Lite svårare uppgifter Ma5

Talteori

1. Undersök om följande uttryck någonsin kommer resultera i ett primtal för

$n > 1, \quad n \in N$

   a) $10^{2n} - 81$
   b) $2^{4n} - 1$
   c) $n^2 + 4n + 4$

2. Förenkla följande uttryck

a) $\frac{(n+1)!+(n-1)!-n!}{n!}$

b) $\frac{n!-(n-2)!}{n^2-n-1}$

3. Vilken är den sista siffran förutom 0 i talet $20!$

4. Bestäm den sista siffran i

a) 3^{128}
b) 8^{48}
c) $3^{128} + 8^{48}$

5. Visa att $3^{12} + 5^9$ är delbart med 7

6. a) Bevisa på två olika sätt att $a^2 - 1$ är delbart med 8 då a är ett udda tal.

   b) Om du inte redan gjorde det i a) bevisa påståendet med ett induktionsbevis.

7.

   a) Bevisa att $\sqrt{6}$ är ett irrationellt tal
   b) Bevisa att $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ är ett irrationellt tal

8.
När man pratar om delbarhet lär man sig ofta om siffersumman för ett tal är delbart med 3 är också hela talet delbart med 3. Till exempel talet 414 har siffersumman $4 + 1 + 4 = 9$ vilket är delbart med 3 då är också 414 delbart med 3 ($138 \cdot 3 = 414$). Kan du bevisa att det stämmer för alla tresiffriga tal?

9. Bevisa att om de två sista siffrorna i ett tresiffrigt tal skapar ett tal som är delbart 4 är det tresiffriga talet också delbart med 4.

10. För en rekursionsformel gäller följande:

- $a_1 = 3$
- $a_n \cdot a_{n+2} = 3^{2n+2}$

Bestäm rekursionsformeln

11. Fibonaccital är följande talföljd: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34$ ... Bestäm en rekursiv formel för talföljden inkludera också de nödvändiga villkoren för formeln.

12. **(inte klar)** Joakims byggnadsföretag ska bygga ett speciellt hus han vill konstruera ett höghus en enbart är byggda på kuber (enligt bilden nedan). Varför varje kub ska sidlängden minska med en faktor på $\frac{3}{4}$. Joakim vill att byggnaden ska vara 500 meter högt och ha en volym på …. Bestäm höjden på första kuben samt hur många kuben som bygger upp tornet.

13. Joakim vet att talet $2^{1232435982} - 81$ inte är ett primtal. Han är ingen aning om vad talet är men han är helt säker på att det inte är ett primtal. Hur kan han veta det?

Kombinatorik

14. Hur många av talen $1, 2, 3 \ldots, 3300$ är inte delbara med talen $2, 3$ och 11?

15. Du är en tjuv och vill bryta dig in i ett kassaskåp hos en rik VD. Du placerar ett ämne på VD:n skrivbord som enbart du kan se med en speciell lampa. Du kommer tillbaka till kontoret nästa dag och ska observera om VD:n har kladdat av ämnet på kassaskåpet, då vet du ju vilka siffror han använder för den fyrsiffriga koden. Han kan använda $1, 2, 3$ eller 4 olika siffror som kod. Vilken vill du som tjuv minst se att han använder för att så snabbt som möjligt komma in i kassaskåpet? Motivera.

16. a) Hur många tresiffriga positiva heltal finns det där siffran 7 förekommer udda antal gånger.

c) Hur många fyrsiffriga positiva heltal finns det där siffran 7 förekommer udda antal gånger?

17. Hur många ord kan man bilda av de bokstäver som bildar ordet Google om man ska välja ut 4 bokstäver? (Anta att alla bokstavsföljder skapar ett ord)

18. I en klass finns det 32 elever. Joakim ska ordna en bordsplacering som ska fungera för alla i klassen. Det finns 3 saker Joakim måste tänka på innan han placerar ut platserna.

- Elev Pi och elev Alfa måste sitta bredvid varandra.
- Elev Gamma måste sitta på vänster sida
- Elev Delta och elev Kappa får inte sitta bredvid varandra.

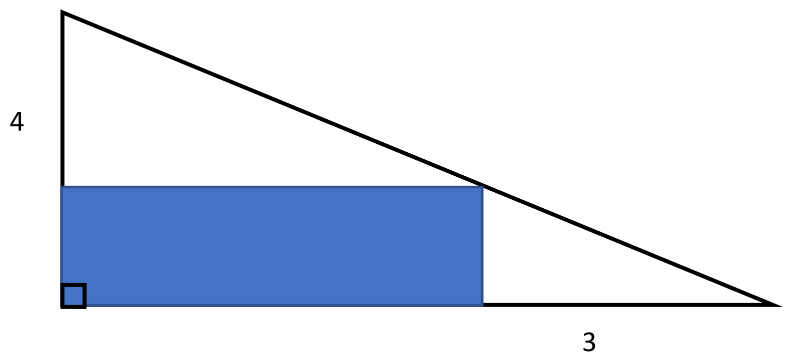
I klassrummet finns 4 rader med 8 bord i varje rad.

Joakim är lite orolig att det kommer bli en brist på möjligheter. Hur många kombinationer är möjliga för det scenariot?

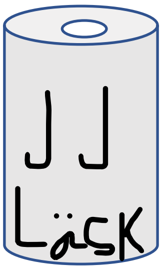
Differentialekvationer och tillämpningar på derivata och integraler

19. Du jobbar på ett företag Joakims el som ska dra en elkabel från ett elkraftverk till en ö. Elkraftverket ligger två km från kusten. Ön ligger en km från kusten i östlig riktning och sedan två km från elkraftverket i sydlig riktning. Att dra kabeln på land kostar 100 kr/m och i vattnet kostar det 50 kr/m. Joakims el vill såklart minimera kostnaden för kabeln. Hur ska kabeln dras och vad kommer den kosta om Joakims el vill minimera kostnaden?

20. Nedan ser du en rätvinklig triangel. Arean för den blå fyrhörningen med okända sidlängder är 12 a.e. Vilken är den minsta triangeln (i area) utifrån figuren som tillfredsställer kravet att ha en inritad fyrhörning som har arean 12 a.e?



21. Joakims företag vill konstruera en burk som har en cirkulär botten som ska gå att fyllas med 0.5 dm^3 vätska. Men Joakims företag är såklart miljömedvetna, de vill använda så lite material som möjligt. Därför vill de minimera materialet för burken (så lite area som möjligt). Antag att toppen av burken har ett hål i form av en cirkel som har diametern 1 cm. Vilka dimensioner ska burken ha för att Joakims företag ska minimera materialåtgången, alltså så att burken innehåller så lite area som möjligt men samtidigt innehåller 0.5 dm^3 JJ-läsk?



22. Befolkningen i Joakimköping är från början 300000 personer. Varje år bidrar födelse- och dödstalen att Joakimsköpings befolkning ökar med 2%. Samtidigt flyttar det in 1000 personer varje år. Ställ upp en differenstialekvation med nödvändiga begynnelsevillkor som beskriver sambandet. Du behöver inte lösa differentialekvationen.

23. Lös differentialekvationen $y'' + 4y = 0$ med randvillkoret $y'(0) - y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$