Bevis och avslutande uppgifter

1. Oändliga serier är något som man ofta använder i matematiken för att bevisa satser och visa på förändringar i processer. En oändlig serie kan antingen konvergera eller divergera. En serie som konvergerar går mot ett specifikt värde. En serie som divergerar går mot ∞.

a) Visa att summan är konvergent och vilket tal går summan mot?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

b) Undersök om summan är konvergent och om summan är konvergent vilket tal går summan mot?

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

2. Joakim vet att talet a^{123} är ett ojämnt tal för ett specifikt tal a. Han påstår att $a^{246} + 6a^{123} + 9$ aldrig är ett primtal. Förklara och visa hur Joakim vet det.

3. Talet $\sqrt{2}$ är ett irrationellt tal, det innebär $\sqrt{2}$ inte går att skrivas som en kvot $\frac{a}{b}$. En stark bevismetod för matematiker är att göra ett motsägelsebevis. Man antar motsatsen till det man vill bevisa och visar på att det uppstår en motsägelse och då har man bevisat det man vill visa. Du kan bevisa att $\sqrt{2}$ är ett irrationellt tal om du gör just ett motsägelsebevis. Antag att $\sqrt{2}$ går att skriva som en kvot a b och att kvoten är på den enklaste formen möjligt (minsta gemensamma nämnaren är 1).

   a) Bevisa att $\sqrt{2}$ är ett irrationellt tal
   b) Bevisa att $\sqrt{8}$ är ett irrationellt tal
   c) Bevisa att $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ är ett irrationellt tal

4. Den oändliga harmoniska summan nedan är en känd summa som man länge inte visste om den var konvergent eller divergent. Idag vet vi att summan är divergent. Det finns ett snyggt bevis för att visa detta. Ett sätt att visa att något är oändligt är visa att något mindre än det vi undersöker är oändligt. Det är ett sätt att bevisa att den harmoniska summan är divergent. Visa att summan är divergent.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Tips: Undersök en summa som har termer som antingen är lika med eller mindre än alla termer i den harmoniska summan

5. Ditt bevis för den harmoniska serien kan nu användas för att lösa vissa matematiska problem. Ett känt sådant är följande problem:

   En myra ska gå längst ett gummiband som är 10 cm långt. Myran går i 1 cm/sekund. Problemet är att gummibandet ökar sin längd med 1 km/sekund också vilket betyder att gummibandet ökar mer i längd än vad myran går varje sekund (vi antar att gummibandet inte går sönder). Din uppgift är att undersöka om myran någonsin kommer fram till slutet av gummibandet med hjälp av metoden och matematiken du använde i uppgift 4.

   Tips: Skriv en summa där varje term är andelen av repet som myran har gått just den sekunden. Utnyttja sedan bevismetoden att du kan undersöka något som du vet är mindre än din summa.