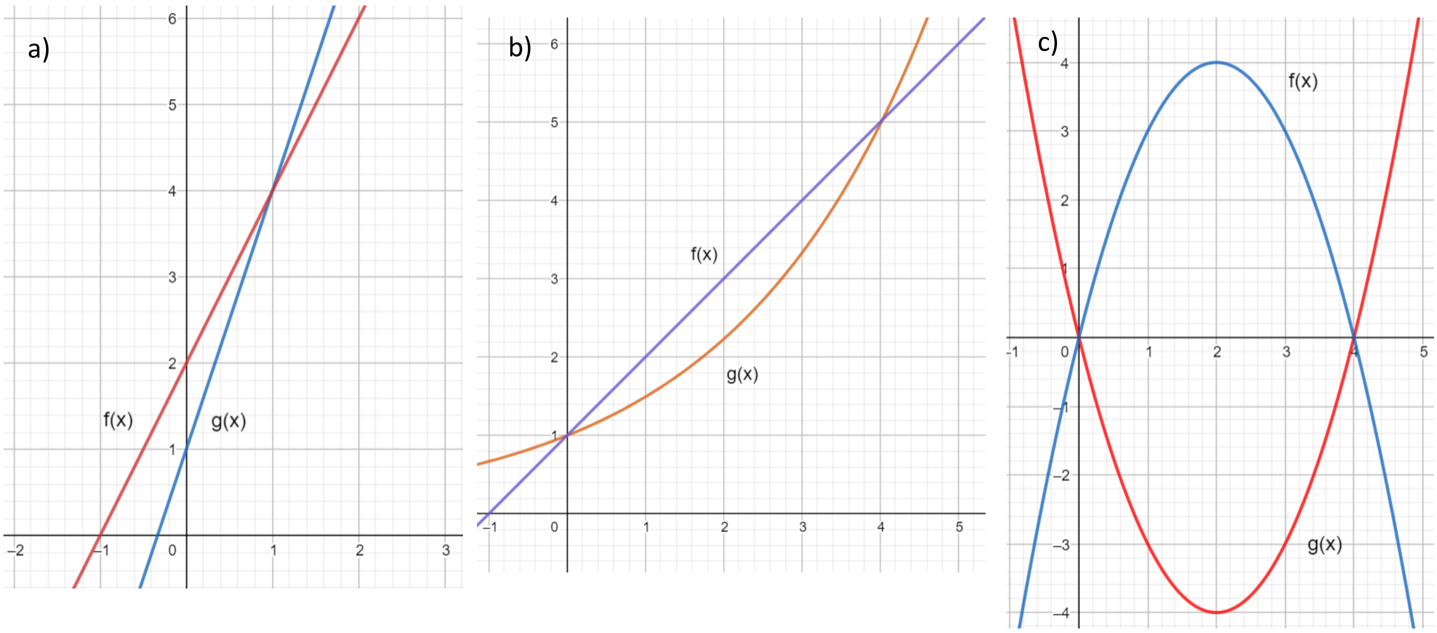
7. Nedan ser du $g(x)$.

a) Bestäm funktionens värdemängd och definitionsmängd.

b) $\boldsymbol{g\left(a + \frac{5}{2}\right) = 3.}$ Bestäm $g(a)$



8. För vilka x är $f(x) \geq g(x)$ för respektive fall

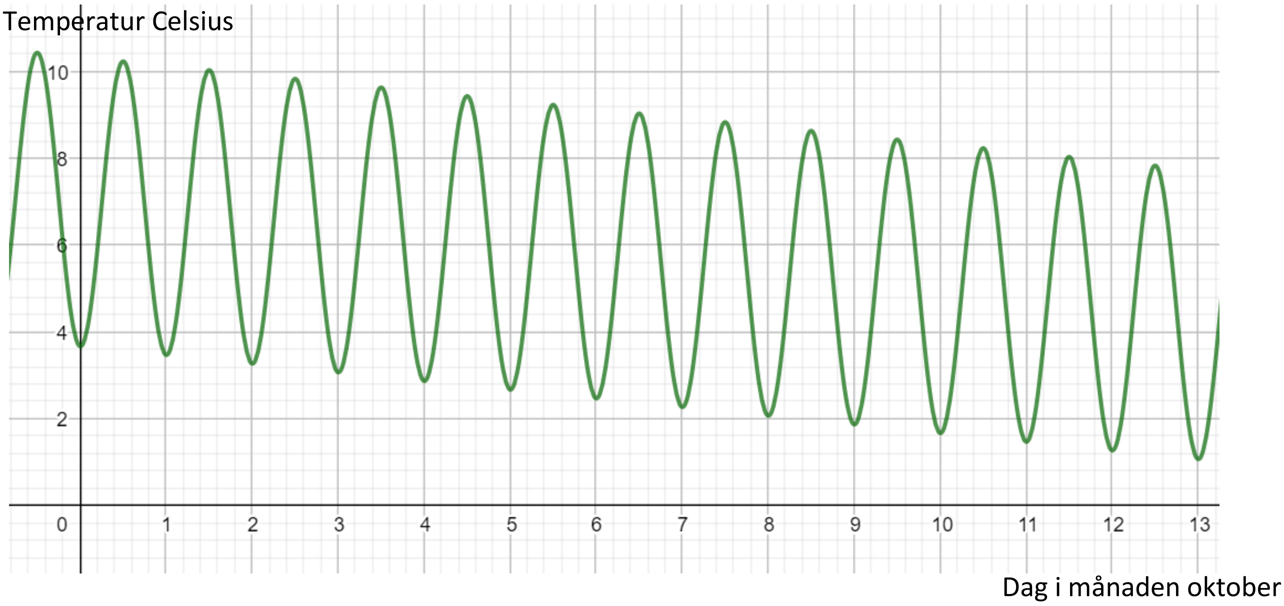


9. Grafen nedan visar på en modell för genomsnittstemperaturförändring de första 13 dagarna i oktobermånad de senaste 20 åren.

a) Hur mycket i genomsnitt förändras temperaturen per dag från dag 1 till dag 12 i oktober. Svara ungefär.

b) Om temperaturförändringen fortsätter enligt modellen vad kommer differensen mellan hösta och lägsta temperaturen på julafton (24 december) att vara? Svara ungefär.

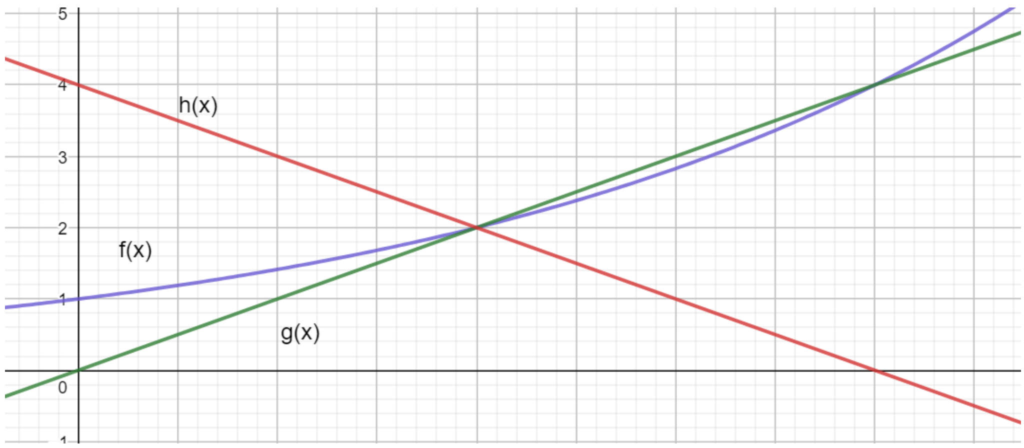
c) Vilka problem ser du med modellen?



10. Funktionen $f(x) = 2^x$ är har definitionsmängden $0 \leq x \leq 2$. $g(x) = 2 \cdot 2^x$ har samma värdemängd som $f(x)$ men en annan definitionsmängd, vilken?

11. $f(x) = 2x^2$, $g(x) = kx$. $f\big(g(2)\big) = 24$. Bestäm samtliga lösningar på k.

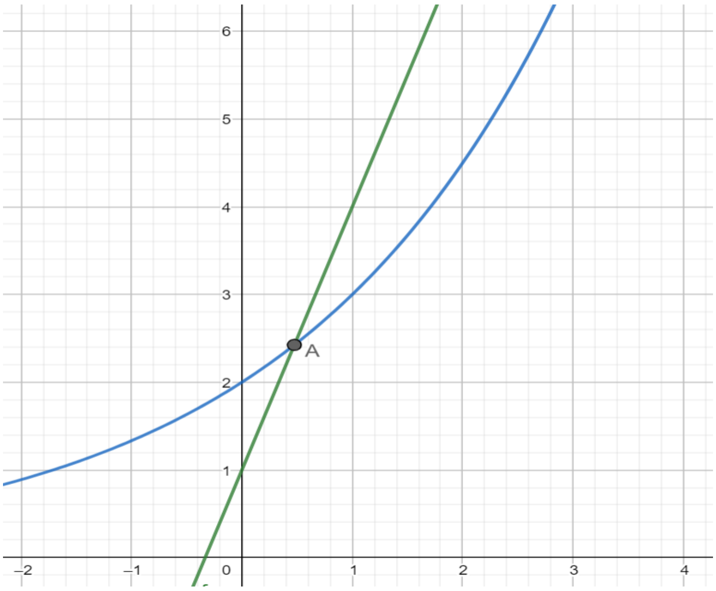
12. Den räta linjen $h(x)$ har ett k-värde som är -1 och är vinkelrät mot den andra räta linjen $g(x)$. Bestäm ekvationen för den exponentiella funktionen $f(x)$ som visas i bilden. Svara exakt. Notera: vi ser inte x-axeln och kan därmed inte dra några slutsatser om dess dimensioner



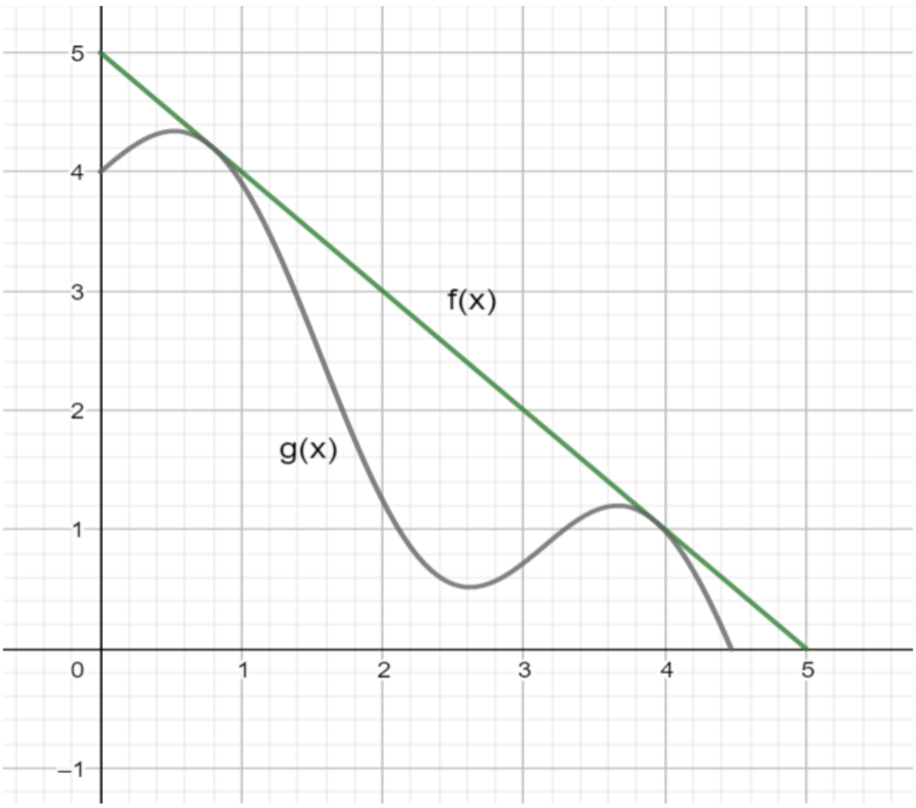
13. Funktionen $f(x) = x^2$ är definierad mellan $-2 \leq x \leq 2$. $g(x) = -x^2 + m, m > 0$ för vilka m finns det en lösning på ekvationen $f(x) = g(x)$.

14. Funktionen $f(x) = x^2 + 1$ är definierad mellan $-2 \leq x \leq 0$. $f(x)$ har samma definitionsmängd som $g(x) = 3 \cdot 0.8^x$, bestäm värdemängden för $f(x)$ och $g(x)$

15. Punkten A:s x-koordinat är en av två lösningar till en ekvation. Vilken ekvation?
Notera: du behöver inte lösa ekvationen.

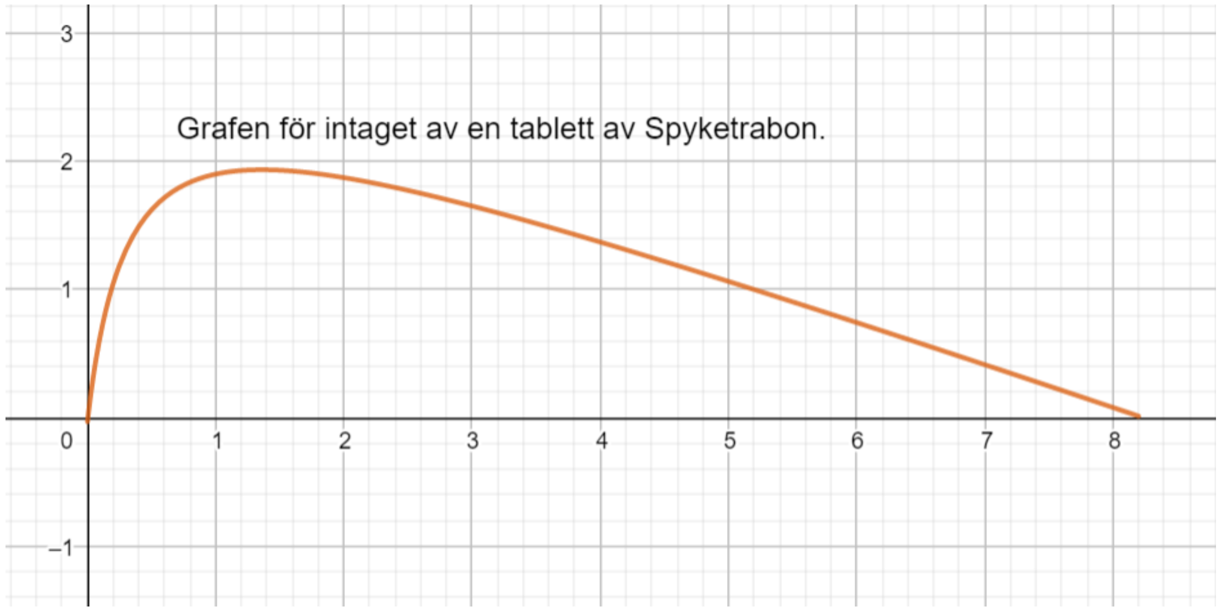


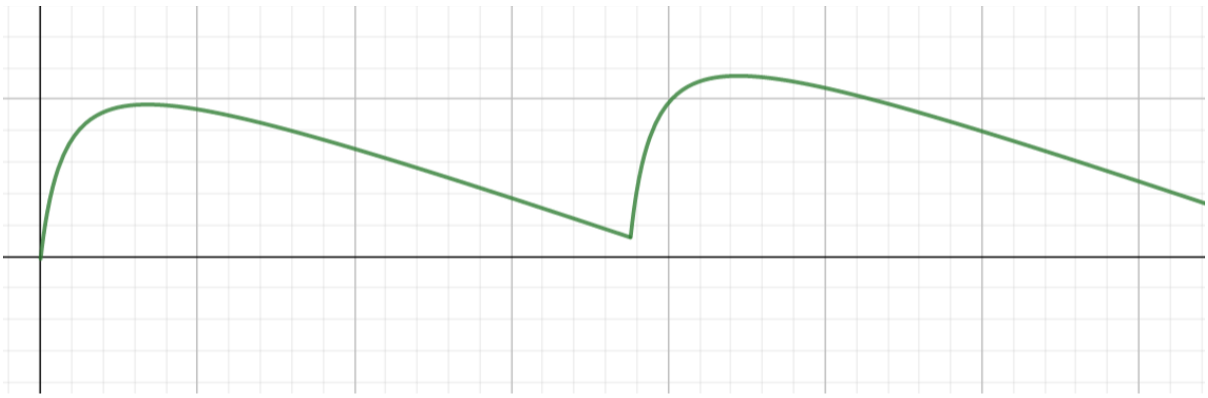
16. $h(x)$ definieras som $h(x) = f(x) + g(x)$. Bestäm $h(x)$ värdemängd.



17. Joakims läkemedelsföretag har kommit på en ny medicin som underlättar för inlärning av matematik. Han kallar medicinen Spyketrabon och menar att det kommer revolutionera matematikundervisningen. Nedan visas en graf till en funktion $S(t)$ som beskriver koncentrationen (milliliter) av läkemedlet i blodet efter intagen tablett. t är tiden i timmar. Desto högre koncentration av läkemedlet som finns i blodet desto bättre blir man på matematik. Joakim undrar följande:

a) Vilken är den högsta koncentrationen en tablett ger?
b) Under hur lång tid verkar en intagen tablett?
c) Joakims dotter Joakimina ska skriva ett matematikprov kl 10.00 när bör hon ta tabletten för att maximera prestationen på provet?
d) Joakims läkemedelsföretag menar att 90% av den högsta koncentrationen måste försvinna ut blodet innan man tar nästa tablett. Hur lång tid tar det?
e) Om man tar en tablett till efter tiden att 90% av koncentrationen har försvunnit får man samma graf. Men den utgår från punkten där grafen för den första dosen slutar se nedan (bild 2). Vilken kommer vara maxkoncentrationen för den tabletten vara och efter hur lång tid kommer koncentrationen vara noll?



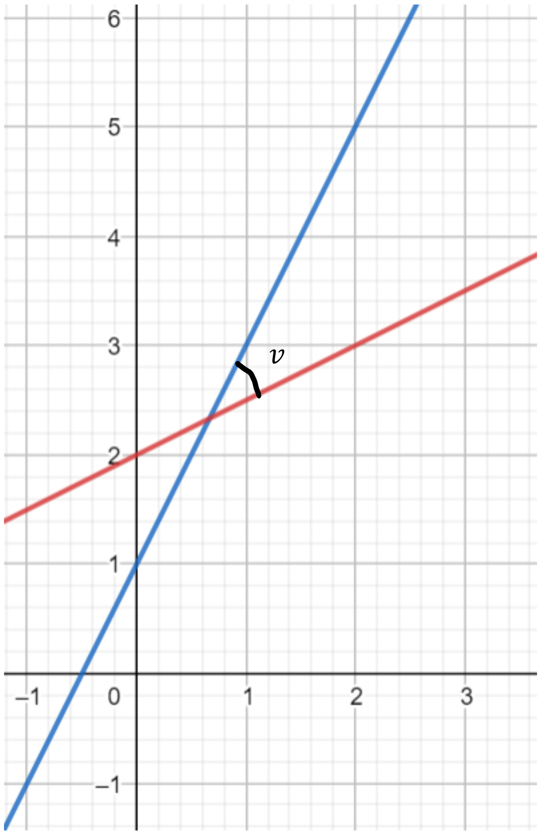


Vinklar i koordinatsystem och avstånd i koordinatsystem

1. $f(x) = x^2 + a$. Bestäm avståndet mellan $f(2)$ och $f(5)$, svara exakt.

2. En rät linje går igenom $y = 2$ och skapar en vinkel mellan sig och y-axeln som är $65°$. Bestäm ekvationen för den räta linjen

3. Bestäm vinkeln v samt ett uttryck för $sinv$



4. $f(x) = 2^x - b$ och $g(x) = x^2 - b$. Bestäm avståndet mellan $f(1)$ och $g(4)$